MATEMATIKA 8

TEKST SHKOLLOR PËR KLASËN E TETË TË ARSIMIT FILLOR

Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Bojaxhieva

lamina

MATEMATIKA 8 tekst mësimor për klasën e tetë të arsimit fillor
Të drejtat e autorit © 2026, Ars Lamina – Publikime

Boton
Ars Lamina – Publikime, Shkup 2026

Kryeredaktore
Branka Bugariska

Redaktore
Biljana Stojoska Zlatkov

Autorë
Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Bojaxhieva

Përkthim nga maqedonishtja
Dr. Emin Durmishi
Titulli origjinal: „Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование“

Redaktimi gjuhësor
Liri Lena

Recensentë
Prof. dr. Ljupço Nastovski
Prof. dr. Krutan Rasimi
Jovanka Vangellova

Dizajni
Pointer Creative Agency

Përgatitja grafike dhe teknike
Ars Lamina – Publikime

Shtypi
Branko Gapo – prodhim grafik, Shkup 2026

Tirazhi
7500

Të gjitha të drejtat janë të rezervuara. Asnjë pjesë e këtij libri nuk lejohet të ribotohet ose të transmetohet në çfarëdo forme apo me çfarëdo mjeti, elektronik ose mekanik, duke përfshirë fotokopjimin, dokumentimin ose të ruhet në sistem për rikthimin e informacionit pa pëlqimin me shkrim të botuesit.

Ky tekst mësimor është miratuar për përdorim në arsimin fillor nëntëvjeçar, me Vendimin për miratimin dhe përdorimin e tekstit mësimor për lëndën Matematikë për klasën VIII të arsimit fillor, nr. 26-708/1, datë 5.6.2026, Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

372.851(075.2)=18
MATEMATIKA 8 : tekst mësimor për klasën e tetë të arsimit fillor / Kostadin Trençevski, Biljana Krsteska, Vesna Bojaxhieva ; përkthim në maqedonisht Emin Durmishi. - Shkup : Ars Lamina – Publikime, 2026. - 410 стр. : илустр. ; 200x260 мм

Превод на делото: Математика 8 учебник за осмо одделение во основното образование

ISBN 978-608-280-321-0

1. Trençevski, Kostadin [автор] 2. Krsteska, Biljana [автор] 3. Bojaxhieva, Vesna [автор]

COBISS.MK-ID 69258245

SI TA PËRDORNI KËTË TEKST SHKOLLOR

Teksti është i ndarë në **pesë tema** dhe secila temë ka nga një ngjyrë të ndryshme:

TEMA 1: Numrat dhe veprimet me numra

TEMA 2: Gjeometria

TEMA 3: Algjebra

TEMA 4: Matja

TEMA 5: Puna me të dhëna

Përmbajtjet në secilën temë janë trajtuar në mënyrë të lehtë dhe të thjeshtë dhe për këtë qëllim janë përdorur fusha të ndryshme.

Aktivitet

Çdo njësi mësimore fillon me një aktivitet hyrës në të cilin ka pyetje ose detyra përmes të cilave do të rikujtoni atë që keni mësuar nga vitet e mëparshme.

Shembulli 1

Shembujt e zgjidhur do t'ju tregojnë se si t'i përdorni rregullat që mësohen në njësinë mësimore.

Detyra 1

Këto detyra janë të ngjashme me shembujt e zgjidhur dhe ju duhet t'i zgjidhni ato në mënyrë të pavarur.

Në këtë fushë përkufizohen konceptet që mësohen në njësinë mësimore dhe është e rëndësishme t'i mësoni ato për të kuptuar kërkesat në detyra.

Në këtë fushë janë dhënë veti ose rregulla të rëndësishme të njësisë mësimore të cilat duhet t'i mësoni për të qenë në gjendje të zgjidhni detyrat.

DETYRA PËR USHTRIME

Në fund të çdo njësie mësimore ka detyra me të cilat do të përsërisni atë që është mësuar në atë njësi.

Hulumtim

Në këtë fushë janë dhënë detyra për zgjerimin dhe thellimin e njohurive.

Në fund të secilës temë ka detyra për përsëritje dhe konsolidim të materialit nga tema.
Këto detyra do t'ju ndihmojnë të përsërisni dhe të thelloni njohuritë nga secila njësi mësimore e temës.

Përmbajtja

TEMA 1: NUMRAT DHE VEPRIMET ME NUMRA

1. KUPTIMI I RELACIONIT 8
2. VETITË E RELACIONEVE..... 13
3. RELACIONI I EKUIVALENCËS DHE RELACIONI I RENDITJES..... 18
4. RELACIONET NË PRAKTIKË 21
5. NUMRAT RACIONALË 25
6. NUMRAT DHJETORË TË PAFUNDËM PERIODIKË..... 30
7. BARAZIA E THYESAVE, NUMRAVE DHJETORË DHE PËRQINDJEVE..... 33
8. NJEHSIMI I THYESAVE DHE PËRQINDJEVE TË SASIVE..... 37
9. ZBATIMI I PËRQINDJEVE 40
10. PËRPJESËTIMI 42
11. MADHËSITË PROPORCIONALE..... 47
12. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E NUMRAVE RACIONALË..... 54
13. SHUMËZIMI DHE PJESËTIMI I NUMRAVE RACIONALË 59
14. VETITË E VEPRIMEVE ME NUMRA RACIONALË 64
15. SHPREHJET NUMERIKE ME NUMRA RACIONALË..... 68
16. THYESAT E DYFISHTA 70
17. FUQITË ME BAZË NUMËR TË PLOTË DHE TREGUES NUMËR NATYROR 74
18. RRËNJA KATRORE DHE RRËNJA KUBIKE 78
19. SHPREHJA E NUMRAVE NË FORMËN $a \cdot 10k$, për $a, k \in \mathbb{N}$ 84
20. SHUMËZIMI DHE PJESËTIMI I FUQIVE ME BAZA TË BARABARTA 90

TEMA 2: GJEOMETRIA

1. KËNDET ME KRAHË RECIPROKISHT PARALELË DHE KËNDET ME KRAHË RECIPROKISHT NORMALË..... 100
2. VIJA RRETHORE, RRETHI DHE PJESËT E TYRE 105
3. KËNDI PERIFERIK 111
4. KONSTRUKTIMI I DISA LLOJEVE TË VEÇANTA TË TREKËNDËSHAVE..... 117
5. KUPTIMI I PUTHITSHMËRISË. TREKËNDËSHAT E PUTHITSHËM 122
6. KRITERET E PUTHITSHMËRISË SË TREKËNDËSHAVE 127
7. TEOREMA E PITAGORËS 138
8. ZBATIMI I TEOREMËS SË PITAGORËS NË TREKËNDËSHA 145

9. KATËRKËNDËSHI. PARALELOGRAMI. 149
DREJTKËNDËSHI, ROMBI DHE KATRORI 149
10. TRAPEZI DHE DELTOIDI 156
11. ZBATIMI I TEOREMËS SË PITAGORËS NË KATËRKËNDËSHA 163
12. DETYRA KONSTRUKTUESE 169
13. POLIEDRI, TOPI DHE SFERA 175
14. POLIEDRAT E RREGULLT 180
15. LIDHJA MES NUMRIT TË KULMEVE, BRINJËVE DHE FAQEVE TE POLIEDRAT 183
16. VIZATIMI I FORMAVE 3D TË PËRBËRA 186
17. KOMBINACIONE TË TRANSLACIONEVE, ... 189
ROTACIONEVE DHE SIMETRIVE BOSHTORE 189
18. IDENTIFIKIMI I KOMBINACIONEVE TË SIMETRISË BOSHTORE, ROTACIONIT DHE TRANSLACIONIT 194

TEMA 3: ALGJEBRA

1. MONOMI 202
2. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E MONOMEVE 206
3. POLINOMI. SHKALLA E POLINOMIT 210
4. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E POLINOMEVE 215
5. SHUMËZIMI I POLINOMEVE 219
6. PJESËTIMI I POLINOMIT ME MONOM 222
7. THEJSHTËSIMI I SHPREHJEVE TË PLOTA RACIONALE 225
8. ZËVENDËSIMI I NDRYSHOREVE ME NUMRA TË PLOTË NË SHPREHJET E PLOTA RACIONALE DHE NË FORMULA 228
9. NDËRTIMI DHE ZGJIDHJA E BARAZIMEVE LINEARE 233
10. ZBATIMI I BARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR 237
11. VARGJE NUMRASH DHE FORMASH 242
12. PËRCAKTIMI I KUFIZËS SË PËRGJITHSHME TË VARGUT 245
13. FUNKSIONI 251
14. FUNKSIONI LINEAR. GRAFIKU I FUNKSIONIT LINEAR 258
15. RRJEDHA E FUNKSIONIT LINEAR 264
16. GJETJA E FUNKSIONIT LINEAR TË DHËNË ME GRAFIK 273

TEMA 4: MATJA

1. NJËSITË MATËSE PËR KOHËN 286
2. GRAFIKËT NË KONTEKST TË KOHËS 289
3. GJATËSIA E VIJËS RRETHORE 297
4. GJATËSIA E HARKUT RRETHOR 301
5. PERIMETRI I FORMAVE 2D TË PËRBËRA 306
6. SYPRINA E PARALELOGRAMIT 311
7. SYPRINA E TREKËNDËSHIT 315
8. SYPRINA E TRAPEZIT 320
9. SYPRINA E ROMBIT, DELTOIDIT DHE KATRORIT 324
10. SYPRINA E RRETHIT 328
11. SYPRINA E SEKTORIT RRETHOR, SEGMENTIT RRETHOR DHE UNAZËS RRETHORE 331
12. SYPRINA E PRIZMIT DHE PIRAMIDËS 336
13. VËLLIMI I PRIZMIT DHE PIRAMIDËS 342

TEMA 5: PUNA ME TË DHËNA

1. POPULLACIONI DHE MOSTRA 353
2. TË DHËNAT DISKRETE. TABELA E FREKUENCAVE 359
3. PLANIFIKIMI I HULUMTIMIT DHE MBLEDHJA E TË DHËNAVE 365
4. DIAGRAMET 372
5. DIAGRAMI "KËRCELL-GJETHE" 378
6. LLOGARITJET STATISTIKORE PËR TË DHËNA TË GRUPUARA 383
7. NGJARJA ELEMENTARE. NGJARJA E KUNDËRT. PROBABILITETI. 388
8. NGJARJET QË PËRJASHTOJNË NJËRA-TJETRËN. NGJARJET E VARURA DHE TË PAVARURA 395

Tema 1:

NUMRAT DHE VEPRIMET ME NUMRA

Rezultatet e të nxënit:

Gjatë studimit të kësaj teme do të aftësoheni të:

- zgjidhni probleme nga konteksti i përditshëm duke përdorur relacionet midis bashkësive.
- zbatoni barazinë e thyesave, numrave dhjetorë dhe përqindjeve gjatë krahasimit të sasive të ndryshme.
- zgjidhni probleme nga konteksti i përditshëm që kanë të bëjnë me raportin dhe proporcionin.
- përdorni veprime me numra racionalë në kontekstin e përditshëm.
- përdorni fuqinë me bazë numër të plotë dhe tregues numër natyror, rrënjën katrore dhe kubike të numrit natyror në kontekstin e përditshëm.

1. KUPTIMI I RELACIONIT

Aktivitet

Janë dhënë bashkësitë
$A = \{1, 2, 3\}$ dhe $B = \{a, b\}$.

a) Emërtojeni, e më pas paraqiteni në mënyrë tabelare dhe përshkruese bashkësinë $A \times B$ të të gjitha çifteve të renditura të bashkësive A dhe B.

b) Shkruani tre nënbashkësi të çfarëdoshme M, N dhe P nga prodhimi kartezian $A \times B$.

Do të njihemi me një koncept shumë të rëndësishëm në matematikë, me konceptin e relacionit. Kjo fjalë në jetën e përditshme ka një kuptim të gjerë, por në matematikë ka një kuptim dhe domethënie shumë precize.

Shembulli 1

Në vizatimin 1 me diagramin e Venit janë paraqitur bashkësia A prej katër nxënësve dhe bashkësia B prej pesë qyteteve:

$A = \{$Vllatko, Majlinda, Biljana, Borçe$\}$, dhe

$B = \{$Manastir, Shtip, Shkup, Dibër, Ohër$\}$.

Me shigjeta është treguar për secilin nxënës nga bashkësia A në cilat qytete nga bashkësia B ka qëndruar. Çfarë mund të përfundohet nga diagrami?

Nga Vllatko dalin dy shigjeta, njëra është e drejtuar nga Manastiri dhe tjetra nga Shkupi. Ato tregojnë se Vllatko ka qëndruar në Manastir dhe Shkup. Themi se Vllatko **është në relacion** me Manastirin, dhe gjithashtu, Vllatko **është në relacion** me Shkupin.

Nga Majlinda nuk del asnjë shigjetë. Kjo do të thotë se Majlinda nuk ka qëndruar në asnjë nga qytetet e përmendura. Themi se Majlinda **nuk është në relacion** me asnjë nga qytetet e përmendura.

Në qytetin e Dibrës nuk vjen asnjë shigjetë. Kjo do të thotë se në këtë qytet nuk ka qëndruar asnjë nga nxënësit. Themi se asnjë nga nxënësit **nuk është në relacion** me qytetin e Dibrës.

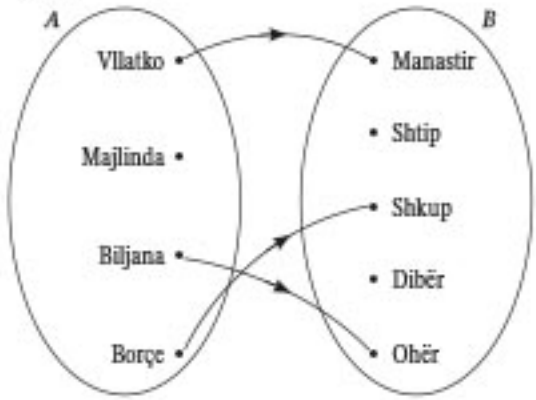


Vizatimi 1

Në këtë rast themi se me ndihmën e shigjetave është dhënë **relacioni** sipas rregullit të shoqërimit "... e vizitoi qytetin ..." ndërmjet elementeve të bashkësive
A dhe *B*. Në vizatimin 1, me diagramet e Venit janë paraqitur elementet e bashkësive *A* dhe B, kurse me shigjeta janë lidhur elementet që janë në relacion nga të dyja bashkësitë. Kjo mënyrë paraqitjeje themi se është paraqitje me **graf** e relacionit të dhënë.
Secila shigjetë e grafit në vizatimin 1 zëvendëson një çift të renditur objektesh, nga të cilët i pari është element i *A*-së dhe qëndron në fillim të shigjetës, kurse i dyti është element i *B*-së dhe qëndron në fund të shigjetës. Kemi aq shigjeta - sa çifte të renditura.
Nga kjo, në shembullin 1 marrim çiftet e renditura:
(Vllatko, Manastir), (Vllatko, Shkup), (Biljana, Manastir), (Biljana, Shtip), (Biljana, Shkup), (Biljana, Ohër), (Borçe, Shkup), (Borçe, Ohër).
Të gjitha çiftet e renditura në relacionin nga *A* në *B* formojnë një bashkësi të përcaktuar saktësisht, e cila është nënbashkësi e prodhimit kartezian të bashkësive *A* dhe *B*.

Detyra 1

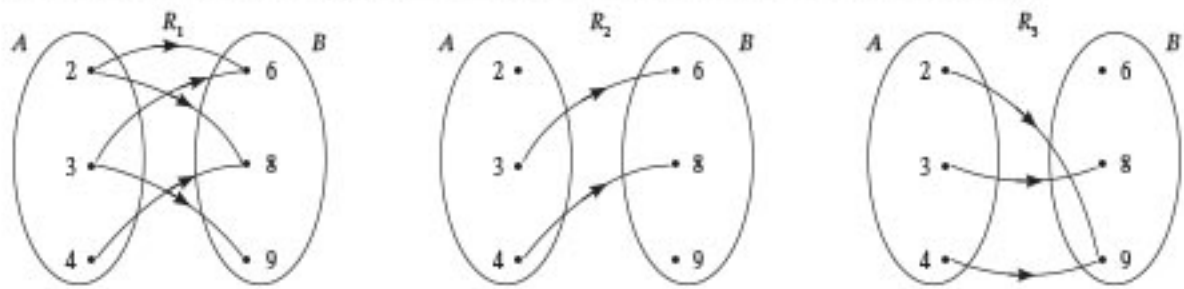
Në vizatimin 2 është paraqitur grafi i relacionit të përcaktuar sipas rregullës së shoqërimit "... ka lindur në ..." ndërmjet bashkësive *A* dhe *B*.
A mundet që një nxënës nga bashkësia *A* të jetë në relacion me më shumë se një qytet nga bashkësia B? Arsyetoni përgjigjen tuaj.



Vizatimi 2

Detyra 2

Në vizatimin 3 me ndihmën e grafit janë dhënë tre relacione; R_1, R_2 dhe R_3, ndërmjet bashkësive *A* dhe *B*. Rregulla e shoqërimit të relacionit R_1 është përcaktuar me: "... përmbahet në ...".
Mundohuni të zbuloni rregullën e shoqërimit të secilit prej relacioneve R_2 dhe R_3.



Vizatimi 3

Le të jenë A dhe B dy bashkësi jo të zbrazëta. Çdo nënbashkësi R e prodhimit kartezian $A \times B$ quhet **relacion** ndërmjet bashkësive A dhe B.

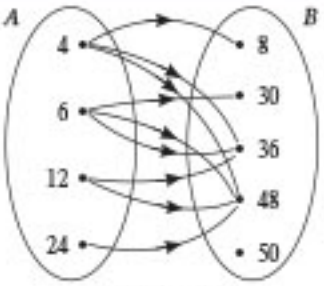
Nëse $(x, y) \in R$ themi se x **është në relacion me** y dhe shkruajmë $x \, R \, y$.

Shembulli 2

Janë dhënë bashkësitë $A = \{4, 6, 12, 24\}$ dhe $B = \{8, 30, 36, 48, 50\}$. Në vizatimin 4 është paraqitur grafi i relacionit R: "... është pjesëtues i ..." ndërmjet bashkësive A dhe B.

Paraqiteni relacionin R:

a) në mënyrë përshkruese, b) në mënyrë tabelare.



Vizatimi 4

Relacioni R, i konsideruar si nënbashkësi e prodhimit kartezian $A \times B$, mund ta paraqesim:

a) **në mënyrë përshkruese**, duke theksuar lidhjen midis elementeve që janë në relacion $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ dhe } x \mid y\}$;

b) **në mënyrë tabelare**, duke shkruar të gjitha çiftet e renditura që e përbëjnë atë $R = \{(4, 8), (4, 36), (4, 48), (6, 30), (6, 36), (6, 48), (12, 36), (12, 48), (24, 48)\}$.

Detyra 3

Janë dhënë bashkësitë $A = \{4, 6, 17, 18\}$ dhe $B = \{6, 19, 20, 24\}$. Paraqitni relacionin R: "... është për 2 më i vogël se ..." nga bashkësia A në bashkësinë B.

a) me graf, b) në mënyrë përshkruese, c) në mënyrë tabelare.

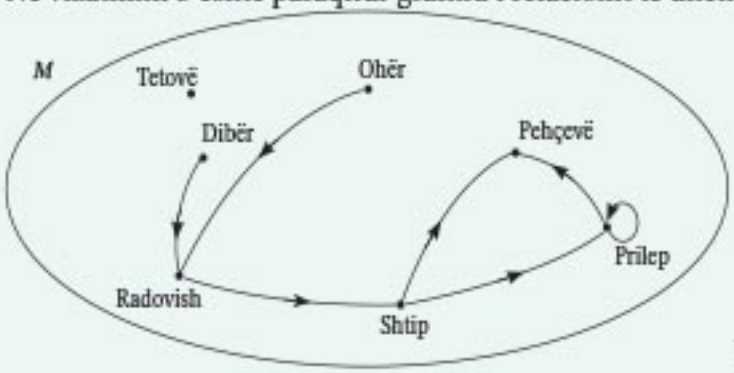
Relacionet mund të jepen edhe midis elementeve të së njëjtës bashkësi.

Shembulli 3

Është dhënë bashkësia M = {Tetovë, Prilep, Shtip, Ohër, Dibër, Radovish, Pehçevë}.

Vizato grafin e relacionit në bashkësinë M: "Shkronja e fundit e emrit të qytetit ... është shkronja e parë e emrit të qytetit ...".

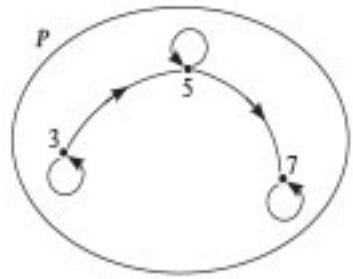
Në vizatimin 5 është paraqitur grafiku i relacionit të dhënë.



Vizatimi 5

Detyra 4

Paraqitni relacionin R midis elementeve të bashkësisë $P = \{3, 5, 7\}$ të dhënë me grafin në vizatimin 6:
a) në mënyrë përshkruese, b) në mënyrë tabelare.



Vizatimi 6

Detyra 5

Në bashkësinë $Q = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ është dhënë relacioni $R = \{(x, y) \mid x, y \in Q \text{ dhe } y = x + 2\}$. Paraqitni relacionin R:
a) me graf, b) në mënyrë tabelare.

Detyra 6

Në figurën 1 janë paraqitur sportet e preferuara të Anës, Mateut dhe Liridonës.
Ata zgjedhin midis sporteve futboll, basketboll dhe not.

a) Paraqitni në mënyrë tabelare relacionin R: "Sporti i preferuar i ... është ...".
b) A ka dy fëmijë me të njëjtin sport të preferuar?
c) A ka ndonjë fëmijë me më shumë se një sport të preferuar?

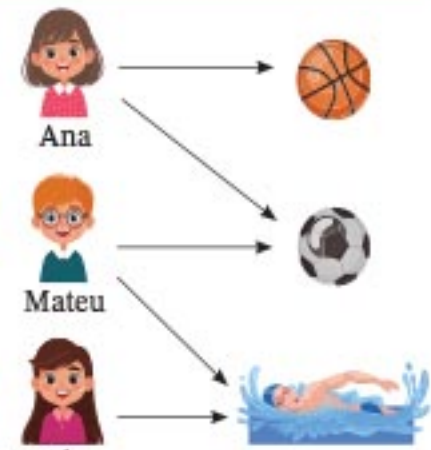


Figura 1

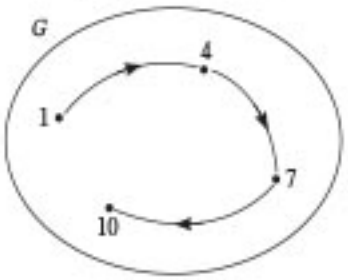
DETYRA PËR USHTRIME

1. Nga shijet e ofruara të akullores: vanilje, çokollatë dhe dredhëz, Iva zgjodhi shijen e vaniljes, kurse Borisi zgjodhi shijen e çokollatës.
   a) Paraqitni me graf relacionin R: "... zgjodhi shijen e ...".
   b) A zgjodhën dy nxënës të njëjtën shije akulloreje?
   c) A zgjodhi ndonjë nxënës më shumë se një shije akulloreje?"
   ç) A ekziston ndonjë shije e akullores që nuk është zgjedhur?

2. Mësuesja i pyeti nxënësit Petar, Emina dhe Maria se në cilat sporte stërviten. Ajo mori përgjigje se:
   Petari stërvitet në futboll, Emina stërvitet në gjimnastikë,
   Maria stërvitet në not, dhe Petari stërvitet në basketboll.
   a) Paraqitni me graf relacionin R: "... stërvitet në ...".
   b) A stërvitet ndonjë nxënës në më shumë se një sport?
   c) A ka nxënës që nuk stërvitet në asnjë sport?

3. Paraqitni relacionin R midis elementeve të bashkësive C dhe D me graf, nëse:
   a) $C = \{6, 9, 18, 29, 36\}$, $D = \{12, 15, 24, 27, 35, 42\}$ dhe R: "... është për 6 më i madh se ...",
   b) $C = \{30, 24, 27, 18, 9, 12\}$, $D = \{8, 10, 3, 6, 9, 5\}$ dhe R: "... është 3 herë më i vogël se ...".

4. Paraqitni relacionin R ndërmjet elementeve të bashkësisë $G = \{1, 4, 7, 10\}$ të dhënë përmes grafit në vizatimin 7: a) në mënyrë përshkruese, b) në mënyrë tabelare.



Vizatimi 7

5. Në bashkësinë $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ është dhënë relacioni $R = \{(x, y) \mid x, y \in P$ dhe $y = 2x\}$.
   Paraqitni relacionin R: a) me graf, b) në mënyrë tabelare.

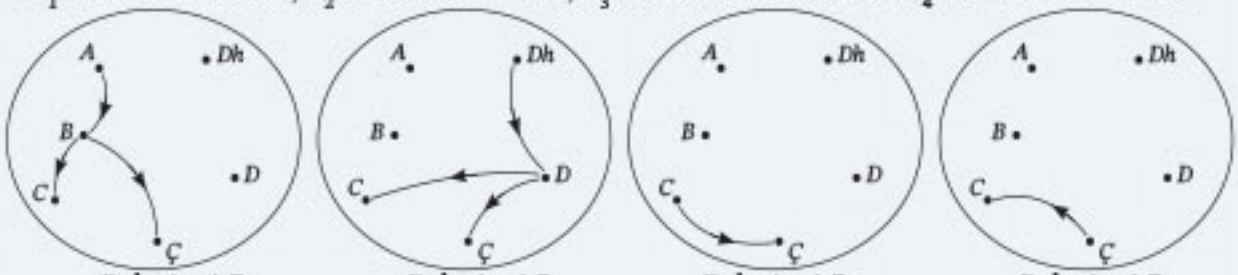
6. Ana çdo ditë pune nga java e kaluar ka ushtruar për t'u përgatitur për një garë sportive. Ajo ka shënuar sa minuta ushtron dhe sa kalori harxhon për çdo ditë. Të dhënat nga ushtrimi i saj javor janë paraqitur në tabelë:

dita e javës	koha e ushtrimit (min)	kaloritë (kcal)
e hënë	20	100
e martë	30	150
e mërkurë	25	125
e enjte	40	200
e premte	35	175

Shpjegoni relacionin midis kohës së ushtrimit dhe kalorive të harxhuara.
Paraqitni relacionin e përcaktua$R$: a) me graf, b) në mënyrë tabelare.

Hulumtim

Në bashkësinë $C = \{A, B, C, Ç, D, Dh\}$ të anëtarëve të një familjeje janë dhënë relacionet:
R_1"... është babai i ...", R_2"... është nëna e ...", R_3"... është vëllai i ..." dhe R_4"... është motra e ...".



Relacioni R_1 Relacioni R_2 Relacioni R_3 Relacioni R_4

Vizatimi 8

Duke përdorur grafet e tyre, të paraqitur në vizatimin 8, zbuloni përbërjen dhe lidhjet farefisnore midis anëtarëve të familjes.

2. VETITË E RELACIONEVE

Përmes shembujve nga matematika, por edhe nga përditshmëria, do të zbuloni pse janë të rëndësishme vetitë e relacioneve dhe si do t'ju ndihmojnë të përshkruani marrëdhëniet midis elementeve në një bashkësi në mënyrë të saktë dhe logjike.

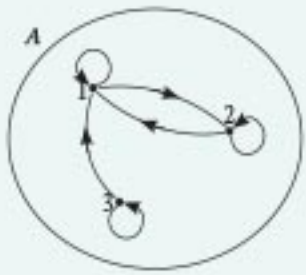
Për relacionin R në bashkësinë A themi se është **refleksiv** nëse dhe vetëm nëse $(x, x) \in R$, për secilin $x \in A$, pra

$$x \, R \, x, \text{ për secilin } x \in A.$$

Shembulli 1

Në bashkësinë $A = \{1, 2, 3\}$ është dhënë relacioni
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$.
Shqyrtoni nëse relacioni R është refleksiv.

Relacioni është refleksiv, sepse çiftet e renditura $(1, 1)$, $(2, 2)$ dhe $(3, 3)$ i përkasin R, pra
$1 \, R \, 1$, $2 \, R \, 2$ dhe $3 \, R \, 3$ që do të thotë se kushti
$x \, R \, x$, për çdo $x \in A$ është plotësuar.
Tek i njëjti përfundim mund të arrijmë nëse shqyrtojmë grafin e relacionit të paraqitur në vizatimin 1.
Nga secili element x del një shigjetë, e cila përfundon tek po i njëjti element, të cilën e quajmë **lak**.



Vizatimi 1

Për relacionin R në bashkësinë A themi se është **simetrik** nëse dhe vetëm nëse $(x, y) \in R$ sjell $(y, x) \in R$, për çdo $x, y \in A$, pra

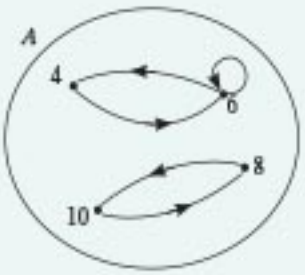
$$x \, R \, y, \text{ sjell } y \, R \, x, \text{ për çdo } x, y \in A.$$

Shembulli 2

Në bashkësinë $A = \{4, 6, 8, 10\}$ është dhënë relacioni
$R = \{(4, 6), (6, 6), (6, 4), (8, 10), (10, 8)\}$.
Shqyrtoni nëse relacioni R është simetrik.

Për çiftin $(6, 6)$ nga R edhe çifti $(6, 6)$ i përket R,
për çiftin $(4, 6)$ nga R edhe çifti $(6, 4)$ i përket R,
për çiftin $(6, 4)$ nga R edhe çifti $(4, 6)$ i përket R,
për çiftin $(8, 10)$ nga R edhe çifti $(10, 8)$ i përket R,
për çiftin $(10, 8)$ edhe çifti $(8,10)$ i përket R,
që do të thotë se kushti $x \, R \, y$, sjell $y \, R \, x$, për secilët $x, y \in A$ është plotësuar.

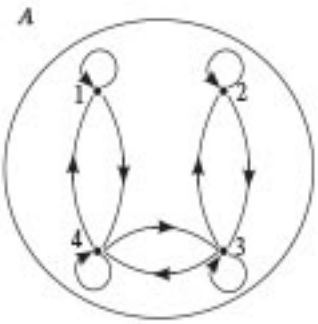
Prandaj, relacioni R është simetrik.
Në të njëjtin përfundim mund të arrijmë nëse shqyrtojmë grafin e relacionit R të paraqitur në vizatimin 2.
Vërejmë se nëse nga elementi x ka shigjetë deri te elementi y, atëherë edhe nga elementi y ka shigjetë deri te elementi x, pra grafi i relacionit R ka vetëm **lidhje të dyfishta**.
Në atë rast, edhe lakun e konsiderojmë si lidhje të dyfishtë.



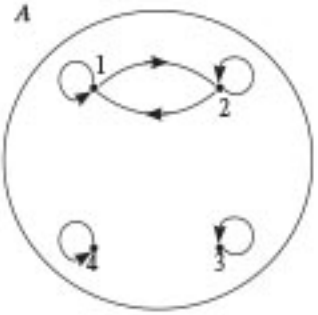
Vizatimi 2

Detyra 1

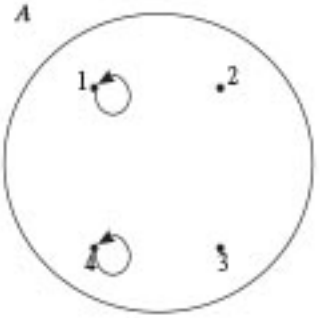
Relacionet R_1, R_2 dhe R_3 në bashkësinë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ janë paraqitur me grafët e tyre në vizatimin 3. Cilët prej tyre janë refleksivë, e cilët janë simetrikë? Arsyetoni përgjigjen.



Relacioni R_1



Relacioni R_2



Relacioni R_3

Vizatimi 3

Detyra 2

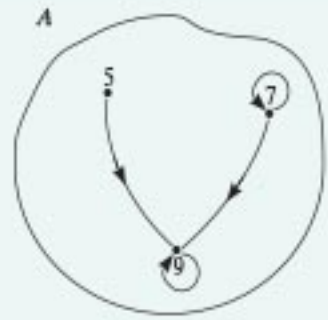
Marko, Sonja dhe Erolli jetojnë në të njëjtën ndërtesë. Marko jeton në katin e katërt, Sonja jeton në katin e pestë, kurse Erolli jeton në katin e katërt. Midis nxënësve, sipas katit ku jetojnë, është përcaktuar relacioni R: "... jeton në të njëjtin kat me ..."
a) Paraqite relacionin në mënyrë tabelare dhe me graf.
b) A është relacioni R refleksiv dhe simetrik? Arsyetoni përgjigjen tuaj.

Për relacionin R në bashkësinë A themi se është **antisimetrik** nëse dhe vetëm nëse
$(x, y) \in R$ dhe $(y, x) \in R$, sjell $x = y$, për çdo $x, y \in A$, pra
$x\,R\,y$ dhe $y\,R\,x$ sjell $x = y$, për çdo $x, y \in A$.

Shembulli 3

Në bashkësinë $A = \{5, 7, 9\}$ është dhënë relacioni $R = \{(5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$.
Shqyrtoni nëse relacioni R është antisimetrik.

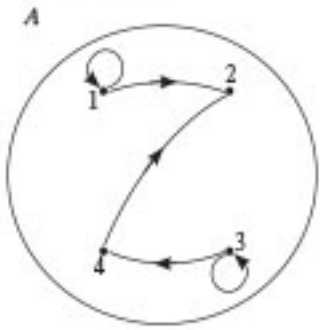
Për çiftin (5, 9) nga R, çifti (9, 5) nuk i përket R,
dhe për çiftin (7, 9) nga R, çifti (9, 7) nuk i përket R.
Prandaj, nëse $x\,R\,y$ dhe $y\,R\,x$ atëherë $x = y$,
për çdo $x, y \in A$, pra relacioni është antisimetrik.
Në të njëjtin përfundim mund të arrijmë nëse
shqyrtojmë grafin e relacionit R të paraqitur në
vizatimin 4. Vërejmë se nëse nga elementi x ka shigjetë
deri te elementi y, $x \neq y$, atëherë nuk ka shigjetë nga
elementi y deri te elementi x, pra grafi i relacionit R
nuk ka asnjë lidhje të dyfishtë, përveç ndoshta laqeve.



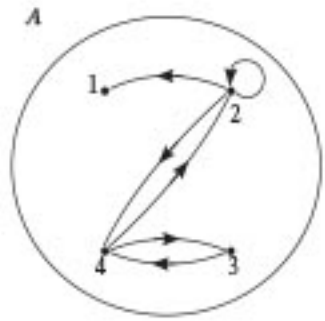
Vizatimi 4

Detyra 3

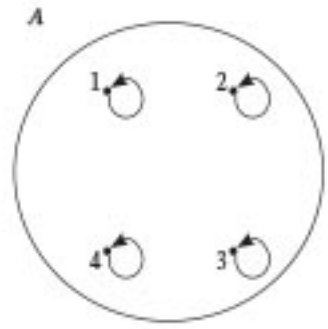
Relacionet R_1, R_2 dhe R_3 në bashkësinë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ janë paraqitur me grafët e tyre në vizatimin 5. Cilët nga relacionet janë refleksivë, e cilët janë antisimetrikë?
Arsyetoni përgjigjen.



Relacioni R_1



Relacioni R_2



Relacioni R_3

Vizatimi 5

Detyra 4

Filipi, Ivani dhe Lidija shkojnë në të njëjtën shkollë. Dihet se Filipi është 14 vjeç, Ivani është 12 vjeç, kurse Lidija është 7 vjeçe. Midis nxënësve, sipas moshës së tyre, është përcaktuar relacioni R: "... është më i madh se ...".

a) Paraqite relacionin në mënyrë tabelare dhe me graf.

b) A është relacioni R antisimetrik? Arsyetoni përgjigjen tuaj.

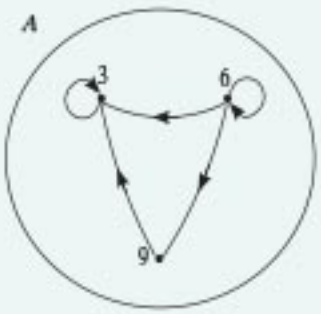
Për relacionin R në bashkësinë A themi se është **transitiv** nëse dhe vetëm nëse $(x, y) \in R$ dhe $(y, z) \in R$ sjell $(x, z) \in R$, për çdo $x, y, z \in A$, pra

$x\,R\,y$ dhe $y\,R\,z$ sjell $x\,R\,z$, për çdo $x, y, z \in A$.

Shembulli 4

BNë bashkësinë $A = \{3, 6, 9\}$ është dhënë relacioni $R = \{(3, 3), (6, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3)\}$. Shqyrtoni nëse relacioni është transitiv.

Le t'i shqyrtojmë të gjitha rastet e mundshme:
për çiftet (3, 3) dhe (3, 3) nga R edhe çifti (3, 3) i përket R;
për çiftet (6, 6) dhe (6, 6) nga R edhe çifti (6, 6) i përket R;
për çiftet (6, 6) dhe (6, 3) nga R edhe çifti (6, 3) i përket R;
për çiftet (6, 6) dhe (6, 9) nga R edhe çifti (6, 9) i përket R;
për çiftet (6, 3) dhe (3, 3) nga R edhe çifti (6, 3) i përket R;
për çiftet (6, 9) dhe (9, 3) nga R edhe çifti (6, 3) i përket R;
për çiftet (9, 3) dhe (3, 3) nga R edhe çifti (9, 3) i përket R.
Vërejmë se është plotësuar kushti që nëse $x\,R\,y$ dhe $y\,R\,z$, atëherë $x\,R\,z$, për çdo $x, y, z \in A$.



Vizatimi 6

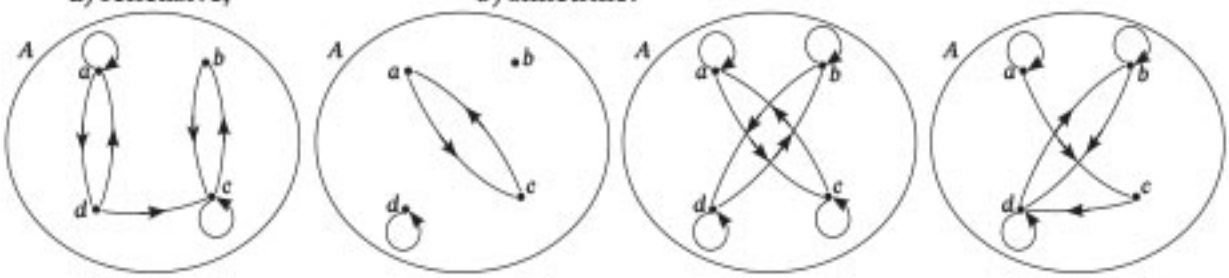
Në të njëjtin përfundim mund të arrijmë nëse shqyrtojmë grafin e relacionit R të paraqitur në vizatimin 6. Vërejmë se nëse nga elementi x ka shigjetë deri te elementi y, dhe nga elementi y ka shigjetë deri te elementi z, atëherë ka shigjetë nga elementi x deri te elementi z (në shqyrtim përfshihen edhe laqet).

Detyra 5

Në oborrin e shkollës, nxënësit Ana, Besiri, Vera dhe Gorani rreshtohen në një rresht për ushtrimin sportiv. Mësuesi dëshiron t'i rreshtojë nxënësit sipas gjatësisë. Ana është e gjatë 150 cm, Besiri është i gjatë 155 cm, Vera është e gjatë 150 cm dhe Gorani është i gjatë 160 cm. Mësuesi përdor relacionin R: "... është më i gjatë ose po aq i gjatë sa ..."
a) Paraqitni relacionin në mënyrë tabelare dhe me graf.
b) Përcaktoni nëse relacioni është refleksiv, simetrik, antisimetrik dhe transitiv.

DETYRA PËR USHTRIME

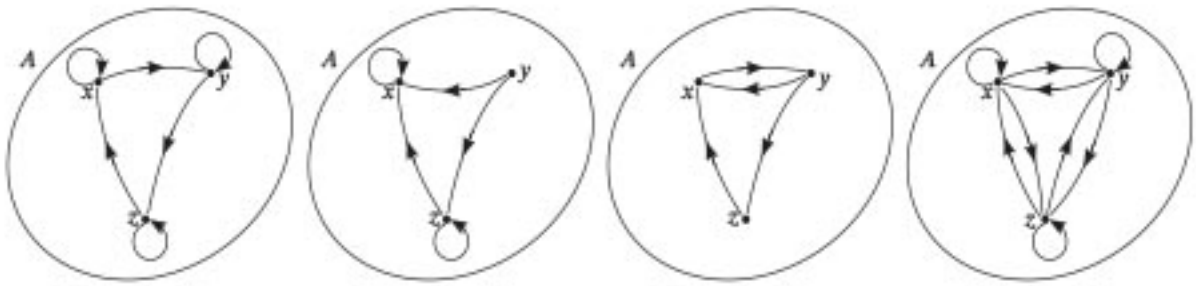
1. Cilët nga relacionet R_1, R_2, R_3 dhe R_4 në bashkësinë $A = \{a, b, c, d\}$ në vizatimin 7 janë:
   a) refleksivë, b) simetrikë?



Relacioni R_1 Relacioni R_2 Relacioni R_3 Relacioni R_4

Vizatimi 7

2. Cilët nga relacionet R_1, R_2, R_3 dhe R_4 në bashkësinë $S = \{x, y, z\}$ në vizatimin 8 janë:
   a) antisimetrikë, b) transitivë?



Relacioni R_1 Relacioni R_2 Relacioni R_3 Relacioni R_4

Vizatimi 8

3. Në bashkësinë $x = \{a, b, c, d\}$ janë dhënë relacionet R_1, R_2, R_3 dhe R_4 të tilla që:
$R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, c)\}$, $R_2 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (d, c)\}$,
$R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)\}$ dhe $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, b), (d, d)\}$.
Cilët nga relacionet e dhënë janë transitivë?

4. Në bashkësinë $T = \{1, 2, 3, 5\}$ janë dhënë relacionet: R_1: "... është më i vogël se ...",
R_2: "... nuk është më i vogël se...", $R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in T, x + y$ është numër çift$\}$ dhe
$R_4 = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 5), (1, 5), (5, 1)\}$.
Paraqitni secilin relacion me graf dhe shqyrtoni vetitë: refleksivitetin, simetrinë, antisimetrinë dhe transitivitetin.

5. Dejani është 19 vjeç, Simona është 16 vjeç, kurse Gorani është 18 vjeç.
Në bashkësinë $A = \{$Dejani, Simona, Gorani$\}$ është dhënë relacioni R:"... është më i ri se ...".
a) Paraqitni relacionin R me graf.
b) A është relacioni transitiv? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

6. Nxënësit Elena, Igor, Marko dhe Ilir interpretuan nga një kompozim muzikor.
Profesori dëshiron të vendosë një relacion midis nxënësve sipas tempit (goditjeve në minutë) të kompozimit të interpretuar. Tempi i kompozimit të Elenës ishte 60 goditje në minutë, i Igorit ishte 100 goditje në minutë, i Markos ishte 60 goditje në minutë, kurse i Ilirit 120 goditje në minutë.
a) Paraqitni me graf relacionin R: "... interpretoi kompozim me temp të njëjtë ose më të ngadaltë se tempi i kompozimit të...".
b) Shqyrtoni vetitë e relacionit: refleksivitetin, simetrinë, antisimetrinë dhe transitivitetin.

7. Në bashkësinë $D = \{$Gjermania, Franca, Spanja, Italia, Belgjika, Zvicra$\}$ është përcaktuar relacioni R: "... ka kufi të përbashkët tokësor me ...".
a) Paraqitni relacionin R me graf.
b) A është relacioni refleksiv, simetrik apo transitiv? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
Udhëzim: Përdorni një hartë gjeografike ose internetin për të përcaktuar se cilat shtete kanë kufij të përbashkët tokësorë.

Hulumtim

Shkruajeni në mënyrë tabelare bashkësinë e anëtarëve të familjes suaj. Më pas, shkruani në mënyrë tabelare relacionet:
R_1: "... është më i/e moshuar se ..." dhe R_2: "... nuk është më i/e ri se ...".
a) Shqyrtoni vetitë e relacioneve R_1 dhe R_2.
b) Gjeni se nga cila veti ndryshojnë relacionet R_1 dhe R_2?

3. RELACIONI I EKUIVALENCËS DHE RELACIONI I RENDITJES

Aktivitet

Në bashkësinë L = {35, 25, 38, 75, 573, 735, 921} është dhënë relacioni
R: "... ka të njëjtën shifër të dhjetësheve me ...".
a) Paraqitni relacionin me graf. b) Shqyrtojini vetitë e relacionit.

Për relacionin R në bashkësinë A themi se është **relacion ekuivalence** nëse është refleksiv, simetrik dhe transitiv.

Relacioni i ekuivalencës vë në lidhje elementet që konsiderohen të barabartë sipas ndonjë vetie.

Shembulli 1

Mësuesja e gjuhës amtare u jep nxënësve detyrë të grupojnë fjalë të ndryshme me të njëjtin kuptim, pra sinonime. Për shembull, fjalët "i lumtur", "i gëzuar" dhe "i hareshëm" janë sinonime. A është përcaktuar në këtë mënyrë një relacion ekuivalence në bashkësinë e fjalëve të gjuhës amtare?

Po, sepse ky relacion është:

- refleksiv, sepse çdo fjalë është sinonim i vetes;
- simetrik, sepse, për shembull, nëse "i lumtur" është sinonim i "i gëzuar", atëherë edhe "i gëzuar" është sinonim i "i lumtur";

- transitiv, sepse, për shembull, nëse "i lumtur" është sinonim i "i gëzuar", dhe "i gëzuar" është sinonim i "i hareshëm", atëherë edhe "i lumtur" është sinonim i "i hareshëm".

Pra, sinonimet sipas kuptimit të tyre përcaktojnë një relacion ekuivalence.

Detyra 1

Në bashkësinë S të të gjithë automjeteve në një parking shqyrtojmë relacionin *R*: "... ka të njëjtën ngjyrë me ...". Shqyrto nëse *R* është relacion ekuivalence në bashkësinë S.

Aktivitet

Në bashkësinë L = {1, 2, 3, 5} është dhënë relacioni *R*: "... nuk është më i vogël se ...".
a) Paraqitni relacionin me graf. b) Shqyrtoni vetitë e relacionit.

Për relacionin *R* në bashkësinë *A* themi se është **relacion renditjeje**, nëse është refleksiv, antisimetrik dhe transitiv.

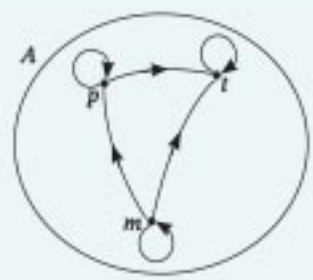
Relacioni i renditjes vendos një rend midis elementeve të bashkësisë sipas një vetie të caktuar (madhësisë, gjatësisë, sasisë etj.).

Shembulli 2

Në bashkësinë *A* = {p, m, t} është dhënë relacioni *R*: "... nuk është në alfabetin anglez pas ...".
a) Paraqitni relacionin *R* me graf.

b) Shqyrtoni nëse *R* është relacion ekuivalence apo relacion renditjeje.

a) Grafi i relacionit *R* është paraqitur në vizatimin 1.



b) Relacioni *R* ka vetitë në vijim:

- refleksiv: p nuk është në alfabetin anglez pas p, që do të thotë (p, p) ∈ *R*; m nuk është në alfabetin anglez pas m, që do të thotë (m, m) ∈ *R*; dhe t nuk është në alfabetin anglez pas t, që do të thotë (t, t) ∈ *R*.

- antisimetrik: m nuk është në alfabetin anglez pas p, rrjedhimisht nuk është e saktë se p nuk është në alfabetin anglez pas m, që do të thotë (m, p) ∈ *R*, por (p, m) ∉ *R*;

p nuk është në alfabetin anglez pas t, rrjedhimisht nuk është e saktë se t nuk është në alfabetin anglez pas p, që do të thotë $(p, t) \in R$, por $(t, p) \notin R$; dhe
m nuk është në alfabetin anglez pas t, rrjedhimisht nuk është e saktë se t nuk është në alfabetin anglez pas m, që do të thotë $(m, t) \in R$, por $(t, m) \notin R$.

- transitiv: m nuk është në alfabetin anglez pas p, dhe p nuk është në alfabetin anglez pas t, por edhe m nuk është në alfabetin anglez pas t, që do të thotë $(m, p) \in R$ dhe $(p, t) \in R$ sjell $(m, t) \in R$.

Shembulli 3

Në një kontroll sistematik është vërtetuar se Petari është 160 cm i lartë, Nina është 170 cm e lartë dhe Izeti është 180 cm i lartë. Në bashkësinë e nxënësve është dhënë relacioni R: "... ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se...". A është përcaktuar në këtë mënyrë një relacion renditjeje në bashkësinë e nxënësve?

Nxënësit Petari, Nina dhe Izeti kanë lartësi të ndryshme.
Relacioni R është refleksiv, sepse secili nxënës ka të njëjtën lartësi me lartësinë e vet.
Relacioni R është antisimetrik, sepse: Petari ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Nina, por Nina nuk ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Petari; Petari ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Izeti, por Izeti nuk ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Petari; Nina ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Izeti, por Izeti nuk ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se Nina.
Relacioni R është transitiv, sepse nëse një nxënës ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se një nxënës tjetër, dhe tjetri ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se një nxënës i tretë, atëherë edhe nxënësi i parë ka lartësi të njëjtë ose më të vogël se nxënësi i tretë.
Pra, R është relacion renditjeje.

Shënim: Nëse në një bashkësi të caktuar nxënësish, dy nxënës kanë të njëjtën lartësi, atëherë relacioni i përcaktuar në këtë mënyrë nuk do të jetë antisimetrik. Pse?

Detyra 2

Në bashkësinë $A = \{3, 5, 7\}$ janë dhënë relacionet: $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ dhe } x = y\}$ dhe $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ dhe } x \leq y\}$. Paraqitni relacionet: a) në mënyrë tabelare, b) me graf. A është ndonjë nga relacionet relacion ekuivalence apo relacion renditjeje?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në bashkësinë $B = \{22, 28, 35, 43, 82\}$ është dhënë relacioni R: "... ka të njëjtën shifër të njësheve me ...".
   a) Paraqitni relacionin R me graf.
   b) Shqyrtoni nëse R është relacion ekuivalence apo relacion renditjeje.
2. Në bashkësinë $K = \{a, b\}$ është dhënë relacioni $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. A është R relacion ekuivalence apo relacion renditjeje?

3. Në bashkësinë $M = \{3, 5, 7, 9\}$ është dhënë relacioni R: "... është më i madh ose i barabartë me ...".
   a) Paraqitni relacionin R me graf.
   b) Shqyrtoni nëse R është relacion ekuivalence apo relacion renditjeje.

4. Në bashkësinë e shprehjeve numerike
   $C = \{18 - 2 \cdot 3, 30 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 5 - 8, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4, (5 - 2) \cdot 4\}$ është dhënë relacioni R: "... ka të njëjtën vlerë me ...".
   a) Paraqitni relacionin R me graf.
   b) Shqyrtoni nëse R është relacion ekuivalence apo relacion renditjeje.

5. A janë relacionet: R_1: "... nuk është më i lartë se ...", R_2: "... nuk është më i moshuar se ..." dhe R_3: "... nuk peshon më shumë se ...", të përcaktuara në bashkësinë e nxënësve në një shkollë,relacione renditjeje? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

6. Në orët e historisë, nxënësit morën të dhëna se: pushtimi i Kostandinopojës nga osmanët ndodhi në vitin 1453, zbulimi i Amerikës nga Kolombo ndodhi në vitin 1492, Revolucioni Francez ndodhi në vitin 1789, dhe nënshkrimi i Kartës së të Drejtave të Njeriut ndodhi në vitin 1948.
   a) Vendosni një relacion R midis këtyre ngjarjeve, sipas kohës kur ndodhën?
   b) A është R relacion renditjeje?

Hulumtim

Me ndihmën e informacioneve në internet gjeni të dhëna për kohën e dekompozimit në natyrë të mbeturinave nga: letra, qese plastike, kanaçja e aluminit dhe lëvozhga e mollës. Renditni mbeturinat sipas kohës së dekompozimit.

A mund të vendoset një relacion renditjeje midis mbeturinave? Arsyetoni përgjigjen.

4. RELACIONET NË PRAKTIKË

Aktivitet

Nxënësit Ana, Borisi, Dragani dhe Emina luajnë futboll, basketboll ose volejboll. Dihet se Ana dhe Dragani luajnë volejboll, Borisi luan futboll dhe basketboll, kurse Emina luan basketboll.

a) Paraqitni relacionin R: "... luan të njëjtin sport me ...", midis nxënësve në mënyrë tabelare, në mënyrë përshkruese dhe me graf.
b) A është R relacion ekuivalence? Pse?

Shembulli 1

Në një bibliotekë nxënësit shkëmbejnë libra për lexim si në figurën 1.

a) Paraqitni relacionin R_1: "... i ka dhënë hua libër ..." midis nxënësve me graf.

b) Shqyrtoni nëse relacioni është refleksiv, simetrik dhe transitiv.

c) Paraqitni relacionin R_2: "... mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga ..." midis nxënësve me graf (për shembull, nëse Ana i ka dhënë hua libër Elenës, dhe Elena Markos, atëherë Marko mund të marrë libër nga Ana me zinxhirin e huazimeve Ana → Elena → Marko). A është R_2 relacion ekuivalence?

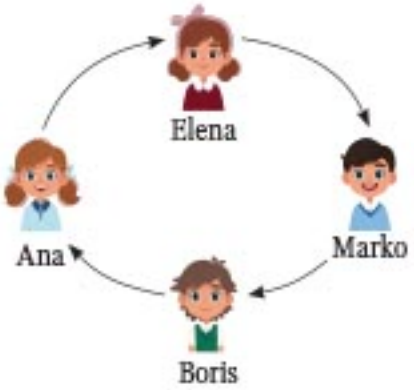
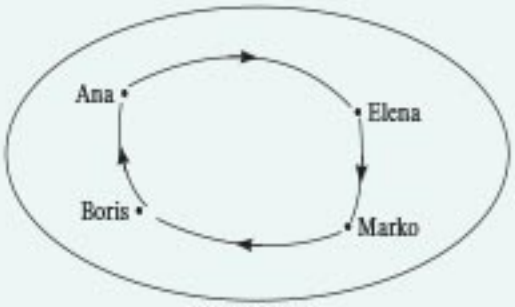


Figura 1

a) $R_1 = \{(\text{Ana}, \text{Elena}), (\text{Elena}, \text{Marko}), (\text{Marko}, \text{Boris}), (\text{Boris}, \text{Ana})\}$.
Parqitja e relacionit R_1 me graf është dhënë në vizatimin 1.



Vizatimi 1

b) Relacioni R_1:
- nuk është refleksiv sepse, për shembull, Ana nuk mund t'i japë hua libër vetes,
- nuk është simetrik, sepse, për shembull, Ana i ka dhënë hua libër Elenës, por Elena nuk i ka dhënë hua libër Anës,
- nuk është transitiv, sepse, për shembull, Ana i ka dhënë hua libër Elenës, Elena i ka dhënë hua libër Markos, por Ana nuk i ka dhënë hua libër Markos.

c) Sipas relacionit R_2:

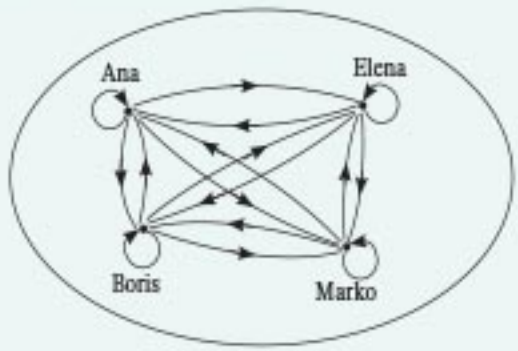
Ana mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga:
Ana (Ana → Elena → Marko → Boris → Ana),
Elena (Elena → Marko → Boris → Ana),
Marko (Marko → Boris → Ana), Boris (Boris → Ana).

Elena mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga:
Elena (Elena → Marko → Boris → Ana → Elena),
Marko (Marko → Boris → Ana → Elena),
Boris (Boris → Ana → Elena), Ana (Ana → Elena).

Marko mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga:
Marko (Marko → Boris → Ana → Elena → Marko),
Boris (Boris → Ana → Elena → Marko),
Ana (Ana → Elena → Marko), Elena (Elena → Marko).

Boris mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga:
Boris (Boris → Ana → Elena → Marko → Boris),
Ana (Ana → Elena → Marko → Boris),
Elena (Elena → Marko → Boris), Marko (Marko → Boris).

Grafi i relacionit R_2 është paraqitur në vizatimin 2.



Vizatimi 2

Relacioni R_2 është:

- refleksiv, sepse secili nxënës mund të marrë libër përmes një zinxhiri prej katërhuazimesh, i cili fillon nga ai. Për shembull,
  Ana → Elena → Marko → Boris → Ana;
- simetrik, sepse nëse një nxënës mund të marrë libër nga një nxënës tjetër përmes një zinxhiri huazimesh, atëherë edhe nxënësi tjetër mund të marrë libër nga nxënësi i parë përmes një zinxhiri huazimesh. Për shembull, nëse Elena mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga Boris, pra Boris → Ana → Elena, atëherë Boris mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga Elena, pra Elena → Marko → Boris.
- transitiv, sepse nëse njëri mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga një nxënës tjetër, dhe nxënësi tjetër mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga një nxënës i tretë, atëherë nxënësi i parë mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga nxënësi i tretë. Për shembull, nëse Marko mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga Ana (Ana → Elena → Marko), dhe Ana mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga Boris, (Boris → Ana), atëherë Marko mund të marrë libër përmes një zinxhiri huazimesh nga Boris (Boris → Ana → Elena → Marko).

Prandaj, R_2 është relacion ekuivalence.

Detyra 1

Në shkollë organizohet një koncert i madh, dhe nxënësit i japin njëri-tjetrit detyra për përgatitjen e skenografisë, muzikës, ndriçimit dhe promovimit. Dihet se:
Ana udhëheq grupin për skenografi dhe u jep detyra Borisit dhe Elenës;
Borisi udhëheq grupin për muzikë dhe u jep detyra Markos dhe Ninës;
Marko udhëheq grupin për ndriçim dhe u jep detyra Petros dhe Damjanit;
Elena udhëheq grupin për promovim dhe u jep detyra Anës dhe Ninës.

a) Paraqitni relacionin R_1: "... i jep detyrë ...", midis nxënësve në mënyrë tabelare dhe me graf.
b) Shqyrtoni nëse relacioni R_1 është refleksiv, simetrik dhe transitiv.
c) Shqyrtoni nëse relacioni R_2: "... merr detyrë përmes një zinxhiri detyrash nga ...", është refleksiv, simetrik dhe transitiv?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Marko ka ujë, sheqer dhe kripë, dhe dëshiron të bëjë një tretësirë për ujitjen e bimëve. Ai e tret sheqerin në ujë, dhe më pas shton kripën.
   a) Paraqitni relacionin R: "... tretet para ...", midis substancave në mënyrë tabelare dhe me graf.
   b) Shqyrtoni nëse relacioni R është transitiv dhe antisimetrik.

2. Në laborator, nxënësi ngroh ujin në tre gota:
   gota A: nga 20°C në 50°C, gota B: nga 30°C në 60°C dhe gota C: nga 40°C në 80°C.
   a) Paraqitni relacionin R: "... ka temperaturë fillestare më të lartë se ...", midis gotave në mënyrë tabelare.
   b) A është relacioni R refleksiv, simetrik dhe transitiv? Arsyetoni përgjigjen.

3. Dihet se mali Vodno është i lartë 1011 m, mali Bistra është i lartë 2621 m dhe mali Korab është i lartë 2764 m.
   a) Paraqitni relacionin R: "... është më i lartë se ...", midis maleve në mënyrë tabelare dhe me graf.
   b) A është R relacion renditjeje? Arsyetoni përgjigjen.

4. Në kabinetin e informatikës, nxënësit Zamira, Elena, Marko dhe Boris shkëmbejnë skedarë. Dihet se Zamira i dërgon skedar Elenës; Elena i dërgon skedar Markos; Marko i dërgon skedar Borisit.
   a) Paraqitni relacionin R: "... dërgon skedar te ...", midis nxënësve në mënyrë tabelare dhe me graf.
   b) A është R relacion ekuivalence?

5. Në projektin shkollor për burime të rinovueshme, grupet vendosin gjeneratorë të vegjël ashtu që: paneli diellor ia jep energjinë baterisë, bateria ia jep energjinë motorit, dhe motori ia jep energjinë ventilatorit.
   a) Paraqitni relacionin R_1: "... transferon energji te ...", midis gjeneratorëve të vegjël në mënyrë tabelare dhe me graf.
   b) Përcakto një relacion të ri R_2: "... mund të ndikojë përmes një zinxhiri transferimesh te ...", dhe shqyrtoni nëse ai është relacion ekuivalence.

6. **Detyrë projektuese**
   Me zbatimin e relacioneve përmes projektit "Relacionet në qytetin tim" do të njiheni më nga afër me gjendjen në qytetin në të cilin jetoni dhe do të jeni në gjendje të gjeni mënyra për përmirësimin e tyre. Për qytetin në të cilin jetoni, përcaktoni bashkësitë e: shkollave, ëmbëltoreve, shitoreve të sanduiçeve, marketeve, depove, ndalesave të autobusit, parqeve dhe muzeve. Zgjedhni bashkësitë e përmendura me më së shumti 5 elemente.

a) Përcaktoni një relacion në bashkësinë e:
- shkollave, sipas numrit të nxënësve;
- shkollave, sipas shkallës së arsimit;
- ëmbëltoreve, sipas numrit të llojeve të ëmbëlsirave në ofertë;
- shitoreve të sanduiçeve, sipas numrit të llojeve të sanduiçëve në ofertë;
- marketeve, sipas çmimit të një lloji mielli që shitet;
- marketeve, sipas numrit të produkteve që gjenden në aksion;
- depove, sipas kapacitetit të hapësirës së magazinimit;
- ndalesave të autobusit, sipas asaj nëse ka linjë direkte midis tyre;
- parqeve, sipas sipërfaqes;
- muzeve, sipas numrit të eksponateve.

b) Paraqitini relacionet me graf dhe përcaktoni vetitë e tyre. Cilët nga relacionet janë relacione ekuivalence, e cilët janë relacione renditjeje?

c) Shpjegoni se si vetitë e relacioneve të përcaktuara ndikojnë në jetën dhe dinamikën në qytet.

ç) Duke shtuar ndikime të reja indirekte, përcaktoni relacione të reja dhe paraqitini ato me graf. Shpjegoni cilat aspekte të jetës së qytetit do të përmirësoheshin.

5. NUMRAT RACIONALË

Numrat racionalë pozitivë dhe negativë

Aktivitet

Selma dëshiron të blejë një set prej 5 stilolapsash që kushton 22 denarë.

a) Sa është çmimi i një stilolapsi?

b) *A* ekziston një numër natyror me të cilin mund ta shkruajmë çmimin e një stilolapsi?

c) *A* ekziston një numër i plotë me të cilin mund ta shkruajmë çmimin e një stilolapsi?

ç) Si mund ta shkruani çmimin e një stilolapsi?

Në bashkësinë e numrave natyrorë $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ veprimet e zbritjes dhe pjesëtimit nuk janë gjithmonë të realizueshme. Për shembull, nuk ekziston numër natyror i barabartë me ndryshimin $3 - 5$.

Me futjen e numrave negativë dhe zeros, bashkësinë e numrave natyrorë e zgjeruam deri në bashkësinë e numrave të plotë $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ në të cilën veprimi i zbritjes është gjithmonë i realizueshëm.

Megjithatë, veprimi i pjesëtimit edhe më tej mbetet jo gjithmonë i realizueshëm në bashkësinë e numrave natyrorë. Për shembull, nuk ekziston numër natyror i barabartë me herësin 3 : 4.
Për të tejkaluar problemin me pjesëtimin në bashkësinë e numrave natyrorë, e zgjeruam atë me numra të rinj – thyesat.

Në këtë kuptim, për shembull, pranojmë se herësi 3 : 4 është i barabartë me thyesën $\frac{3}{4}$ dhe se $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\dots$
Në bashkësinë e re të thyesave përfshihen edhe numrat natyrorë, sepse çdo numër natyror mund të shkruhet në formë thyese me emërues 1.

Për shembull, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

Çdo numër i shkruar si thyesë $\frac{a}{b}$, ku a, $b \in \mathbb{N}$, quhet **numër racional pozitiv**.

Bashkësinë e të gjithë numrave racionalë pozitivë e shënojmë me $\mathbb{Q}^+$.
Shkruajmë: $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Për shembull, numrat $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{7}{6}$ dhe $\frac{11}{5}$ janë numra racionalë pozitivë.

Detyra 1

Cilët nga pohimet e mëposhtëm janë të saktë: a) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$, c) $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Q}^+$, ç) $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Q}^+$?

Veprimi i pjesëtimit nuk është gjithmonë i realizueshëm as në bashkësinë e numrave të plotë.
Për shembull, nuk ekziston numër i plotë i barabartë me herësin 3 : (−4).
Për të tejkaluar problemin me pjesëtimin në bashkësinë e numrave të plotë, duhet ta zgjerojmë atë me numra të rinj.
Për këtë qëllim do të pranojmë se, për shembull, vlen

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)}=\frac{2}{-3},$$

që do të thotë se thyesat $\frac{-2}{3}$ dhe $\frac{2}{-3}$ paraqesin të njëjtin numër që do ta shënojmë me $-\frac{2}{3}$, pra vlen

$$-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}.$$

Kjo do të thotë se, për shembull, përveç thyesës $\frac{2}{3}$ duhet ta shqyrtojmë edhe thyesën $-\frac{2}{3}$.
Në bashkësinë e re të thyesave përfshihen edhe numrat e plotë negativë, sepse secili prej tyre mund të shkruhet në formë thyese me emërues 1.
Për shembull, $-1=\frac{-1}{1}$, $-2=\frac{-2}{1}$, $-3=\frac{-3}{1}$, ...

Çdo numër i shkruar në formë thyese $-\frac{a}{b}$, ku a, $B \in \mathbb{N}$, quhet **numër racional negativ.**

Bashkësinë e të gjithë numrave racionalë negativë e shënojmë me $\mathbb{Q}^-$.

Shkruajmë: $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Për shembull, numrat $-\frac{3}{4}, -4, -\frac{5}{3}, -\frac{17}{19}$ janë numra racionalë negativë.

Detyra 2

Cilët nga pohimet e mëposhtëm janë të saktë: a) $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Q}^-$, b) $\mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Q}^-$, c) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^-$?

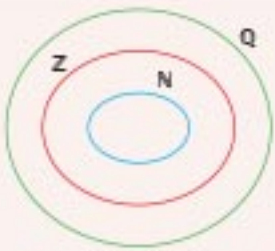
Numrat racionalë

Unioni i të gjithë numrave racionalë pozitivë, të gjithë numrave racionalë negativë dhe numrit zero, quhet **bashkësia e numrave racionalë** dhe shënohet me $\mathbb{Q}$, pra

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$.

Aktivitet

Shqyrtoni diagramin në vizatimin 1 dhe shpjegoni lidhjen midis bashkësisë së numrave natyrorë $\mathbb{N}$, bashkësisë së numrave të plotë $\mathbb{Z}$ dhe bashkësisë së numrave racionalë $\mathbb{Q}$.



Vizatimi 1

Nga barazitë $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, ku a, $B \in \mathbb{N}$, përfundojmë se çdo numër racional mund ta shkruajmë në **formën standarde** $\frac{a}{b}$, ku $A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{N}$.

Prandaj, bashkësinë e numrave racionalë mund ta shkruajmë në formën:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$.

Shembulli 1

Në tabelë janë dhënë vlerat e temperaturave të matura në Shkup gjatë një dite:

koha	10 h në mëngjes	12 h në mesditë	3 h pasdite	7 h në mbrëmje	10 h natën
temperatura	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

Sa është ndryshimi i temperaturës për orë në çdo interval kohor?

Në intervalin nga ora 10 h në mëngjes deri në ora 12 h në mesditë, ndryshimi i temperaturës për orë është

$$\frac{14\,^{\circ}\text{C}-11\,^{\circ}\text{C}}{2\,\text{h}}=\frac{3}{2}\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}.$$

Në intervalin nga ora 12 h në mesditë deri në ora 3 h pasdite, ndryshimi i temperaturës për orë është

$$\frac{17\,^{\circ}\text{C}-14\,^{\circ}\text{C}}{3\,\text{h}}=1\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}.$$

Në intervalin nga ora 3 h pasdite deri në ora 7 h në mbrëmje, ndryshimi i temperaturës për orë është

$$\frac{10\,^{\circ}\text{C}-17\,^{\circ}\text{C}}{4\,\text{h}}=\frac{-7}{4}\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}.$$

Në intervalin nga ora 7 h në mbrëmje deri në ora 10 h të natës, ndryshimi i temperaturës për orë është

$$\frac{5\,^{\circ}\text{C}-10\,^{\circ}\text{C}}{3\,\text{h}}=\frac{-5}{3}\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}.$$

Numrat matës të ndryshimit të temperaturës për orë janë numrat racionalë: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{-7}{4}$ dhe $\frac{-5}{3}$. Nga ta, numra racionalë pozitivë janë $\frac{3}{2}$ dhe 1, kurse numra racionalë negativë janë $\frac{-7}{4}$ dhe $\frac{-5}{3}$. Numri 1, gjithashtu, është edhe i plotë edhe natyror.

Shembulli 2

Cilët nga numrat racionalë $-4, \frac{1}{2}, -3, \frac{-1}{3}, 2, \frac{-3}{7}, \frac{5}{6}, 9$, janë:

a) numra racionalë pozitivë, b) numra racionalë negativë,
c) numra të plotë, ç) numra natyrorë?

a) Numra racionalë pozitivë janë $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{6}$ dhe 9.

b) Numra racionalë negativë janë $-4, -3, \frac{-1}{3}$ dhe $\frac{-3}{7}$.

c) Numra të plotë janë $-4, -3$, 2 dhe 9. ç) Numra natyrorë janë 2 dhe 9.

Detyra 3

Është dhënë bashkësia $P=\{-1, 0, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, 8\}$. Shkruani bashkësinë:

a) $M=\{x \mid x\in P \text{ dhe } x\in Z\}$, b) $M=\{x \mid x\in P \text{ dhe } x\in Q^{+}\}$, c) $M=\{x \mid x\in P \text{ dhe } x\in Q^{-}\}$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Me ndihmën e një numri racional shkruani fjalinë:
   a) Mira ka borxh 11 000 denarë, b) Sonja ka 300 rruaza,
   c) sot temperatura është 4 °C nën zero,
   ç) dje temperatura ishte 11 °C mbi zero,
   d) niveli i ujit në Liqenin e Ohrit është 15/2 cm më i ulët se niveli normal i ujit.

2. Cili nga pohimet e mëposhtme është i saktë:
   a) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}^-$, b) $8 \in \mathbb{Z}^-$, c) $-55 \in \mathbb{Q}^+$, ç) $0 \in \mathbb{Q}$, d) $0 \in \mathbb{Z}$?

3. Shkruani bashkësinë:
   a) A e cila përbëhet nga pesë numra racionalë pozitivë,
   b) B e cila përbëhet nga pesë numra racionalë negativë,
   c) C e cila përbëhet nga pesë numra racionalë.

4. Lejla thotë se 5/3 është numër racional, kurse 5 është vetëm numër natyror. Seadi thotë se të dy janë numra racionalë. Kush ka të drejtë?

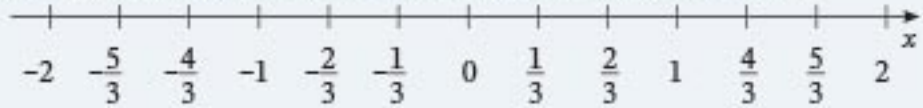
5. Kopjoni dhe plotësoni tabelën sipas shembullit të zgjidhur në rreshtin e parë.

	bashkësia						
numri	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
0							
$-\frac{9}{2}$							
7							
-11							

6. Cilët nga pohimet e mëposhtëm janë të saktë:
   a) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^+$, b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, c) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, ç) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}$,
   d) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing$, dh) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, e) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, ë) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$?

Hulumtim

1. Në vizatimin 2 janë paraqitur disa numra racionalë në boshtin numerik.



Vizatimi 2

a) Rikujtoni rregullën për vendosjen e numrave të plotë në boshtin numerik. Sipas një rregulle të ngjashme i paraqesim edhe numrat racionalë në boshtin numerik.

Mundohuni ta shpjegoni rregullën për paraqitjen e numrave racionalë në boshtin numerik. Cilët numra racionalë janë paraqitur në të djathtë të zeros, e cilët në të majtë të zeros?

b) Vizatoni një bosht numerik dhe zgjidhni 6 numra racionalë, 3 numra racionalë pozitivë dhe 3numra racionalë negativë.

2. a) Rikujtoni rregullën për krahasimin e numrave të plotë me ndihmën e boshtit numerik. Mundohuni ta shpjegoni rregullën për krahasimin e numrave racionalë me ndihmën e boshtit numerik.

b) Rikujtoni se për numrat racionalë pozitivë vlen:

$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$ sepse $2\cdot 5<3\cdot 4$; $\frac{7}{6}>\frac{4}{9}$ sepse $7\cdot 9>4\cdot 6$; $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ sepse $3\cdot 8=6\cdot 4$.

Sipas të njëjtit rregull krahasoni numrat:

$\frac{-2}{3}$ dhe $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{-4}{5}$; $\frac{-4}{5}$ dhe $\frac{-4}{5}$, $\frac{-2}{3}$ dhe $\frac{-4}{6}$.

Më pas verifikoni përgjigjen tuaj me ndihmën e boshtit numerik.

c) Nxirrni një rregull të përgjithshme për krahasimin e numrave racionalë të shkruar në formën standarde.

6. NUMRAT DHJETORË TË PAFUNDËM PERIODIKË

Rikujtoni se çdo thyesë mund të shkruhet si numër dhjetor duke gjetur herësin e numëruesit me emëruesin.

Aktivitet

Shkruani pjesën e ngjyrosur të rrethit:

a) me thyesë, b) me numër dhjetor.



Shembulli 1

Shkruani me numër dhjetor thyesën: a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{3}{4}=0,75$ Kur pjesëtimi përfundon fitojmë një **numër dhjetor të fundëm**.

b) $\frac{1}{3}=0,333...$ Kur pjesëtimi nuk përfundon fitojmë një **numër dhjetor të pafundëm periodik** ose shkurtimisht **numër dhjetor periodik**.

- Numri dhjetor periodok tek i cili menjëherë pas presjes dhjetore ka një varg të fundëm shifrash që përsëriten në të njëjtën renditje quhet **numër dhjetor periodik i pastër.**
- Numri dhjetor periodik tek i cili pas disa dhjetoreve (decimaleve) jozero ka një varg të fundëm shifrash që përsëriten në të njëjtën renditje quhet **numër dhjetor periodik i përzier.**
- Vargu i shifrave që përsëritet quhet **periodë e numrit dhjetor.**

Numra dhjetorë të fundëm janë, për shembull, numrat: 2,65 dhe 36,567834.
Numri 0,3333333333333... = 0,(3) është numër dhjetor periodik i pastër me periodë 3.
Numri 2,3(27) = 2,3272727272727... është numër dhjetor periodik i përzier me periodë 27.

Detyra 1

Shkruaje me numër dhjetor thyesën: a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{11}{37}$.

Cili nga numrat dhjetorë të fituar është numër dhjetor i fundëm, e cili numër dhjetor i pafundëm? Sa është perioda e numrit dhjetor të pafundëm?

Shembulli 2

Shkruani me thyesë numrin dhjetor: a) 0,25; b) 0,(16); c) 2,36(4).

a) Numri 0,25 është numër dhjetor i fundëm. Ai mund të shkruhet në formë thyese dhjetore:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

b) Numri 0,(16) është numër dhjetor periodik i pastër me periodë 16. Ai mund të shkruhet si thyesë me procedurën e mëposhtme:

$0,(16) = x$	Shënojmë thyesën e panjohur me x.
$0,(16) \cdot 100 = x \cdot 100$	Perioda është numër dyshifror, prandaj i
$16,(16) = x \cdot 100$	shumëzojmë të dyja anët me 100.
$16 + 0,(16) = x \cdot 100$	Numrin dhjetor e shkruajmë si shumë të numrit të plotë dhe numrit dhjetor të dhënë
$16 + x = x \cdot 100$	0,(16) e zëvendësojmë me x dhe e zgjidhim barazimin linear sipas të panjohurës x.
$16 = x \cdot 100 - x$	
$16 = x(100 - 1)$	
$x = \frac{16}{100-1} = \frac{16}{99}.$	Zgjidhja është $x = \frac{16}{99}$.

Prandaj, fitojmë se $0,(16) = \frac{16}{99}$.

c) Numri 2,36(4) është numër dhjetor periodik i përzier. Ai mund të shkruhet si thyesë në mënyrën e mëposhtme:

$2{,}36(4) = x$ — Shënojmë thyesën e panjohur me x.

$236{,}(4) = 100 \cdot x$ — Përsëritja fillon pas dhjetores (decimales) së dytë, prandaj i shumëzojmë të dyja anët me 100.

$2364{,}(4) = 1000 \cdot x$ — Ka 3 shifra para fillimit të periodës sënumrit dhjetor prandaj i shumëzojmë të dyja anët e ekuacionit $2{,}36(4) = x$ me 1000.

I zbresim dy ekuacionet.

$2364{,}(4) - 236{,}(4) = 1000 \cdot x - 100 \cdot x$

$2128 = 900 \cdot x$

$x = \frac{2128}{900} = \frac{532}{225} = 2\frac{82}{225}.$

Prandaj, fitojmë se $2{,}36(4) = 2\frac{82}{225}$.

Detyra 2

Shkruaje me thyesë numrin dhjetor: a) 0,75; b) 0,(6); c) 2,1(45).

Detyra 3

Në shtegun e biçikletave "Unaza e Gjelbër", traseja përbëhet nga tre pjesë: pjesa *A* me gjatësi 0,(6) km, pjesa *B* me gjatësi 1,2(3) km dhe pjesa C me gjatësi 2,(45) km.

a) Shkruani gjatësitë si thyesa.

b) Sa është gjatësia e një xhiroje të plotë?

c) Marko bëri 3 xhiro dhe më pas e përshkoi edhe pjesën *A*. Sa kilometra kaloi Marko?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruani me numër dhjetor thyesën: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{9}{20}$, ç) $\frac{77}{390}$, d) $\frac{77}{330}$.

2. Duke përdorur shenjën për periodën e numrit dhjetor shkruani numrin:
   a) 0,3989898..., b) 4,7102102..., c) 0,2540314031..., ç) 243,2526161....

3. Gjeni periodën e numrit dhjetor të shkruar me thyesën: a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{42}{37}$, c) $\frac{118}{123}$.

4. Shkruani numrin dhjetor periodik me thyesë:
   a) 0,(7); b) 3,(21); c) 1,2(34); ç) 4,3(123); d) 5,12(7).

5. Për vendosjen e një tende priten tre litarë me gjatësi 0,(8) m, 2,3(5) m dhe 3,(27) m.
   a) Shprehni gjatësinë e secilit litar si thyesë.
   b) Mitko kishte një litar me gjatësi 10 m. Sa metra litar do t'i mbeten pas prerjes?

6. Një makinë përshkoi një rrugë të gjatë 1 km. Pjesën e parë të rrugës të gjatë 0,4 km makina e përshkoi me shpejtësi mesatare prej 0,(833) km/h. Në pjesën e dytë të rrugës të gjatë 0,6 km makina lëvizi me shpejtësi 1,2(5) km/h.
   a) Shkruani numrin matës të secilës prej shpejtësive me thyesë.
   b) Sa kohë, e shprehur në orë, ishte e nevojshme për të përshkuar secilën pjesë të rrugës?

7. BARAZIA E THYESAVE, NUMRAVE DHJETORË DHE PËRQINDJEVE

Aktivitet

Ana kishte një pjesë të çokollatës. Borjani thotë se Ana hëngri $\frac{1}{2}$ e çokollatës, Merita thotë se hëngri 0,5 e çokollatës, kurse Suadi thotë se hëngri 50% e çokollatës. *A* shprehën Borjani, Merita dhe Suadi, në mënyra të ndryshme, të njëjtën pjesë të çokollatës që hëngri Ana? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

Shembulli 1

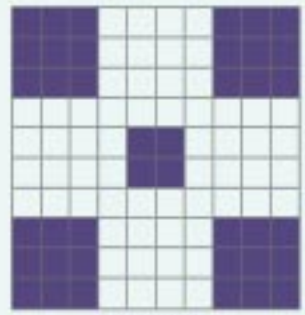
Cila pjesë e katrorit në vizatimin 1 është e ngjyrosur?

Pjesën e ngjyrosur e katrorit mund ta shkruajmë në tre mënyra:

$\frac{40}{100}$ e katrorit,

0,4 e katrorit,

40% e katrorit.



Vizatimi 1

Shembulli 2

Shprehni në përqindje thyesën: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$, b) $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\frac{300}{8}\%=37{,}5\%$, c) $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\cdot 100\right)\%\approx 33{,}3\%$.

Shembulli 3

Shprehni në përqindje numrin dhjetor: a) 0,42; b) 3,6; c) 0,054.

a) $0{,}42=(0{,}42\cdot 100)\%=42\%$, b) $3{,}6=(3{,}6\cdot 100)\%=360\%$, c) $0{,}054=(0{,}054\cdot 100)\%=5{,}4\%$

Numri ose thyesa shprehet në përqindje duke e shumëzuar fillimisht me 100 dhe pastaj prodhimit të fituar i shkruhet shenja "%" e përqindjes.

Shembulli 4

Shprehini në thyesë përqindjet: a) 37%, b) 18%, c) 56%.

a) $37\% = \frac{37}{100}$, b) $18\% = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, c) $56\% = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$.

Shembulli 5

Shprehini me numër dhjetor përqindjet: a) 8%, b) 70%, c) 35%.

a) $8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$; b) $70\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$; c) $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

Përqindjet shprehen në numër, kur numri i përqindjes pjesëtohet me 100 dhe hiqet shenja "%" e përqindjes.

Shembulli 6

Shprehni në përqindje pjesën e drejtkëndëshit në vizatimin 2 të ngjyrosur me ngjyrë të gjelbër.

$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5} \cdot 100\right)\% = 80\%$ e drejtkëndëshit është e ngjyrosur me ngjyrë të gjelbër.



Vizatimi 2

Detyra 2

Shprehni në përqindje pjesën e ngjyrosur të formës në vizatimin 3:

a) b) c) ç)



Vizatimi 3

Shembulli 7

Maria në një restorant porositi picë të ndarë në 8 copa. Ajo hëngri 3 copa, kurse shoqja e saj Arta hëngri 1 copë. Shkruani me thyesë dhe me përqindje pjesën e picës:

a) që e hëngri Maria, b) që e hëngri Arta, c) që mbeti e pangrënë.

a) Maria hëngri $\frac{3}{8}$ e picës, pra 37,5% e picës, sepse

$\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=37{,}5\%$.

b) Arta hëngri $\frac{1}{8}$ e picës, pra 12,5% e picës, sepse

$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{8}\cdot 100\right)\%=12{,}5\%$.

c) Pjesa e picës që mbeti e pangrënë është $\frac{1}{2}$ e picës, pra 50% e picës, sepse

$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ dhe $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$.

Shembulli 8

Mina dëshiron të blejë pemë për një javë të tërë. Në shitore janë paraqitur çmimet: mollë: $\frac{1}{2}$ kg për 30 denarë, banane: 0,75 kg për 45 denarë, portokaj: 40% e kg për 24 denarë.

a) Njehsoni çmimin për kilogram për çdo frut.

b) Ndërtoni tabelë në të cilën do t'i paraqitni të gjitha frutat me sasitë e tyre në formë të thyesës, numrit dhjetor dhe përqindjes, dhe çmimet për kilogram.

c) Mina ka 90 denarë. Çfarë mund të blejë për të shfrytëzuar të gjithë buxhetin?

a) Nëse $\frac{1}{2}$ kg mollë kushton 30 denarë, atëherë 1 kg do të kushtojë $30:\frac{1}{2}=30\cdot 2=60$ denarë.
Nëse 0,75 kg banane kushton 45 denarë, atëherë 1 kg do të kushtojë $45:0{,}75=60$ denarë.
Nëse 0,4 kg portokaj kushton 24 denarë, atëherë 1 kg do të kushtojë $24:0{,}4=60$ denarë.

b)

pemët	thyesa	numri dhjetor	përqindja	çmimi për 1 kg
mollë	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	60 denarë
banane	$\frac{3}{4}$	0,75	75%	60 denarë
portokaj	$\frac{2}{5}$	0,4	40%	60 denarë

c) Të gjitha pemët kanë të njëjtin çmim për kilogram. Mina mund të kombinojë lloje të ndryshme pemësh me masë 1,5 kg për të shfrytëzuar të gjithë buxhetin.

Detyra 3

Në kuzhinën e shkollës për menzë, nxënësit blejnë lëngje. Andrei piu $\frac{3}{5}$ e lëngut njëlitërsh prej portokalli, Bella piu 0,6 e lëngut njëlitërsh prej molle dhe Vanja piu 60% e lëngut njëlitërsh prej grejpfruti.

a) Ndërtoni një tabelë në të cilën secilën sasi të lëngut të konsumuar do ta shkruani me thyesë, numër dhjetor dhe përqindje.

b) Sa mililitra lëng piu secili nxënës?

c) Cili nxënës piu më shumë lëng, e cili më pak?

ç) Duke përdorur tabelën shkruani një përfundim të shkurtër.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

përqindja	42%				12%
numri dhjetor		0,65		0,07	
thyesa			$\frac{17}{20}$		

2. Në një garë nga matematika, një nxënës i zgjidhi $\frac{2}{5}$ e detyrave.

a) Shprehni thyesën $\frac{2}{5}$ me numër dhjetor.

b) Shprehni të njëjtën thyesë me përqindje.

c) *A* përcaktojnë 0,4 dhe 40% sasi të barabarta me $\frac{2}{5}$? Arsyetoni përgjigjen.

ç) Nëse një nxënës tjetër i zgjidhi 75% të detyrave, cila është thyesa dhe numri dhjetor përkatës?

3. Në shitore, Jusufi bleu 2/3 kg mollë, Marko bleu 0,5 kg banane dhe Ana bleu 80% e një kilogrami portokaj. Nga cili lloj peme është blerë sasia më e madhe?

4. Bogdani vrapoi për 3 ditë në të njëjtin shteg. Ditën e parë vrapoi 0,6 e shtegut, ditën e dytë vrapoi 5/8 e shtegut, dhe ditën e tretë vrapoi 55% e shtegut.
Cilën ditë vrapoi pjesën më të madhe të shtegut?

5. Sofia, Damjani dhe Arbnora kishin të njëjtën shumë parash. Ata investuan para në një fond investimi. Sofia investoi 0,75 të shumës së saj, Damjani investoi $\frac{5}{8}$ të shumës së tij, ndërsa Arbnora investoi 70% të shumës së saj. Cili nxënës investoi më së shumti?

Skanoni kodin dhe zgjidhni detyrat.

6. Nxënësit ndërtojnë modele nga argjili. Melita përfundoi $\frac{9}{20}$ e modelit të saj, Anja përfundoi 0,45 e modelit të saj, ndërsa Marko përfundoi 50% e modelit të tij. Vlerësoni cili ndërtoi pjesën më të madhe të modelit dhe propozoni se si mund t'i kombinonin të tre modelet në një për të marrë një model të plotë.

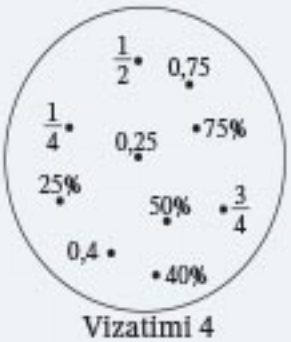
Hulumtim

Rishkruani diagramin në vizatimin 4 në fletore.

a) Lidhni thyesën, numrin dhjetor dhe përqindjen që shprehin të njëjtën sasi.

b) Relacioni *R*: "... paraqet të njëjtën sasi me ..." i përcaktuar në bashkësinë e paraqitur me diagram *A* është refleksiv, simetrik dhe transitiv?

c) *A* është relacioni *R* relacion ekuivalence?



Vizatimi 4

8. NJEHSIMI I THYESAVE DHE PËRQINDJEVE TË SASIVE

Aktivitet

Në një kuti ka 100 karamele, 25% janë të kuqe, 50% janë të kaltërta dhe pjesa e mbetur janë të verdha.

a) Sa karamele të kuqe, sa të kaltërta, e sa të verdha ka në kuti?

b) Cilat pjesë e të gjitha karameleve janë të verdha? Shprehni pjesën e karameleve të verdha me thyesë dhe me përqindje.

c) Nëse konsumoni 50% e të gjitha karameleve, sa do të mbeten?

Shembulli 1

Në bibliotekën e shkollës janë blerë 120 libra. Prej tyre 40% janë literaturë shkencore, $\frac{1}{4}$ janë romane, kurse pjesa e mbetur janë kategori tjera.

a) Sa libra janë literaturë shkencore? b) Sa libra janë romane?

c) Shprehni librat tjerë si thyesë dhe si përqindje nga numri i përgjithshëm i librave.

ç) Nga cila kategori librash ka më shumë, e nga cila më pak libra?

a) Literatura shkencore përbën 40% e 120 librave, pra $0{,}4 \cdot 120 = 48$ libra.

b) $\frac{1}{4}$ e 120 librave janë romane, pra $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ libra.

c) Nga kategoritë e tjera ka $120 - (48 + 30) = 120 - 78 = 42$ libra.

Si thyesë e 120 librave, kategoritë e tjera janë $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

Si përqindje e 120 librave, kategoritë e tjera janë $\frac{42}{120} \cdot 100 = 35\%$.

ç)

kategoria	numri i librave	thyesa	përqindja
literatura shkencore	48	$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$	40%
romane	30	$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$	25%
të tjera	42	$\frac{7}{20}$	35%

Më së shumti libra ka literaturë shkencore: 48 libra ose 40% e numrit të librave.

Më pak ka romane: 30 libra ose 25% e numrit të librave. Kategori tjera janë 42 libra ose 35% e numrit të librave.

Detyra 1

Në klubin sportiv të shkollës blihen pajisje të reja sportive. Gjithsej janë blerë 150 pajisje, $\frac{1}{3}$ e tyre janë topa futbolli, 20% janë reketa tenisi dhe pjesa e mbetur janë litarë për ushtrime.

a) Sa topa futbolli janë blerë? b) Sa reketa tenisi janë blerë?
c) Shprehni numrin e litarëve si thyesë dhe si përqindje nga sasia totale.
ç) Krahasni cila kategori pajisjesh është më së shumti e përfaqësuar, e cila më së paku.
d) Nëse shtohen edhe 10 litarë, A do të rritet apo ulet përqindja e litarëve? Arsyetoni përgjigjen.

Shembulli 2

Në laborator përgatitet një tretësirë ujore e sheqerit në temperaturë dhome. Në 300 ml ujë treten 100 g sheqer. Më pas shtohen edhe 200 g sheqer, të cilët treten plotësisht.
a) Cilën pjesë të masës së tretësirës fillestare paraqet sheqeri?
b) Sa është përqindja e sheqerit në tretësirën fillestare?
c) Sa është përqindja e re e sheqerit pas shtimit të 200 g sheqer?
ç) A është rritur përqendrimi dhe për sa përqind?

a) Nën supozimin se 1 ml ujë ≈ 1 g ujë, sheqeri paraqet

$$\frac{100\text{ g}}{(300\text{ g}+100\text{ g})}=\frac{100\text{ g}}{400\text{ g}}=\frac{1}{4}$$ të tretësirës fillestare.

b) Përqindja e sheqerit në tretësirën fillestare është

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%.$$

c) Pas shtimit të 200 g sheqer, sheqeri paraqet

$$\frac{100\text{g}+200\text{g}}{400\text{g}+200\text{g}}=\frac{300\text{g}}{600\text{g}}=\frac{1}{2}$$ e tretësirës së re.

Përqindja e sheqerit në tretësirën e re është

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=50\%.$$

ç) Përqendrimi i sheqerit në tretësirë është rritur për

$$50\%-25\%=25\%$$

gjë që është e pritshme, sepse sasia e sheqerit është rritur, kurse sasia e ujit mbeti e njëjtë.

Detyra 2

Në laboratorin e shkollës hulumtohet përbërja e qelizave të algave. Në një mostër ka 600 qeliza. Prej tyre $\frac{2}{3}$ janë qeliza të algave të gjelbra, 20% janë qeliza të algave të kuqe dhe pjesa e mbetur janë qeliza të llojeve të tjera të algave.
a) Sa qeliza janë të algave të gjelbra? b) Sa qeliza janë të algave të kuqe?
c) Sa qeliza janë të llojeve të tjera të algave? Shprehni numrin e tyre si thyesë dhe përqindje nga numri i përgjithshëm i qelizave.
ç) Krahasoni cila kategori qelizash të algave është më e përfaqësuara, e cila më pak.
d) Nëse numri i qelizave të algave të kuqe rritet për 30 qeliza, për sa do të ndryshojë përqindja e qelizave të algave të kuqe?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në mensën e shkollës përgatiten gjithsej 200 porcione dreke. $\frac{3}{8}$ e porcioneve janë për vegjetarianë, 30% e porcioneve janë pa gluten dhe nuk janë vegjetariane, kurse pjesa e mbetur janë porcione të rregullta.
   a) Sa porcione janë për vegjetarianë? b) Sa porcione janë pa gluten?
   c) Sa porcione janë të rregullta? Shprehni numrin e tyre me thyesë dhe me përqindje nga numri i përgjithshëm i porcioneve.
   ç) Cili lloj porcioni është më i përfaqësuar, e cili më pak?
   d) Nëse përgatiten edhe 20 porcione të rregullta, si do të ndryshojë përqindja e porcioneve të rregullta?

2. Në një shitore, Petari bleu tre objekte. I pari kushtonte 1 200 denarë me zbritje prej 15%, i dyti kushtonte 850 denarë me zbritje prej 20% dhe i treti kushtonte 600 denarë me zbritje prej 10%.
   a) Njehsoni sa do të paguajë Petari për secilin send pas zbritjes.
   b) Sa denarë do të kursejë gjithsej pas zbritjeve?
   c) Shprehni në përqindje pjesën e secilit send të çmimit total, pas zbritjes.

3. Në një shkollë ka 240 nxënës, të cilët ndahen në grupe për projekte. $\frac{1}{3}$ e nxënësve janë në grupin për hulumtimin e mjedisit jetësorë, 25% janë në grupin e informatikës dhe pjesa e mbetur janë në grupin e fizikës.
   a) Sa nxënës ka në secilin grup?
   b) Shprehni numrin e nxënësve të secilit grup si përqindje nga numri i përgjithshëm i nxënësve.
   c) Krahasoni grupet dhe përcaktoni cili ka më së shumti dhe cili më së paku nxënës.

4. Në një eksperiment kimik bëhet një tretësirë. Në 750 ml ujë janë tretur 90 g sheqer. Më pas janë shtuar edhe 60 g sheqer.
   a) Llogaritni përqindjen e sheqerit në tretësirë para shtimit.
   b) Llogaritni përqindjen e re të sheqerit pas shtimit.
   c) Shprehni me thyesë rritjen e sheqerit si pjesë të tretësirës fillestare.

5. Në një klub sportiv blihen 180 pajisje. $\frac{2}{5}$ janë topa futbolli, 30% janë topa basketbolli dhe pjesa e mbetur janë reketa për tenis.
   a) Sa pajisje ka nga secila kategori?
   b) Shprehni numrin e pajisjeve si thyesë dhe përqindje nga numri i përgjithshëm i pajisjeve.
   c) Nëse shiten 10 topa futbolli, si do të ndikojë kjo në përqindjen e topave të futbollit?

6. Në hulumtimin e një liqeni ka 600 peshq. $\frac{1}{4}$ janë mustakë, 150 janë krapë, ndërsa të tjerët janë të llojeve tjera të peshqve.
   a) Sa peshq janë të llojeve të tjera? Shprehni me thyesë pjesën e llojeve të tjera të peshqve në raport me të gjithë peshqit në liqen.
   b) Shprehni në përqindje numrin e peshqve në secilën kategori.
   c) Cila kategori peshqish është më e përfaqësuar në liqen? *A* janë mustakët apo krapët më të përfaqësuar?

Skanoni kodin dhe zgjidhni detyrat.

9. ZBATIMI I PËRQINDJEVE

Aktivitet

Në një shitore shiten produktet në vijim: hekur 1200 denarë, televizor 32 000 denarë, laptop 78 000 denarë dhe mikrovalë 4000 denarë. Këto çmime janë rritur për 20%.

a) Për sa denarë është rritur çmimi i secilit produkt?

b) Sa është çmimi i secilit produkt pas rritjes?

Shembulli 1

Në një qendër tregtare një xhaketë kushton 3600 denarë. Së pari u ul 25% për shkak të aksionit, dhe më pas çmimi i ri u rrit për 10% për shkak të shtimit të TVSH-së.

a) Sa do të kushtojë xhaketa pas uljes?

b) Sa do të kushtojë pas rritjes së çmimit të ulur më parë?

c) Nëse Mila ka 3000 denarë, *A* do të mund ta blejë xhaketën? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

a) Ulja e xhaketës është 25% e 3600 denarëve dhe arrin

$$25\% \cdot 3600 = \frac{25}{100} \cdot 3600 = 900 \text{ denarë.}$$

Çmimi i ri i xhaketës është 3600 − 900 = 2700 denarë.

Tek çmimi i ri i xhaketës mund të arrijmë nëse llogarisim 100% − 25% = 75% e çmimit të xhaketës:

$$75\% \cdot 3600 = \frac{75}{100} \cdot 3600 = 2700 \text{ denarë.}$$

b) Rritja prej 10% e çmimit të ri, për shkak të shtimit të TVSH-së, është 10% e 2700 dhe arrin

$$10\% \cdot 2700 = \frac{10}{100} \cdot 2700 = 270 \text{ denarë.}$$

Çmimi i xhaketës me TVSH të përfshirë është 2700 + 270 = 2970 denarë.

c) Mila ka 3000 denarë. Meqenëse

3000 − 2970 = 30 denarë,

Mila do të mund ta blejë xhaketën dhe do t'i mbeten 30 denarë.

Detyra 1

Familja Petrovi pagoi faturën e rrymës prej 4800 denarësh në janar. Në shkurt konsumi u ul për 15% për shkak të kursimit, por për shkak të rritjes së çmimit të rrymës, fatura për muajin mars rritet për 20%.

a) Sa është fatura për shkurtin?

b) Sa është fatura për marsin (pas rritjes)?

c) Për sa denarë është më e madhe fatura e marsit në krahasim me faturën e janarit?

Shembulli 2

Një enë laboratorike përmban 500 g ujë. Për shkak të ngrohjes, gjatë eksperimentit avulloi 12% e ujit. Më pas, në enë shtohen 100 g kripë dhe përzihet derisa të tretet.

a) Sa është masa e re e ujit pas avullimit?

b) Sa është masa totale e tretësirës pas shtimit të kripës?

a) Masa e ujit të avulluar është 12% e 500 dhe arrin

$$12\% \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60 \text{ gramë}$$

Masa e re e ujit është $500 - 60 = 440$ gramë.

b) Masa totale e tretësirës është

$440 \text{ g (ujë)} + 100 \text{ g (kripë)} = 540 \text{ g.}$

Detyra 2



Në një enë Petri kultivon një koloni bakteresh, e cila në fillim ka 250 000 bakterie. Pas 6 orësh numri i bakterieve është rritur për 40%. Pas 6 orëve shtesë, numri i bakterieve rritet edhe për 25%.

a) Sa është numri i bakterieve pas 6 orëve të para?

b) Sa është numri i bakterieve pas gjithsej 12 orëve?

c) Për sa përqind gjithsej është rritur kolonia në raport me numrin fillestar?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në një shitore çmimi i një laptopi është 48 000 denarë. Në periudhën e aksionit së pari u ul për 15%, dhe më pas edhe për 10% të çmimit të ri.
   a) Sa është çmimi përfundimtar i laptopit?
   b) *A* është zbritja e njëjtë si një ulje e thjeshtë prej 25%?

2. Në një akuarium kishte 120 peshq. Pas disa muajsh numri i peshqve u rrit për 35%. Më pas 20% e numrit të ri të peshqve ngordhën për shkak të oksigjenit të pamjaftueshëm. Sa peshq mbetën në fund në akuarium?

3. Një liqen ka vëllim prej 50 000 000 m^3 ujë. Gjatë kohës së thatësirës, niveli i ujit ulet për 12%. Vitin e ardhshëm reshjet e rrisin sasinë e ujit për 8% të vëllimit të ri. Sa është vëllimi i liqenit pas këtyre ndryshimeve?

4. Në laborator përgatitet një tretësirë me 800 g ujë dhe 200 g kripë. Më pas avullon 10% e ujit. Sa është masa e re e tretësirës dhe sa është përqindja e përqendrimit të kripës pas avullimit?

5. Një USB ka kapacitet prej 64 GB. Në të janë ruajtur skedarë që zënë 75% të hapësirës. Nga këto të dhëna, nxënësi fshiu 20% për të liruar hapësirë. Sa GB memorie është e lirë pas fshirjes?

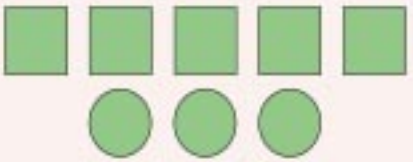
6. Nëse çmimi i një produkti fillimisht rritet për 10%, e më pas ulet për 10%, *A* është çmimi përfundimtar i njëjtë me atë fillestar? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

10. PËRPJESËTIMI

Thjeshtimi i përpjesëtimit

Aktivitet

Sipas vizatimit 1, shkruani herësin e:
a) numrit të rrathëve me numrin e katrorëve,
b) numrit të katrorëve me numrin e rrathëve.
Si quhen dhe çfarë tregojnë herësat që i shkruajtët?



Vizatimi 1

Skano kodin dhe rikujtohu për përpjesëtimin.

Të rikujtojmë se herësi $A : B$ i numrave matës të dy madhësive të së njëjtës natyrë, të matura në të njëjtën njësi matëse, quhet **përpjesëtim (proporcion)** i atyre dy madhësive.
Numrat A dhe B quhen **anëtarë (kufiza)** të përpjesëtimit. Shënimin $A : B$ e lexojmë si "a ndaj b".

Shembulli 1

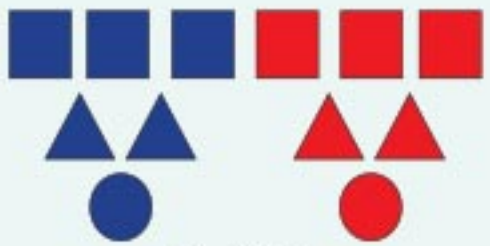
Përpjesëtimet e dhëna shkruani shkurtimisht në një përpjesëtim të vetëm.
a) 4 : 9 dhe 9 : 5, b) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 dhe 8 : 3.

a) Nga përpjesëtimet 4 : 9 dhe 9 : 5 rrjedh shënimi i shkurtuar 4 : 9 : 5 të cilin, gjithashtu, e quajmë përpjesëtim. Ai përbëhet nga tre anëtarë dhe lexohet si "4 ndaj 9 ndaj 5".
b) Me përpjesëtimet 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 dhe 8 : 3 është përcaktuar përpjesëtimi 7 : 2 : 9 : 8 : 3, i cili ka pesë anëtarë.

Shembulli 2

Sipas vizatimit 2, shkruani përpjesëtimin e:
a) trekëndëshave ndaj katrorëve,
b) rrathëve ndaj trekëndëshave ndaj katrorëve.

a) Përpjesëtimi i trekëndëshave ndaj katrorëve është 4 : 6.
Kjo do të thotë se **për çdo 4 trekëndësha ka 6 katrorë.**
Mund të vërejmë se për çdo 2 trekëndësha ka 3 katrorë, pra përpjesëtimi 4 : 6 mund të thjeshtohet në përpjesëtimin 2 : 3.



Vizatimi 2

Shkruajmë 4 : 6 = 2 : 3 në kuptimin që të dy përpjesëtimet përcaktojnë të njëjtin raport.

Nga përpjesëtimi 4 : 6 fitohet përpjesëtimi 2 : 3, kur secili anëtar i tij pjesëtohet me PMP (4, 6) = 2. Anëtarët e përpjesëtimit 2 : 3 janë numra natyrorë reciprokisht të thjeshtë, pra PMP (2, 3) = 1, dhe ai nuk mund të thjeshtohet më tej.

b) Përpjesëtimi i rrathëve ndaj trekëndëshave ndaj katrorëve është 2 : 4 : 6.

Pra, **për çdo 2 rrathë ka 4 trekëndësha dhe për çdo 4 trekëndësha ka 6 katrorë.** Mund të vërejmë se **për çdo 1 rreth ka 2 trekëndësha dhe për çdo 2 trekëndësha ka 3 katrorë**, pra përpjesëtimi 2 : 4 : 6 mund të thjeshtohet në përpjesëtimin 1 : 2 : 3. Shkruajmë 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3, në kuptimin që të dy përpjesëtimet përcaktojnë të njëjtin raport. Nga përpjesëtimi 2 : 4 : 6 fitohet përpjesëtimi 1 : 2 : 3, kur secili anëtar i tij pjesëtohet me PMP (2, 4, 6) = 2. Për përpjesëtimin 1 : 2 : 3 vlen PMP (1, 2, 3) = 1, dhe ai nuk mund të thjeshtohet më tej.

Shembulli 3

Thjeshtoni përpjesëtimin:

a) 3 : 18 : 6 : 30, b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, c) 1,25 : 0,5 : 2,75, ç) 45% : 52% : 17%, d) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm.

a) $3 : 18 : 6 : 30 = 1 : 6 : 2 : 10$ — Secilin anëtar e pjesëtojmë me PMP (3, 18, 6, 30) = 3

b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(12 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(12 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(12 \cdot \frac{3}{4}\right)$ — Secilin anëtar e shumëzojmë me SHVP (2, 3, 4) = 12.

$= 6 : 8 : 9$

c) $1{,}25 : 0{,}5 : 2{,}75 = 125 : 50 : 275$ — Secilin anëtar e shumëzojmë me 100 (me njësinë dhjetore me aq zero sa vende dhjetore ka numri dhjetor me më së shumti vende dhjetore).

$= 5 : 2 : 11$

ç) $45\% : 52\% : 17\% = \frac{45}{100} : \frac{52}{100} : \frac{17}{100}$ — Përqindjet i shkruajmë me thyesa.

$= 45 : 52 : 17$

d) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm = 25 cm : 10 cm : 3 cm — Gjatësitë i shprehim në të **njëjtën njësi**.

$= 25 : 10 : 3$

Detyra 1

Thjeshtoni përpjesëtimin a) 36% : 0,6 : 6, b) 0,5 kg : 250 g : 1,25 kg.

Detyra 2

Fqinjët Ace dhe Mirsadi përzien ngjyrën e kaltër, të verdhë dhe të bardhë për të lyer gardhet e tyre.

Ace përziu: 2,4 l ngjyrë të kaltër, 4 l të verdhë dhe 1,6 l të bardhë.

Mirsadi përziu: 1,8 l ngjyrë të kaltër, 3 l të verdhë dhe 1,2 l të bardhë.

A fituan të njëjtën sasi ngjyre të tretur? A fituan të njëjtën nuancë të ngjyrës së gjelbër?

Udhëzim: Shkruajini përpjesëtimet në të cilat Ace dhe Mirsadi i përzien ngjyrat, dhe më pas thjeshtojini.

Ndarja e sasisë në një përpjesëtim të dhënë

Kur sasia ndahet në një përpjesëtim të dhënë në dy ose më shumë pjesë, mund të zbulojmë çfarë sasie ka secila pjesë.

Aktivitet

Shoqet Iva dhe Maria e ndanë tortën e ditëlindjes në përpjesëtimin 2 : 3.

a) Nëse Iva mori 2 pjesë, sa pjesë mori Maria?

b) Në sa pjesë të barabarta ishte prerë torta, për t'u ndarë shoqeve?



Shembulli 1

Një shumë prej 250 denarësh iu nda Llukës, Ilinës dhe Seadit në përpjesëtim 3 : 5 : 2. Sa denarë fitoi secili prej tyre?

Për çdo 3 pjesë që fiton Lluka, Ilina fiton 5 pjesë, kurse Seadi fiton 2 pjesë. Kemi gjithsej
$3 + 5 + 2 = 10$ pjesë.
Shumën prej 250 denarësh do ta pjesëtojmë me 10 për të gjetur vlerën e 1 pjese:
$250 : 10 = 25$ denarë.
Një pjesë ka vlerë 25 denarë.
Luka fitoi $3 \cdot 25 = 75$ denarë, Ilina fitoi $5 \cdot 25 = 125$ denarë, kurse Seadi fitoi $2 \cdot 25 = 50$ denarë.

Detyra 1

Ndani: a) 48 karamele në përpjesëtim 1 : 2 : 3, b) 440 metra në përpjesëtim 6 : 3 : 1.

Shembulli 2

Një autostradë e gjatë 140 km është e ndarë në segmente në përpjesëtim 2 : 5 : 3 : 4. Sa kilometra është i gjatë secili segment?

Segmenti i parë përbëhet nga 2 pjesë, segmenti i dytë nga 5 pjesë, segmenti i tretë nga 3 pjesë dhe segmenti i katërt nga 4 pjesë. Gjithësej kemi
$2 + 5 + 3 + 4 = 14$ pjesë.
Gjatësinë e autostradës prej 140 km do ta pjesëtojmë me 14 për të gjetur gjatësinë e 1pjese:
$140 : 14 = 10$ km.
Një pjesë ka gjatësi 10 km. Prandaj: segmenti i parë është i gjatë $2 \cdot 10 = 20$ km, segmenti i dytë është i gjatë $5 \cdot 10 = 50$ km, segmenti i tretë është i gjatë $3 \cdot 10 = 30$ km dhe segmenti i katërt është i gjatë $4 \cdot 10 = 40$ km.

Detyra 2

Në një ndeshje basketbolli, ekipi *A* e mundi ekipin *B* me rezultat 72 : 48.
Numri i pikëve të shënuara për lojtar është dhënë në tabelë:

Ekipi A

lojtari	numri i pikëve të shënuara
Mirko	8
Senad	16
Filip	22
Mensur	18
Ivan	8

Ekipi B

lojtari	numri i pikëve të shënuara
Besim	6
Savo	18
Fatmir	4
Ilija	12
Mario	8

Organizatori ndau:

a) 20 vauçerë për pajisje sportive për ekipet, sipas numrit të pikëve të shënuara.
Nga sa vauçerë fitoi secili ekip?

b) 60 vauçerë për vizitë në ngjarje sportive për lojtarët, sipas numrit të pikëve të shënuara.
Nga sa vauçerë fitoi secili lojtar?

Shembulli 3

Atletët Borisi, Ana dhe Halili vrapuan disa xhiro në pistën e atletikës. Numri i xhirove të Borisit kundrejt numrit të xhirove të Anës kundrejt numrit të xhirove të Halilit ishin në përpjesëtimin 2 : 3 : 4. Dihet se Borisi vrapoi 24 xhiro.
Sa xhiro vrapoi Ana, e sa Halili? Sa xhiro vrapuan atletët së bashku?

Borisi vrapoi 24 xhiro që paraqesin 2 pjesë nga gjithsej xhirot e vrapuara.
Nga kjo, 1 pjesë e xhirove të vrapuara përbën 12 xhiro të vrapuara.
Ana vrapoi $3 \cdot 12 = 36$ xhiro, kurse Halili vrapoi $4 \cdot 12 = 48$ xhiro.
Atletët së bashku vrapuan $24 + 36 + 48 = 108$ xhiro.

Detyra 3

Lara bëri një ëmbëlsirë ku raporti i miellit, sheqerit dhe frutave është 8 : 4 : 2.
Lina ka 400 g miell dhe dëshiron të përgatisë një tortë me të njëjtën shije.
Sa gramë sheqer duhet të përdorë Lina për ëmbëlsirën e saj? Sa gramë fruta duhet të përdorë?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Thjeshtoni përpjesëtimin:
   a) 96 : 60 : 120 : 36, b) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6} : \frac{7}{8}$, c) 1,6 : 6,4 : 4 : 2,4.
2. Thjeshtoni përpjesëtimin:
   a) 1800 g : 3 kg : 60 dag, b) 450 mm : 75 cm : 1,5 m : 1 m, c) 3 km : 150 m : 450 m,
   ç) 25 cm : 1 m : 1,5 dm, d) 120 minuta : 4 orë : 2,5 orë, dh) 900 m*l* : 4,5 *l* : 13,5 d*l*.

3. Një shirit dekorativ përbëhet nga tre pjesë. Pjesa e parë ka gjatësi 1,2 m, pjesa e dytë ka gjatësi 80 cm dhe pjesa e tretë ka gjatësi 450 mm. Shkruani dhe thjeshtoni përpjesëtimin që i përgjigjet gjatësive të pjesëve të shiritit dekorativ.

4. Ndani në përpjesëtimin e dhënë:
   a) 780 kg në përpjesëtim 2 : 7 : 4,
   b) 2520 m në përpjesëtim 5 : 8 : 7,
   c) 3600 h në përpjesëtim 2 : 8 : 5 : 3,
   ç) 680 denarë në përpjesëtim 8 : 3 : 2 : 4.

5. Këndet e brendshme të një trekëndëshi janë në përpjesëtim 4 : 3 : 5. Njehsoni madhësinë e këndeve të brendshme të trekëndëshit.

6. Mersiha, Exhe dhe Tea jetojnë në një apartament me qira. Ata e ndajnë qiranë në përpjesëtim 1 : 2 : 2, përkatësisht sipas madhësisë së dhomave. Qiraja totale është 16200 denarë në muaj. Sa qira duhet të paguajë secila prej tyre?

7. Në një shkollë ka katër seksione: letrar (l), matematikor (m), i informatikës (i) dhe sportiv (s). Ka dy herë më shumë nxënës në seksionin matematikor sesa në seksionin letrar. Ka pesë herë më shumë nxënës në seksionin e informatikës sesa në atë matematikor. Numri i nxënësve në seksionin e informatikës është sa gjysma e numrit të anëtarëve në seksionin sportiv. Secili nxënës mund të jetë anëtar i më së shumti një seksioni.

   a) Shkruani përpjesëtimin l : m : i : s.

   b) Sa nxënës ka në secilin prej seksioneve, nëse në to janë anëtarë gjithsej 132 nxënës.

   Udhëzim: Shënoni numrin e nxënësve në seksionin letrar me x, e më pas shprehni numrin e nxënësve në secilin prej seksioneve tjera përmes x.

8. Studentët Dushko, Maksim dhe Maria i ndanë paratë e fituara në përpjesëtimin 3 : 4 : 5, përkatësisht. Dushko fitoi 4500 denarë. Sa denarë fituan Maksimi dhe Maria? Sa është shuma totale që fituan studentët?

Hulumtim

Shuma që kishin Amira, Bobani dhe Kalina ishte në përpjesëtimin 6 : 5 : 4, përkatësisht. Pasi njëra nga vajzat i huazoi 20 denarë Bobanit, shumat ishin në përpjesëtimin 5 : 6 : 4.

a) Sa para kishte secili prej tyre para huazimit?

b) *A* është e mundur që Kalina t'i ketë huazuar para Bobanit? Arsyetoni përgjigjen.

11. MADHËSITË PROPORCIONALE

Madhësitë në përpjesëtim të drejtë

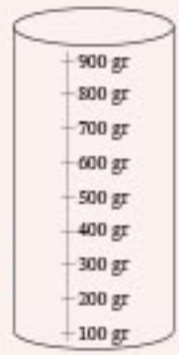
Aktivitet

Për përgatitjen e 3 bukëve, furrtari harxhoi 720 gramë miell.

a) Sa miell do t'i nevojitet për 6 bukë, e sa për 9 bukë?

b) Si ndryshon sasia e nevojshme e miellit me rritjen e numrit të bukëve, e si me zvogëlimin e numrit të bukëve?





Për dy madhësi themi se janë **në përpjesëtim (proporcion) të drejtë** nëse me rritjen e njërës madhësi rritet edhe madhësia tjetër në të njëjtin raport.

Me fjalë tjera, dy madhësi janë në përpjesëtim të drejtë, nëse sa herë rritet njëra madhësi aq herë rritet edhe madhësia tjetër, gjegjësisht sa herë zvogëlohet njëra madhësi aq herë zvogëlohet edhe madhësia tjetër.

Shembulli 1

Dy fletore kushtojnë 160 denarë.

a) Nëse blejmë tre herë më shumë fletore, sa para do të paguajmë?

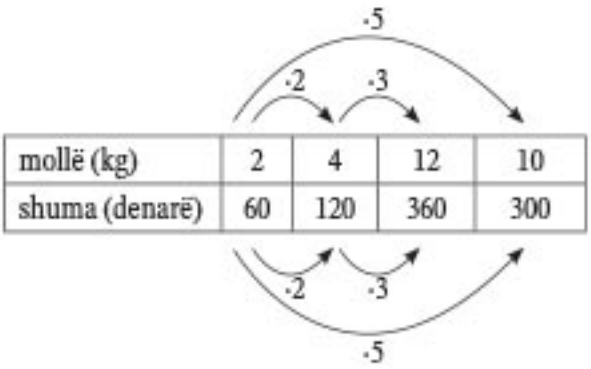
b) Cila është lidhja midis madhësive numri i fletoreve dhe paratë që duhet të paguajmë për fletoret?

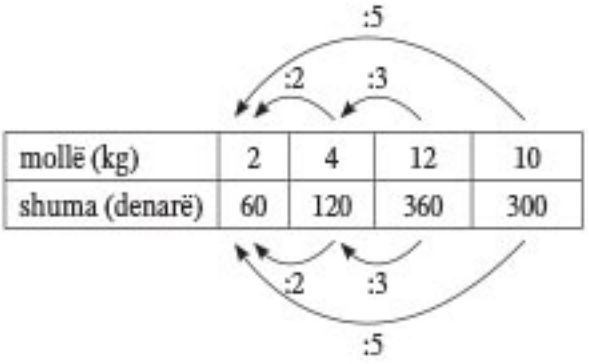
a) Nëse blejmë tre herë më shumë fletore do të paguajmë tre herë më shumë. Tre herë më shumë fletore janë 6 fletore. Për to do të paguajmë tre herë më shumë, pra

$3 \cdot 160 = 480$ denarë.

b) Madhësitë - numri i fletoreve dhe paratë që duhet të paguajmë për fletoret janë në përpjesëtim të drejtë, sepse me rritjen e njërës madhësi rritet edhe madhësia tjetër në të njëjtin raport.

Në tabelat, sasia e mollëve të blera është dhënë në kilogramë, kurse shuma që duhet të paguajmë për sasinë e mollëve të blera është shprehur në denarë.



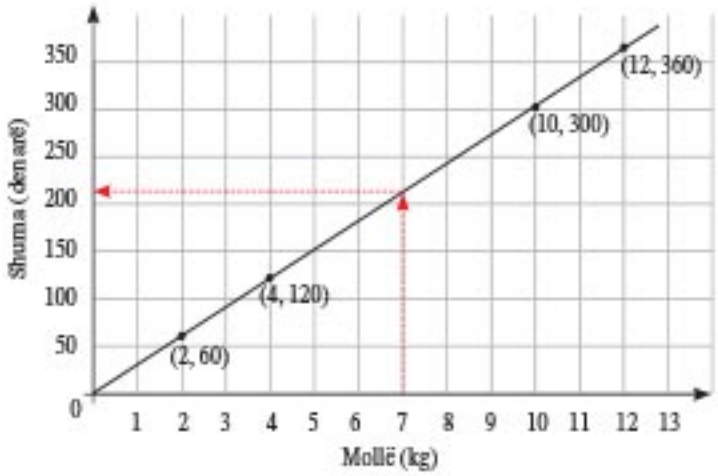


Sasia e mollëve të blera dhe çmimi i kostos së mollëve janë madhësi në përpjesëtim të drejtë.

Vërejmë se herësit përkatës të shumës së parave që duhet të paguajmë dhe sasisë së mollëve të blera

$60 : 2 = 120 : 4 = 360 : 12 = 30,$

është gjithmonë i njëjti numër i cili përcakton çmimin e kilogramit të mollës. Nëse vlerat e fituara i paraqesim si pika në rrafshin koordinativ (vizatimi 1) do të fitojmë **një drejtëz e cila kalon përmes origjinës së sistemit koordinativ.**



Vizatimi 1

Në shembullin tonë kemi vetëm madhësi që nuk janë negative. Prandaj grafiku është gjysmëdrejtëz me fillim në origjinën e sistemit koordinativ.

Me ndihmën e tabelës ose grafikut mund të llogarisim edhe vlera që nuk janë paraqitur me to.

Sipas tabelës mund të llogarisim se:

për 510 denarë do të blejmë $510 : 30 = 17$ kg mollë, ose

për 17 kg mollë duhet të paguajmë $17 \cdot 30 = 510$ denarë.

Nga grafiku mund të gjejmë se:

për 7 kg mollë duhet të paguajmë 210 denarë, ose

për 210 denarë do të blejmë 7 kg mollë.

Shembulli 2

Nëse 3 kg avokado kushtojnë 810 denarë, sa denarë do të kushtojnë 7 kg avokado?

Nëse 3 kg avokado kushtojnë 810 denarë, mund të njehsojmë se:
1 kg avokado kushton $810 : 3 = 270$ denarë,
7 kg avokado do të kushtojnë $7 \cdot 270 = 1890$ denarë.

Detyra 1

Lindita për 15 min në këmbë kalon 1 km. Sa kilometra do të kalojë për: a) 1 h, b) 2,5 h?

Shembulli 3

Për lyerjen e $3m^2$ muri me ngjyrë të gjelbër nevojiten 600 ml ngjyrë të verdhë dhe 21 ml ngjyrë të kaltër.
a) Sa mililitra nga secila prej ngjyrave nevojiten për lyerjen e 12 m^2 të murit?
b) Sa metra katrorë mund të lyhen me 0,828 l ngjyrë të gjelbër?

a) Nëse për $3m^2$ mur me ngjyrë të gjelbër nevojiten 600 ml ngjyrë të verdhë dhe 21 ml ngjyrë të kaltër, atëherë për 12 m^2 do të nevojiten
$4 \cdot 600 = 2\,400$ ml ngjyrë të verdhë dhe $4 \cdot 21 = 84$ ml ngjyrë të kaltër.
b) Nëse për $3m^2$ mur me ngjyrë të gjelbër nevojiten 600 ml ngjyrë të verdhë dhe 21 ml ngjyrë të kaltër, atëherë për $1m^2$ do të nevojiten
$600 : 3 = 200$ ml ngjyrë të verdhë dhe $21 : 3 = 7$ ml ngjyrë të kaltër.
Me 207 ml = 0,207 l ngjyrë të gjelbër mund të lyhet $1m^2$. Meqenëse $0,828 : 0,207 = 4$ përfundojmë se me 0,828 l ngjyrë të gjelbër mund të lyhen $4m^2$.

Detyra 2

Rrobaqepësi Emin qep 4 kostume për 16 ditë.
a) Sa ditë do t'i nevojiten për të qepur 12 kostume?
b) Sa kostume do të qepë për 64 ditë?

Madhësitë në përpjesëtim të zhdrejtë

Aktivitet

Në një shkollë gjithsej ka 36 nxënës të klasës së tetë. Ata duan të shkojnë në ekskursion dhe duhet të marrin me qira një autobus. Vendosën për ofertën ku marrja me qira ditore e autobusit është 36 000 denarë.
Sa do të kushtonte udhëtimi për nxënës, nëse të gjithë shkojnë në ekskursion? *A* do të ulet apo rritet çmimi i udhëtimit për nxënës, nëse 12 fëmijë nuk mund të shkojnë në ekskursion?

Për dy madhësi themi se janë **në përpjesëtim (proporcion) të zhdrejtë**, nëse me rritjen e njërës madhësi zvogëlohet madhësia tjetër në të njëjtin raport.

Me fjalë të tjera, dy madhësi janë në përpjesëtim të zhdrejtë, nëse sa herë rritet njëra madhësi aq herë zvogëlohet madhësia tjetër, gjegjësisht sa herë zvogëlohet njëra madhësi aq herë rritet madhësia tjetër.

Shembulli 4

Eksploruesit duhet të sjellin 10 trungje të vegjël në kampin e tyre.

a) Nëse më shumë eksplorues paraqiten për detyrën, A do të sjellë secili eksplorues më shumë apo më pak trungje?

b) Nëse më pak eksplorues paraqiten për detyrën, A do të sjellë secili eksplorues më shumë apo më pak trungje në kamp?

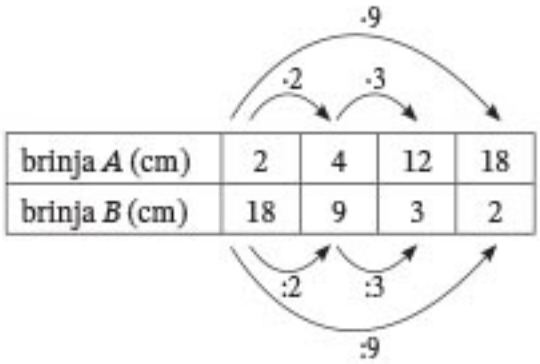
c) A është numri i eksploruesve në proporcion të zhdrejtë me numrin e trungjeve që do të sjellin?

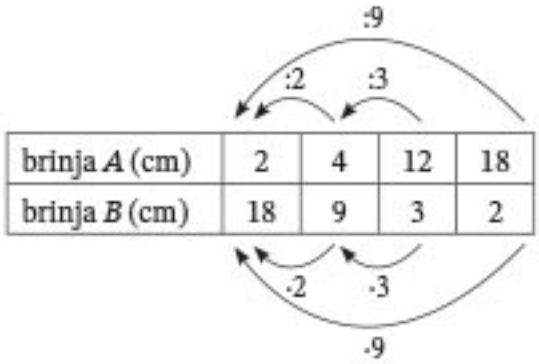
a) Nëse më shumë eksplorues paraqiten për detyrën, secili do të sjellë numër më të vogël të trungjeve.

b) Nëse më pak eksplorues paraqiten për detyrën, secili eksplorues do të sjellë më shumë trungje.

c) Numri i eksploruesve dhe numri i trungjeve për eksplorue janë madhësi në përpjesëtim të zhdrejtë.

Në tabelat janë dhënë gjatësitë e brinjëve A dhe B në centimetra, të disa drejtkëndëshave me syprinë 36 cm².





Sa herë zvogëlohet njëra brinjë, aq herë rritet brinja tjetër, dhe anasjelltas, ndërsa syprina mbetet e pandryshuar. Shumat përkatëse

$2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36,$

gjithmonë japin syprinën e drejtkëndëshit.

Me ndihmën e tabelës mund të llogarisim gjatësitë e brinjëve A dhe b, për vlera që nuk janë paraqitur në të:

nëse gjatësia e brinjës A është 9 cm, atëherë gjatësia e brinjës B është $36 : 9 = 4$ cm, ose

nëse gjatësia e brinjës B është 4 cm, atëherë gjatësia e brinjës A është $36 : 4 = 9$ cm.

Shembulli 5

Nëse 24 punëtorë kryejnë një punë për 16 ditë, për sa ditë do ta kryejnë të njëjtën punë:
a) 6 punëtorë, b) 48 punëtorë?

a) 6 punëtorë janë 4 herë më pak punëtorë. Ata do ta kryejnë punën për 4 herë më shumë ditë:
$4 \cdot 16 = 64$ ditë.
b) 48 punëtorë janë 2 herë më shumë punëtorë, pra do ta kryejnë punën për 2 herë më pak ditë:
$16 : 2 = 8$ ditë.
Vëreni se $24 \cdot 16 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$.

Detyra 3

Një kovë me ujë prej 2 l me një shishe mbushet për 60 sekonda.
Sa kohë nevojitet për të mbushur kovën nëse mbushet:
a) nga dy shishe njëkohësisht, b) nga tre shishe njëkohësisht?

Shembulli 6

Për shtrimin e një tarrace nevojiten 80 pllaka me syprinë 30 cm^2. Sa pllaka nevojiten për shtrimin e tarracës me pllaka me syprinë 25 cm^2?

Syprina e tarracës është $80 \cdot 30 = 2\,400$ cm^2. Për shtrimin e tarracës me pllaka me syprinë 25 cm^2 nevojiten $2\,400 : 25 = 96$ pllaka me syprinë 25 cm^2.

Detyra 4

Dy kompani për pastrimin e banesave dhe zyrave reklamohen në të njëjtën hapësirë reklamuese. Kompania "Pastër" thotë se 4 nga punëtorët e tyre mund të pastrojnë një banesë për 5 h, kurse kompania "Shpejt" thotë se 6 nga punëtorët e tyre mund ta pastrojnë të njëjtën banesë për 4 h. Duke supozuar se banesa do të jetë po aq e pastër, cila kompani është më efikase?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Cilat nga madhësitë në vijim janë në përpjesëtim të drejtë:
   a) Numri i simiteve dhe mielli i përdorur për të përgatitur simitet?
   b) Shpejtësia e makinës dhe koha e nevojshme për të përshkuar një distancë të caktuar?
   c) Numri i djemve që ndajnë një shumë të caktuar dhe shuma që do të marrë secili djalë?
   ç) Shuma që paguajmë për akullore dhe numri i topave që mund të marrim për atë shumë?

2. Ekremi vrapon 100 m për një kohë prej 20 s.
   a) Nëse vrapon me të njëjtin ritëm, sa kohë i nevojitet të vrapojë: 200 m, 300 m dhe 400 m?
   b) Ndërtoni një tabelë në të cilën do t'i fusni vlerat e dhëna dhe ato të fituara për gjatësinë e shtegut dhe kohën e vrapimit.
   c) Vizatoni grafikun për të ilustruar varësinë e kohës së vrapimit nga gjatësia e shtegut.
   ç) Sipas tabelës dhe grafikut përcaktoni sa metra do të vrapojë Ekremi për 30 s?

3. Një makinë harxhon 25 l karburant për të përshkuar 355 km. Sa rrugë mund të përshkojë makina me 42 l karburant?

4. Për lyerjen e një muri me syprinë 42 m^2 nevojiten 6 l ngjyrë. Sa litra ngjyrë nevojiten për 63 m^2?

5. Në një shishe me pleh të lëngshëm për lule shkruan se në 10 l ujë duhet të shtohen 20 ml nga plehu.
   a) Shkruani raportin në të cilin tretet plehu në raport me ujin,
   b) Kova për ujitje e gjyshes Zora nxë 4 litra. Sa mililitra pleh duhet të vendosë gjyshja Zora në kovën për ujitje?

6. Cilat nga madhësitë e mëposhtme janë në përpjesëtim të drejtë, e cilat janë në përpjesëtim të zhdrejtë:
   a) Numri i punëtorëve dhe koha për të cilën ata kryejnë një punë të caktuar?
   b) Çmimi i mallit dhe sasia e mallit që mund të blihet për një shumë të caktuar?
   c) Gjatësitë e brinjëve të një drejtkëndëshi me syprinë 1 cm^2?

7. a) Rindërtojeni dhe plotësoni tabelën, nëse madhësitë x dhe y janë në përpjesëtim të zhdrejtë:

x	1	2	3	4
y		6		

   b) Sipas tabelës përcaktoni vlerën përkatëse të x për $y = 1$.

8. Një bombol mbush një rezervuar me oksigjen mjekësor për 50 min me të njëjtën shtypje. Sa kohë nevojitet për tu mbushur rezervuari:
   a) me 2 bombola, b) me 5 bombola, c) me 10 bombola?

9. Prindërit blejnë pllaka për kuzhinë. Nëse marrin pllaka katrore me brinjë 50 cm, do ju nevojiten 36 pllaka. Nëna preferon pllaka më të vogla, po ashtu katrore, por me brinjë 30 cm.
   a) Sa copë nga pllakat më të vogla do t'u nevojiten?
   b) Nëse pllakat më të mëdha kushtojnë 70 denarë për copë, kurse ato më të vogla 30 denarë për copë, për cilat pllaka do të paguajnë më shumë?

10. **Detyrë projektuese**

    Me përdorimin e përpjesëtimërisë së drejtë dhe përpjesëtimërisë së zhdrejtë do të vëreni zbatimin e matematikës në shkencat natyrore.

    1) Biologji

    Matni numrin e rrahjeve të zemrës suaj (në kyçin e dorës ose në qafë) për 10 s, 30 s dhe 60 s.

    a) Si varet numri i rrahjeve të zemrës nga koha e matjes?

b) Përpiloni një tabelë dhe vizatoni grafikun e varësisë së numrit të rrahjeve të zemrës nga koha e matjes.
c) Sipas grafikut përcaktoni sa është numri i rrahjeve pas 120 s.

2) Gjeografi

Zgjidhni një lokacion. Në tre intervale kohore të ndryshme (për shembull, në orën 10, në orën 11 dhe në orën 12) matni kohën derisa të kalojnë saktësisht 30 këmbësorë. Më pas, njehsoni rrjedhën e këmbësorëve (herësin e 30 me kohën për të cilën kaluan 30 këmbësorë).

a) Si është varësia e kohës nga rrjedha e këmbësorëve, në përpjesëtim të drejtë apo në përpjesëtim të zhdrejtë?
b) Përpiloni një tabelë të varësisë së kohës nga rrjedha e këmbësorëve.
c) Sipas tabelës përcaktoni për sa minuta do të kalojnë 30 këmbësorë, nëse rrjedha është 12 këmbësorë në minutë?

3) Fizikë

Zgjidhni tre shtigje në oborrin e shkollës suaj. Matni gjatësinë e tyre dhe kohën që u nevojitet për të përshkuar secilin shteg, me të njëjtën shpejtësi.

a) Si është varësia e kohës nga gjatësia e shtegut, nëse lëviz me të njëjtën shpejtësi?
b) Përpiloni një tabelë dhe vizatoni grafikun e varësisë së kohës nga gjatësia e shtegut.
c) Sipas grafikut përcaktoni sa kohë do ju nevojitet të përshkoni një shteg të gjatë 20 m.

4) Kimi

Mbushni dy gota me 100 ml dhe 300 ml ujë, përkatësisht. rradhazi, në secilën gotë vendosni një kokërr rrush të thatë dhe shtoni nga gjysmë luge kripë dhe përzieni, derisa kokrra e rrushit të thatë të dalë në sipërfaqe.

Shkruani sa kripë shtuat në secilën gotë.

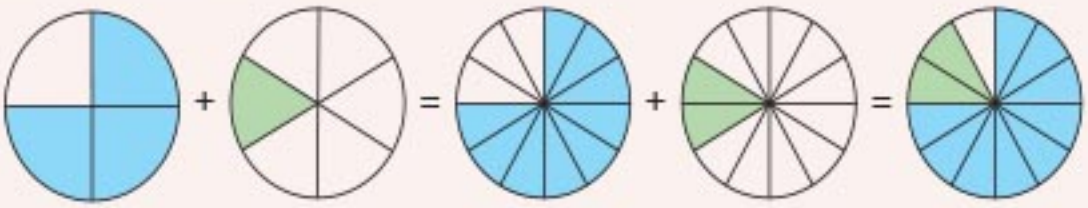
a) Si është varësia e sasisë së kripës së shtuar nga sasia e ujit?
b) Përpiloni një tabelë dhe vizatoni grafikun e varësisë së sasisë së kripës së shtuar nga sasia e ujit.
c) Sipas grafikut përcaktoni sa sasi kripë duhet të shtoni në 400 ml ujë për të bërë që kokrra e rrushit të thatë të dalë në sipërfaqe?

12. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E NUMRAVE RACIONALË

Mbledhja e numrave racionalë

Aktivitet

Një çiklist orën e parë kaloi $\frac{3}{4}$ e shtegut, kurse orën e dytë kaloi $\frac{1}{6}$ e shtegut. Për të njehsuar cilën pjesë të shtegut kaloi çiklisti për 2 h, shkruani shprehje me thyesa që u përgjigjen pjesëve të ngjyrosura në vizatimin 1.



Vizatimi 1

Shpjegoni hapat me të cilët njehsuat pjesën e shtegut që kaloi çiklisti për 2 h.

Skanoni kodin dhe rikujtoni se si mblidhen thyesat.

Shembulli 1

Njehsoni shumën e numrave racionalë: a) $\frac{2}{5}$ dhe $\frac{-4}{5}$, b) $\frac{5}{6}$ dhe $\frac{-3}{8}$.

a) Numrat racionalë janë thyesa me emërues të barabartë:

$$\frac{2}{5}+\frac{-4}{5}=\frac{2+(-4)}{5}=\frac{-2}{5}.$$

Shumën e numëruesve të thyesave e shkruajmë si numërues të thyesës-shumë, kurse emëruesi është i barabartë me emëruesit e thyesave.

b) Numrat racionalë janë thyesa me emërues të ndryshëm:

$$\frac{5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{(-3)\cdot 3}{8\cdot 3}$$

SHVP (6, 8) = 24, 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

$$=\frac{20}{24}+\frac{-9}{24}=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}.$$

Thyesat i shëdrrojmë në thyesa me emërues të barabartë, e më pas i mbledhim si thyesa me emërues të barabartë.

- **Thyesat me emërues të barabartë mblidhen** duke e shkruar shumën e numëruesve si numërues të thyesës-shumë, kurse emëruesi është i barabartë me emëruesit e thyesave.
- **Thyesat me emërues të ndryshëm mblidhen** duke i sjellur fillimisht në emërues të barabartë, e më pas duke i mbledhur si thyesa me emërues të barabartë.

Shembulli 2

Njehsoni shumën e numrave racionalë: a) $-3\frac{1}{2}$ dhe $\frac{1}{4}$, b) $-7{,}5$ dhe $3{,}67$.

a) $-3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1}=$

$=\frac{-14}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-14+1}{4}=\frac{-13}{4}=-3\frac{1}{4}$,

Numrat e përzier i shkruajmë në thyesa të çrregullta.

b) $-7{,}5+3{,}67=\frac{-75}{10}+\frac{367}{100}=\frac{-75\cdot 10}{10\cdot 10}+\frac{367}{100}$

$=\frac{-750}{100}+\frac{367}{100}=\frac{-750+367}{100}=-3\frac{83}{100}$.

Numrat dhjetorë i shkruajmë si thyesa dhjetore.

Detyra 1

Njehsoni: a) $\frac{4}{9}+\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-3}{5}+\frac{-7}{15}$, c) $\frac{-10}{11}+2\frac{7}{10}$, ç) $-0{,}54+(-8{,}8)$.

Detyra 2

Një zhytës ndodhej në thellësinë 12,5 m nën sipërfaqen e detit. Më pas, ai u ngjit për $2\frac{3}{5}$ m.

a) Në çfar thellësie u gjend zhytësi?

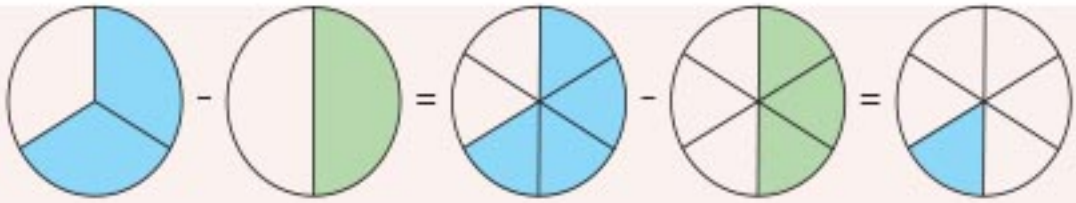
b) *A* është më afër apo më larg sipërfaqes së detit?

Zbritja e numrave racionalë

Aktivitet

Zdrukthëtari Besim nga një dërrasë e gjatë $\frac{2}{3}$ m preu një copë të gjatë $\frac{1}{2}$ m.

Për të llogaritur cila pjesë e dërrasës i ngeli, shkruani shprehje me thyesa që u përgjigjen pjesëve të ngjyrosura në vizatimin 2.



Vizatimi 2

Shembulli 3

Njehsoni ndryshimin: a) $\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}$, b) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}$.

a) Numrat racionalë janë thyesa me emërues të barabartë:

$\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-3-2}{7}=\frac{-5}{7}$.

Ndryshimin e numëruesve sipas renditjes e shkruajmë si numërues të thyesës-ndryshim, kurse emëruesi është i barabartë me emëruesit e thyesave.

b) Numrat racionalë janë thyesa me emërues të ndryshëm:

$\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$

SHVP (8, 6) = 24, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4.

$=\frac{-9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{-9-20}{24}=\frac{-29}{24}=-1\frac{5}{24}$.

Thyesat sillen në thyesa me emërues të barabartë, e më pas zbriten si thyesa me emërues të barabartë.

- **Thyesat me emërues të barabartë zbriten** duke e shkruar ndryshimin e numëruesve sipas renditjes si numërues të thyesës-ndryshim, kurse emëruesi është i barabartë me emëruesit e thyesave.
- **Thyesat me emërues të ndryshëm zbriten** duke i sjellur fillimisht thyesat në thyesa me emërues të barabartë, e më pas duke i zbritur si thyesa me emërues të barabartë.

Shembulli 4

Njehsoni ndryshimin: a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}$, c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}$, ç) $-2{,}5-3{,}75$.

a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{33}{12}-\frac{4}{12}=\frac{33-4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$,

b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 9}-\frac{-4\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{-27}{45}-\frac{-20}{45}=\frac{-27-(-20)}{45}=\frac{-7}{45}=-\frac{7}{45}$,

c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=\frac{-9}{4}-\frac{12}{7}=\frac{-9\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{-12\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{-63}{28}-\frac{-48}{28}=\frac{-63-(-48)}{28}=\frac{-15}{28}=-1\frac{11}{28}$,

ç) $-2{,}5-3{,}75=\frac{-25}{10}-\frac{375}{100}=\frac{-25\cdot 10}{10\cdot 10}-\frac{375}{100}=\frac{-250-375}{100}=\frac{-625}{100}=\frac{-25}{4}=-6\frac{1}{4}$.

Detyra 3

Njehsoni: a) $\frac{7}{16}-\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-8}{15}-\frac{-6}{21}$, c) $-1\frac{5}{7}-3\frac{3}{4}$, ç) $-12{,}54-15{,}2$.

Detyra 4

Në një ditë dimri, temperatura në mëngjes në Berovë ishte $--\frac{5}{2}$ °C. Deri në mesditë temperatura u rrit për $3\frac{1}{4}$ °C. Pasdite, përsëri, u ul për 2,6 °C.

a) Sa ishte temperatura në mesditë?
b) Sa ishte temperatura pasdite?
c) *A* është temperatura e pasdites më e lartë apo më e ulët se ajo e mëngjesit dhe për sa gradë?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni: a) $\frac{-1}{6}+\frac{-3}{8}$, b) $-13\frac{2}{3}+10\frac{1}{4}$, c) $-17+1\frac{5}{6}$, ç) $-1{,}55+0{,}7$.
2. Njehsoni: a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}$, b) $-1\frac{2}{7}-\frac{1}{9}$, c) $-1-1\frac{5}{7}$, ç) $-0{,}17-1{,}325$.
3. Ana dhe Erolli shkuan në shitore për të blerë pemë. Ana bleu $\frac{3}{4}$ kg mollë, $\frac{2}{3}$ kg dardha. Erolli bleu 2,4 kg portokaj dhe 1,35 kg mandarina.
   a) Sa kilogramë pemë bleu Ana?
   b) Sa kilogramë pemë bleu Erolli?
   c) Kush bleu më shumë fruta dhe për sa kilogramë?
4. Në një gotë të madhe kishte 2,5 l ujë. Gjatë ngrohjes avulluan $\frac{2}{5}$ l, e më pas u shtuan edhe 1,1 l ujë të freskët. Sa është sasia totale e ujit në gotë?
5. Temperatura e një tretësire ishte $-2{,}3$ °C. Më pas u rrit për $5\frac{3}{5}$ °C, e pastaj u ul për 3,2 °C. Sa është temperatura pas ndryshimeve?
6. Bima në fillim ishte e lartë $8\frac{2}{5}$ cm. Gjatë një jave u rrit për 2,3 cm, e më pas një pjesë e kërcellit u shkurtua për 0,9 cm për shkak të rritjes së dobët. Sa është lartësia e bimës tani? Sa duhet të rritet për të arritur lartësinë 12 cm?
7. Marina zien çaj në një ibrik. Në fillim kishte $1\frac{4}{5}$ l çaj. Gjatë nxehjes u avulluan 0,4 l, e më pas ajo shtoi edhe 0,75 l çaj të freskët.
   a) Sa është sasia totale e çajit pas të gjitha ndryshimeve?
   b) Nëse dëshiron të ketë 3 l çaj, edhe sa litra duhet të shtojë?
8. Jovana ka një bilanc negativ prej 450 denarësh. Në llogarinë e saj depozitoi $31\frac{1}{4}$ denarë.
   a) Sa do të jetë gjendja e llogarisë?
   b) Nëse shpenzon edhe 125,75 denarë, sa do të jetë gjendja përfundimtare e llogarisë?

9. Gjatë fundjavës Elena luajti tre sete tenisi. Në setin e parë kishte rezultat më të keq për $1\frac{1}{5}$ pikë në raport me kundërshtaren. Në setin e dytë fitoi 2,3 pikë më shumë se kundërshtarja. Edhe në setin e tretë pati rezultat më të keq për $1\frac{1}{5}$ pikë në raport me kundërshtaren.

a) Sa është rezultati i përgjithshëm i Elenës në raport me kundërshtaren pas të tre seteve?

b) *A* fitoi gjithsej më shumë apo më pak pikë se kundërshtarja?

Hulumtim

Nëse i plotësoni kërkesat në hulumtim do të mësoni të mblidhni dhe zbrisni numra racionalë në formë dhjetore, pa i shndërruar numrat dhjetorë në thyesa dhjetore.

a) E keni të njohur se gjatë mbledhjes së numrave të plotë vlen rregulli:

- **Shuma e dy numrave të plotë me të njëjtën shenjë** është numër i plotë vlera absolute e të cilit është shuma e vlerave absolute të të dy numrave (si shumë e numrave natyrorë), me të njëjtën shenjë si shenjat e mbledhësve.
- **Shuma e dy numrave të ndryshëm me shenja të ndryshme** është numër i plotë vlera absolute e të cilit është e barabartë me ndryshimin e vlerës absolute më të madhe me atë më të vogël të atyre dy numrave, kurse shenja e tij është e barabartë me shenjën e numrit me vlerën absolute më të madhe.
- **Ndryshimi i dy numrave të plotë** fitohet kur të zbritshmit i shtohet numri i kundërt i zbritësit.

Ngjashëm si tek numrat e plotë, mund të përkufizojmë **vlerën absolute të numrit racional** x në mënyrën e mëposhtme:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{nëse } x \text{ është numër racional pozitiv} \\ 0, & \text{nëse } x = 0 \\ -x, & \text{nëse } x \text{ është numër racional negativ} \end{cases}.$$

Duke ndjekur rregullën për mbledhjen dhe zbritjen e numrave të plotë, nxirrni rregullën për mbledhjen e numrave racionalë në formë dhjetore.

b) Me ndihmën e rregullës njehsoni: $1{,}2 + 0{,}5$; $-1{,}2 + (-0{,}5)$; $-1{,}2 + 0{,}5$; $1{,}2 + (-0{,}5)$.

Skanoni kodet dhe zgjidhini detyrat.

Mbledhja e numrave të plotë

Zbritja e numrave të plotë

Zbritja e numrave dhjetorë

13. SHUMËZIMI DHE PJESËTIMI I NUMRAVE RACIONALË

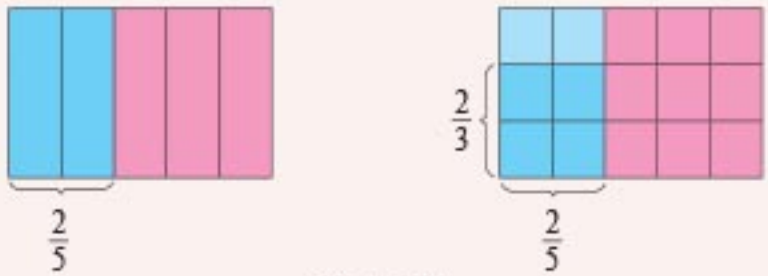
Shumëzimi i numrave racionalë

Aktivitet

Demiri mori $\frac{2}{5}$ e figurave të tij dhe shkoi te shoku i tij Mihaili. Nga figurat që mori, Demiri i dha Mihailit $\frac{2}{3}$ (viz. 1).

a) Cilën pjesë të figurave i dha Demiri Mihailit?

b) Cilin veprim e zbatoni për të njehsuar?



Vizatimi 1

Skanoni kodin dhe rikujtoni si shumëzohen thyesat.

Shembulli 1

Njehsoni prodhimin e numrave racionalë: a) $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{5}{7}$, b) $\frac{-2}{3}$ dhe $\frac{5}{7}$.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$, b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot5}{3\cdot7}=\frac{-10}{21}$.

Prodhimi i thyesave është thyesë, numëruesi i së cilës është i barabartë me prodhimin e numëruesve të shumëzuesve, kurse emëruesi është prodhimi i emëruesve të shumëzuesve.

Shembulli 2

Njehsoni prodhimin $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}$.

Mënyra e parë: $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}=\frac{-10\cdot14}{21\cdot25}=\frac{-140}{525}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$. Llogarisim, pastaj thjeshtojmë.

Mënyra e dytë: $\frac{-\cancel{10}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{25}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$. Thjeshtojmë, pastaj llogarisim.

Shembulli 3

Njehsoni prodhimin: a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$, b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7)$.

a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{-49}{15} = -3\frac{4}{15}$,

b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7) = \frac{-24}{10} \cdot \frac{-17}{10} = \frac{-24 \cdot (-17)}{10 \cdot 10} = \frac{408}{100} = \frac{102}{25} = 4\frac{2}{25}$.

Detyra 1

Njehsoni prodhimin: a) $\frac{-105}{72} \cdot \frac{18}{15}$, b) $1\frac{8}{11} \cdot \frac{-33}{45}$, c) $\frac{-7}{17} \cdot \frac{-1}{10}$, ç) $-0{,}4 \cdot 1{,}5$.

Shembulli 4

Temperatura në një frigorifer ishte 2,5 °C. Më pas ajo u rrit për 1,4 herë nga temperatura fillestare.

a) Për sa gradë Celsius u rrit temperatura në frigorifer?

b) Sa ishte temperatura e re në frigorifer?

a) Temperatura u rrit për: $2{,}5 \cdot 1{,}4 = \frac{25}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{350}{100} = 3{,}5$ °C.

b) Temperatura e re në frigorifer ishte: $2{,}5 + 3{,}5 = \frac{25}{10} + \frac{35}{10} = \frac{60}{10} = 6$ °C.

Detyra 2

Jovana ka kursime prej 312,5 denarësh. Ajo vendos t'i rrisë kursimet e saj $1\frac{2}{3}$ herë, e më pas të shpenzojë $\frac{3}{4}$ e shumës së re për blerjen e librave.

Sa denarë do t'i mbeten Jovanës pas blerjes së librave?

Pjesëtimi i numrave racionalë

Aktivitet

Tre litra ujë duhet të ndahen në shishe nga gjysmë litri.

a) Sa shishe do të nevojiten?

b) Cilin veprim do të përdorni për njehsim?

Skano kodin dhe rikujto si pjesëtohen numrat e plotë.

Shembulli 5

Njehsoni prodhimin: a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$. Çfarë vëreni?

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot4}{4\cdot3}=\frac{12}{12}=1$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$.

Me siguri vërejtët se numëruesi i thyesës së parë është i barabartë me emëruesin e thyesës së dytë dhe emëruesi i thyesës së parë është i barabartë me numëruesin e thyesës së dytë. Thyesat e tilla i quajmë **thyesa reciproke**.

Shembulli 6

Njehsoni herësin: a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}$, b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}$, c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}$.

a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot11}{4\cdot7}=\frac{33}{28}=1\frac{5}{28}$ Thyesa reciproke e thyesës $\frac{7}{11}$ është thyesa $\frac{11}{7}$.

b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{-5}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{-5\cdot4}{9\cdot3}=\frac{-20}{27}$ Thyesa reciproke e thyesës $\frac{3}{4}$ është thyesa $\frac{4}{3}$.

c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}=\frac{-\cancel{12}}{\cancel{21}}\cdot\frac{-7}{\cancel{2}}=\frac{-\cancel{6}\cdot(-1)}{\cancel{3}\cdot1}=2$ Thyesa reciproke e thyesës $\frac{2}{-7}$ është thyesa $\frac{-7}{2}$.

Herësi i dy thyesave është i barabartë me prodhimin e të pjesëtuarit dhe thyesës reciproke të pjesëtuesit.

Shembulli 7

Njehsoni herësin: a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}$, b) $-1{,}2:(-2{,}3)$.

a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}=-\frac{28}{27}:\frac{20}{9}=\frac{-\cancel{28}}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{20}}=\frac{-7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{-7\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-7}{15}$

b) $-1{,}2:(-2{,}3)=\frac{-12}{10}:\frac{-23}{10}=\frac{-12}{\cancel{10}}\cdot\frac{-\cancel{10}}{23}=\frac{12}{23}$

Detyra 3

Njehsoni herësin:

a) $\frac{-8}{5}:\frac{2}{3}$, b) $\frac{18}{25}:\frac{-72}{75}$, c) $\frac{-125}{64}:\frac{-50}{16}$.

Skano kodin dhe zgjidhi detyrat.

Shembulli 8

Antonia dëshiron të përgatisë lëng për miqtë e saj. Një shishe koncentrat për lëng ka 0,7 l. Sa shishe me koncentrat për lëng i nevojiten për të fituar 3,5 l lëng?

Numri i shisheve të nevojshme është:

$$3{,}5 : 0{,}7 = \frac{35}{10} : \frac{7}{10} = \frac{\cancel{35}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{7}} = 5.$$

Antonias i nevojiten 5 shishe me koncentrat për lëng.

Detyra 4

Një kompani, që eksporton në tregun e huaj, ka një borxh prej 825,75 euro. Për ta zvogëluar, menaxhmenti planifikon ta shlyejë borxhin në 15 këste të barabarta. Pas shlyerjes së kështit të parë, kompania realizon një fitim prej 312,50 euro. Sa do të jetë borxhi i kompanisë pas pagesës së kështit të parë dhe shtimit të fitimit?

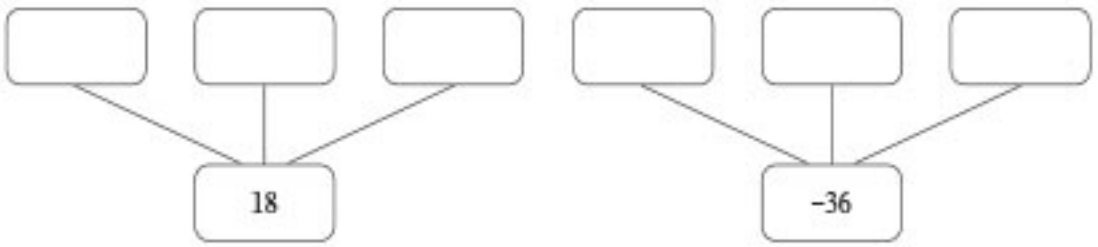
Shënim. Në bashkësinë e numrave racionalë veprimi i pjesëtimit është gjithmonë i realizueshëm, përveç në rastin kur pjesëtuesi është 0.
Mbani mend, **me zero nuk pjesëtohet**.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni prodhimin: a) $-15 \cdot \frac{-8}{5}$, b) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{-7}{5}$, c) $-8\frac{1}{2} \cdot 36$, ç) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}12)$.

2. Njehsoni herësin: a) $12 : \frac{-8}{9}$ $5\frac{1}{3} : \left(-5\frac{1}{3}\right)$, b) $3{,}4 : \left(-1\frac{7}{10}\right)$, c), ç) $-230 : 2{,}3$.

3. Rishkruani diagramet në vizatimin 2 në fletoret tuaja. Në fushat e zbrazëta shkruani paraqitjen e numrit të dhënë përmes mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe pjesëtimit të numrave racionalë.



Vizatimi 2

4. Temperatura më e ulët e regjistruar në një zonë është −18,4 °C. Për shkak të ndryshimeve klimatike ajo u bë 1,6 herë e temperaturës fillestare. Më pas, gjatë një vale të nxehti u rrit për 12,5 °C. Sa është temperatura e re?

5. Në klasën e fizikës, Teuta vendos dy termometra në dy frigoriferë eksperimentalë të ndryshëm. Frigoriferi *A* ka temperaturë −3,2 °C, kurse frigoriferi *B* ka temperaturë 2,5 °C. Ajo vendos të arrijë temperaturën në frigoriferin *A*, e cila do të jetë 1,5 herë e temperaturës fillestare, dhe temperaturën në frigoriferin *B* e cila do të jetë 2,4 herë e temperaturës fillestare.

a) Sa do të jetë temperatura e re në frigoriferin A?
b) Sa do të jetë temperatura e re në frigoriferin B?

6. Llogaria A është në minus −4,5 mijë denarë. Banka paguan interes dhe gjendja pjesëtohet me 0,5. Llogaria B është në plus 7,2 mijë denarë, por shpenzimet e zvogëlojnë 1,8 herë (pjesëtohet me 1,8).
   a) Sa është gjendja e re e llogarisë A?
   b) Sa është gjendja e re e llogarisë B?
   c) Nëse bashkohen të dyja llogaritë në një llogari të re, A do të jetë gjendja pozitive apo negative?

7. Një ekip duhet të vendosë 1177,5 m kabllo optike përgjatë një rruge. Plani është që kablloja të vendoset në 15 seksione të barabarta. Pas vendosjes së kabllos në seksionin e parë, mbërriti një ekip i dytë i cili menjëherë vendosi 312,5 m kabllo.
   a) Sa është gjatësia e një seksioni?
   b) Sa kabllo mbeti për t'u vendosur pas seksionit të parë para përfshirjes së ekipit të dytë?
   c) Sa kabllo mbeti për t'u vendosur pas përfshirjes së ekipit të dytë?

8. Në një eksperiment laboratorik përdoren 256,5 g tretësirë acidi. Sasia duhet të ndahet në 12 mostra të barabarta për nxënësit.
   a) Çfar mase të tretësirës së acidit ka në secilën mostër?
   b) Nëse secili nxënës shton nga 15,25 g acid në mostrën e tij, sa do të jetë masa totale e mostrës pas shtimit?
   c) Si do të ndryshojë përqendrimi i acidit në mostër pas shtimit? Arsyetoni përgjigjen.

Hulumtim

1. a) Rishkruani dhe plotësoni tabelën, në lidhje me shenjën e prodhimit dhe herësit të dy numrave racionalë A dhe b.

a	b	$a \cdot b$	$a : b$
+	+		
+	−		
−	+		
−	−		

   b) A do të jetë tabela identike me atë të dhënë, nëse A dhe B janë numra të plotë. Pse?
   c) Çfarë mund të përfundoni, në cilët raste shenja është pozitive, e në cilët raste është negative?

2. Nëse i plotësoni kërkesat në hulumtim do të mësoni të shumëzoni dhe pjesëtoni numra racionalë në formë dhjetore, pa i shndërruar numrat dhjetorë në thyesa dhjetore.
   a) E keni të njohur se gjatë shumëzimit dhe pjesëtimit të numrave të plotë vlejnë rregullat:
      - **Prodhimi** i dy numrave të plotë me shenja të ndryshme është numër negativ me vlerë absolute të barabartë me prodhimin e vlerave absolute të shumëzuesve.
      - **Prodhimi** i dy numrave të plotë me shenja të njëjta është numër pozitiv me vlerë absolute të barabartë me prodhimin e vlerave absolute të shumëzuesve.
      - **Herësi** (nëse ekziston) i dy numrave të plotë me shenja të ndryshme është numër negativ me vlerë absolute të barabartë me herësin e vlerës absolute të të pjesëtueshmit me pjesëtuesin.

- **Herësi** (nëse ekziston) i dy numrave të plotë me shenja të njëjta është numër pozitiv me vlerë absolute të barabartë me herësin e vlerës absolute të të pjesëtueshmit me pjesëtuesin.

Duke ndjekur rregullat për shumëzimin dhe pjesëtimin e numrave të plotë, nxirrni rregulla për shumëzimin dhe pjesëtimin e numrave racionalë në formë dhjetore.

b) Me ndihmën e rregullave njehsoni:

$1{,}2 \cdot 0{,}5;\ -1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ -1{,}2\ 0{,}5;\ 1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ 1{,}2 : 0{,}5;\ -1{,}2 : (-0{,}5);\ -1{,}2 : 0{,}5;\ 1{,}2 : (-0{,}5).$

14. VETITË E VEPRIMEVE ME NUMRA RACIONALË

Aktivitet

Njehsoni shumat:

a) $7 + (-4)$ dhe $(-4) + 7$,

b) $[12 + (-8)] + 3$ dhe $12 + [(-8) + 3]$.

Çfarë vëreni? Cilat veti i ka veprimi i mbledhjes së numrave të plotë?

Skanoni kodin dhe njehsoni shumat

Shembulli 1

Njehsoni shumat: a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}$ dhe $\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}$, b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}$ dhe $\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)$.

a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{-3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}$, Mbledhësit i ndërruan vendet.

$\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$. Shuma nuk ndryshoi.

b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-3+4}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{2-9}{12}=\frac{-7}{12}$, Mënyra e grupimit të mbledhësve është ndryshuar.

$\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{12}=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$. Shuma nuk ndryshoi.

- **Vetia komutative (ndërruese) e mbledhjes**: Shuma e dy numrave racionalë nuk ndryshon nëse mbledhësit i ndërrojnë vendet.
- **Vetia asociative (shoqëruese) e mbledhjes**: Shuma e numrave racionalë nuk varet nga mënyra e grupimit të mbledhësve.

Detyra 1

Mile zhytej në −3,7 m lartësi mbi nivelin e detit, e më pas u lëshua edhe 2,5 m më poshtë. Seadi fillimisht e hulumtoi botën nënujore në −2,5 m lartësi mbi nivelin e detit, e më pas u lëshua edhe 3,7 m më poshtë. Pa llogaritur, përcaktoni nëse Mile dhe Seadi u gjendën në të njëjtën lartësi mbi nivelin e detit? Arsyetoni përgjigjen.

Shembulli 2

Njehsoni: a) $\frac{-3}{7}+0$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}$.

a) $\frac{-3}{7}+0=\frac{-3}{7}+\frac{0}{7}=\frac{-3+0}{7}=\frac{-3}{7}$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}=\frac{1+(-1)}{6}=\frac{0}{6}=0$.

Thyesat $\frac{1}{6}$ dhe $\frac{-1}{6}$ janë **të kundërta** me njëra-tjetrën.

Aktivitet

Njehsoni prodhimet: a) $40\cdot(-8)$ dhe $(-8)\cdot 40$, b) $[(-42)\cdot(+5)]\cdot(-8)$ dhe $(-42)\cdot[(+5)\cdot(-8)]$. Çfarë vëreni? Cilat veti i ka veprimi i shumëzimit të numrave të plotë?

Shembulli 3

Njehsoni prodhimet: a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ dhe $\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}$, b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}$ dhe $\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$.

a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{-6}{35}$, Shumëzuesit i ndërruan vendet.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{3\cdot(-2)}{7\cdot 5}=\frac{-6}{35}$. Prodhimi nuk ndryshoi.

b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-1\cdot(-1)}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$, Mënyra e grupimit të shumëzuesve është ndryshuar.

$\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot(-3)}{4\cdot 5}=\frac{-1}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{20}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{20}=\frac{1}{20}$. Prodhimi nuk ndryshoi.

- **Vetia komutative (ndërruese) e shumëzimit:** Prodhimi i dy numrave racionalë nuk ndryshon nëse shumëzuesit i ndërrojnë vendet.
- **Vetia asociative (shoqëruese) e shumëzimit:** Prodhimi i numrave racionalë nuk varet nga mënyra e grupimit të shumëzuesve.

Shembulli 4

Njehsoni prodhimin: a) $\frac{-4}{5}\cdot 1$, b) $\frac{-2}{3}\cdot 0$, c) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}$.

a) $\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}$, b) $\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{2\cdot 0}{3}=\frac{0}{3}=0$, c) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}=1$.

Thyesat $\frac{-2}{7}$ dhe $\frac{7}{-2}$ janë **reciproke** me njëra-tjetrën.

Për shkak të vetisë asociative për mbledhjen dhe shumëzimin, mund të llogarisim shumën ose prodhimin e çfarëdo numri të fundëm të numrave racionalë.

Detyra 2

Njehsoni: a) $2\frac{1}{10}+3\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$, b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{3}\cdot 3\frac{2}{4}$, c) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Aktivitet

Meri vendosi të kursejë nga buxheti i saj ditor, duke shpenzuar çdo ditë nga 200 denarë nga buxheti, i cili arrin 300 denarë në ditë. Për 7 ditë llogariti se do të kursejë

$300\cdot 7-200\cdot 7=(300-200)\cdot 7=100\cdot 7=700$ denarë.

Cilën veti e zbatoi Meri në llogaritje?

Vetia distributive (shpërndarëse) e shumëzimit në lidhje me mbledhjen: Gjatë shumëzimit të një shume me një numër të dhënë, rezultati është i njëjtë nëse fillimisht e llogarisim shumën, e më pas e shumëzojmë me numrin e dhënë, ose nëse secilin prej mbledhësve fillimisht e shumëzojmë me numrin e dhënë, e më pas i mbledhim prodhimet e fituara. Vetia distributive e shumëzimit vlen edhe në lidhje me zbritjen.

Detyra 3

Shqyrtoni vetinë distributive përmes shembullit $\left(1{,}2+\frac{3}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Me zbatimin e vetive të lartpërmendura të veprimeve të mbledhjes dhe zbritjes, në shumë raste mund t'i lehtësojmë llogaritjet.

Shembulli 5

Njehsoni në mënyrën më të lehtë: a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}$, b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4$, c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64$.

a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}=7-\frac{10}{3}+9-\frac{17}{3}=7+9-\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{3}\right)=16-\frac{27}{3}=16-9=7$,

b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4=\frac{-25}{10}\cdot 4\cdot\frac{-379}{10}=-10\cdot\frac{-379}{10}=379$,

c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64=2{,}52\cdot(36+64)=\frac{252}{100}\cdot 100=252$.

Detyra 4

Tea bleu 3,5 kg dredhëza me nga 55 denarë, 3,5 kg qershi me nga 45 denarë dhe 3,5 kg me nga 100 denarë. Sa denarë gjithsej pagoi për frutat?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shqyrtoni barazinë $A+(b+c)=(a+b)+c$ për numrat racionalë:
   a) $a=-2\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{7}$ dhe $c=\frac{4}{5}$, b) $a=\frac{-1}{2}$, $b=1\frac{2}{3}$ dhe $c=-0{,}6$.
2. Njehsoni $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ dhe $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$. Më pas krahasoni rezultatet e fituara. Çfarë përfunduat? Shpjegoni përgjigjen.
3. Njehsoni duke zbatuar vetinë komutative dhe atë asociative:
   a) $3\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+4\frac{7}{12}$, b) $\frac{-3}{8}+12\frac{3}{4}-3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$, c) $\left(\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{17}{18}$, ç) $\frac{15}{19}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{38}{45}\right)$.
4. Çfarë prodhimi fitohet, më i madh se zero, i barabartë me zero apo më i vogël se zero, nëse:
   a) numri i shumëzuesve negativë është çift dhe nuk ka shumëzues 0,
   b) numri i shumëzuesve negativë është tek dhe nuk ka shumëzues 0,
   c) njëri nga shumëzuesit është zero.
5. Njehsoni prodhimet në dy mënyra: a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$, b) $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{14}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$.
6. Njehsoni në mënyrën më të lehtë: a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$, b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$, c) $\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$.
7. Një pishinë mbushet nga tre tuba për $3\frac{1}{3}$h. Tubi i parë për një orë lëshon $3\frac{1}{5}$m^3 ujë, kurse tubi i dytë $1\frac{1}{10}$m^3 më shumë se i pari. Sa metra kub ujë nxë pishina nëse tubi i tretë për një orë lëshon aq ujë sa lëshojnë dy tubat tjerë së bashku?

15. SHPREHJET NUMERIKE ME NUMRA RACIONALË

Aktivitet

Njehsoni vlerën e shprehjes numerike:
a) $(-1)\cdot(-10)+5\cdot(-9):(-1)$,
b) $\{20-3\cdot[8+(-4)]\}:[10+2\cdot(-3)]$.
Për secilën shprehje shpjegoni radhën e kryerjes së veprimeve të shënuara.

Skanoni kodin dhe zgjidhni detyrat.

Nëse në një shprehje numerike pa kllapa hasen vetëm veprime të rendit të parë mbledhje dhe zbritje, ose vetëm veprime të rendit të dytë shumëzim dhe pjesëtim, atëherë veprimet kryhen sipas radhës siç janë shkruar, nga e majta në të djathtë.

Shembulli 1

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes: a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1$, b) $-6\cdot2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2$.

a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1=\frac{19}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{1}{1}=\frac{19\cdot6}{8\cdot6}-\frac{5\cdot4}{12\cdot4}+\frac{7\cdot3}{16\cdot3}-\frac{1\cdot48}{1\cdot48}=$

$=\frac{114-20+21-48}{48}=\frac{67}{48}=1\frac{19}{48}$,

b) $-6\cdot2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2=-6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-6\cdot5\cdot4\cdot1}{2\cdot(-3)\cdot2}=\frac{-120}{-12}=10$.

Nëse në një shprehje numerike pa kllapa hasen veprime të rendit të parë dhe të dytë, atëherë fillimisht kryejmë veprimet e rendit të dytë shumëzim dhe pjesëtim, e më pas veprimet e rendit të parë mbledhje dhe zbritje.

Shembulli 2

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes $\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}$.

$\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}=\frac{5}{8}-\frac{\cancel{11}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{11}}=\frac{5}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{8}-\frac{5\cdot4}{2\cdot4}=\frac{5-20}{8}=\frac{-15}{8}=-1\frac{7}{8}$.

Nëse në shprehjen numerike hasen: kllapa të vogla ( ), kllapa të mesme [ ], dhe kllapa të mëdha { }, atëherë fillimisht do të kryejmë veprimet në kllapat e vogla, më pas veprimet në ato të mesme, pastaj në kllapat e mëdha, dhe në fund veprimet jashtë tyre dhe me to.

Shembulli 3

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes $\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot\frac{7}{3}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}\right)\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{5+6}{15}\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7\cdot 5}{15}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2+35-22}{15}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15}{15}\cdot\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Detyra 1

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes $(-3,5)+\frac{2}{3}\cdot(-4,5)-(-\frac{5}{6})+7,2:(-2,4)$.

Shembulli 4

Një nxënës bën një eksperiment shkencor me tretësira të kripërave. Ka tre shishe me sasi të ndryshme tretësirash. Në shishen e parë ka 1,2 l tretësirë, në të dytën ka $\frac{3}{4}$ l, në të tretën ka 0,6 l tretësirë. Gjysmën e tretësirës në shishen e parë e derdhi, në shishen e dytë shtoi $\frac{1}{3}$ e sasisë së saj, ndërsa nga shishja e tretë derdhi 0,2 l. Sa është sasia e tretësirës që mbeti në të tria shishet bashkë?

Sipas kushteve të detyrës marrim shprehjen numerike

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2).$$

Duke llogaritur vlerën numerike të shprehjes fitojmë

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)=\left(\frac{12}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{10}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{10}-\frac{12}{20}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6-2}{10}\right)=\left(\frac{12\cdot 2}{10\cdot 2}-\frac{12}{20}\right)+\frac{4}{4}+\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{24-12}{20}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=\frac{40}{20}=2.$$

Sasia e tretësirës që mbeti në të tria shishet së bashku është 2 l.

Detyra 2

Për një tortë përdoren $\frac{3}{4}$ gotë sheqer, 0,5 gotë vaj dhe $\frac{1}{3}$ gotë qumësht. Është shtuar edhe 0,2 gotë ujë dhe gjysma e përzierjes është vendosur në kallëp. Sa gota përzierje janë vendosur në kallëp?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni vlerën e shprehjes numerike:

   a) $8\frac{3}{8}-3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\left(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)$, b) $-\frac{7}{8}+4{,}5-\left(1\frac{2}{3}+\frac{-6}{2}\right)\cdot 3$,

   c) $\left[\left(3\frac{1}{2}-4\right)\cdot(-1{,}2)-\left(-\frac{7}{10}\right)\right]\cdot 0{,}25$, ç) $\left\{-2{,}4+\frac{3}{4}\cdot(-10)-[-1{,}2+(-6)]:0{,}5\right\}+\frac{1}{2}$.

   Shpjegoni radhën e kryerjes së veprimeve.

2. Temperatura në një laborator ishte 21,5 °C. Fillimisht u rrit për 3,2 °C, më pas u ul për 0,5 °C, dhe në fund u rrit edhe për 0,1 °C. Sa është temperatura përfundimtare?

3. Në një ibrik vendosen 1,2 l ujë, më pas shtohen $\frac{3}{10}$ l qumësht, ndërsa hiqen 0,25 l nga lëngu i përftuar. Procedura përsëritet dy herë. Sa litra ujë do të ketë në fund në ibrik?

4. Marina përgatit një smoothie (pije të trashë frutash) me $\frac{2}{3}$ l kos, 0,25 l lëng frutash dhe $\frac{1}{10}$ l ujë. Smoothie-n e ndau në 3 gota. Çfarë sasie smoothie ka në një gotë?

5. Një shitore bleu 12,5 kg shegë me çmim 95 denarë për kilogram. Në mënyrë shtesë pagoi 235 denarë për paketim. Nëse shitën $\frac{4}{5}$ e shegëve me nga 124 denarë për kilogram, *A* është shitorja në humbje apo ka realizuar fitim?
   Udhëzim: Krahasoni të ardhurat me pjesën e shpenzimit që lidhen me sasinë e shitur.

6. Një autobus në linjën Shkup – Nish harxhon mesatarisht 2,4 litra naftë për 10 km. Rruga është e gjatë 210 km. Çmimi i 1 litri naftë është 1,65 euro. Autobusi transporton 56 udhëtarë. Secili paguan nga 21,20 euro, përveç 6 udhëtarëve që kanë biletë me zbritje prej 1,50 euro. Sa është fitimi total i xhiros?

16. THYESAT E DYFISHTA

Aktivitet

Shkruaji herësit e mëposhtëm të numrave të plotë si thyesa.
a) 7 : 9 b) 12 : 5 c) 1 : 4

Herësit $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:(-7)$, $\frac{5}{3}:\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}$ dhe $7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}$ mund t'i shkruajmë edhe si:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}:(-7)=\frac{\frac{2}{3}}{-7},\ \frac{5}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}},\ 2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}},\ \frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}=\frac{\frac{-3}{8}}{4\frac{7}{9}},\ 7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}=\frac{7\frac{3}{5}}{1\frac{4}{9}}.$$

Shprehjet e këtilla i quajmë thyesa të dyfishta.

Thyesa, numëruesi ose emëruesi i së cilës është thyesë, quhet **thyesë e dyfishtë**.

Vija thyesore që ndan numëruesin nga emëruesi i thyesës së dyfishtë quhet **vija thyesore kryesore**.

Shembulli 1

Shkruani herësit në formë thyese të dyfishtë:

a) $4:\frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{8}:6$, c) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$.

a) $4:\frac{2}{3}=\frac{4}{\frac{2}{3}}$, b) $\frac{5}{8}:6=\frac{\frac{5}{8}}{6}$, c) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$.

Detyra 1

Paraqitni herësit në formë thyese të dyfishtë:

a) $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}:\frac{1}{6}$, $\frac{9}{11}:\frac{12}{-5}$, b) $5:\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}:7$ dhe $3\frac{1}{5}:7$.

Në thyesën e dyfishtë $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ numrat *a* dhe d quhen **anëtarë të jashtëm**, kurse numrat *b* dhe c **anëtarë të brendshëm**.



Shembulli 2

Shkruani anëtarët e jashtëm dhe të brendshëm të thyesës së dyfishtë: a) $\frac{\frac{8}{11}}{6}$, b) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$.

Nëse numëruesi apo emëruesi i thyesës së dyfishtë është numër i plotë, atëherë me paraqitjen e tij si thyesë me emërues 1, thyesa e dyfishtë do të marrë formën e plotë, pra do të ketë katër anëtarë.

a) $\frac{\frac{8}{11}}{6}=\frac{\frac{8}{11}}{\frac{6}{1}}$, Anëtarë të jashtëm janë 8 dhe 1, kurse anëtarë të brendshëm janë 11 dhe 6.

b) $\frac{\frac{7}{1}}{\frac{-2}{9}}$, Anëtarë të jashtëm janë 7 dhe 9, kurse anëtarë të brendshëm janë 1 dhe −2.

Shembulli 3

Shndërroni në thyesë të zakonshme thyesën e dyfishtë: a) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}}$, b) $\dfrac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}}$.

Thyesa e dyfishtë shndërrohet në thyesë të zakonshme kur thyesa në numërues pjesëtohet me thyesën emërues.

a) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{7} : \frac{5}{4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$,

b) $\dfrac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{(-5) \cdot 7}{9 \cdot 4} = \dfrac{-35}{36} = -\dfrac{35}{36}$.

Thyesa e dyfishtë shndërrohet në thyesë të zakonshme duke e shkruar prodhimin e anëtarëve të jashtëm si numërues, kurse prodhimin e anëtarëve të brendshëm si emërues të thyesës së zakonshme:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Detyra 2

Shndërroni në thyesë të zakonshme thyesën e dyfishtë: a) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$, b) $\dfrac{-5}{\frac{4}{9}}$, c) $\dfrac{\frac{3}{8}}{5}$.

Shembulli 4

Shndërroni në thyesë të zakonshme thyesën e dyfishtë: a) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, b) $\dfrac{7,4}{\frac{4}{5}}$.

a) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \dfrac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ — Numrat e përzier i shkruajmë në thyesa të çrregullta.

b) $\dfrac{7,4}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{74}{10}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{74 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \dfrac{370}{40} = \dfrac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$ — Numrat dhjetorë i shkruajmë në thyesa dhjetore.

Shembulli 5

Shndërrojeni në thyesë të zakonshme $\dfrac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$.

$$\frac{2-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{10-2}{5}}{\frac{4+5}{6}}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{6}}$$

I njehsojmë numëruesin dhe emëruesin.

$$=\frac{8\cdot 6}{5\cdot 9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Më pas thyesën e dyfishtë e shndërrojmë në të zakonshme.

Detyra 3

Shndërroni në thyesë të zakonshme: a) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{3}$, c) $\frac{\frac{1}{5}-0{,}3}{1-\frac{2}{5}}$.

Detyra 4

Sa paketa nga $\frac{1}{8}$ kg mund të mbushen nga $31\frac{1}{4}$ kg kafe?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shndërroni në thyesë të zakonshme thyesën e dyfishtë: a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, b) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{-\frac{2}{7}}{4}$, ç) $\frac{2}{\frac{3}{2}}$.
2. Shndërroni në thyesë të zakonshme thyesën e dyfishtë: a) $\frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2{,}4}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{2\frac{2}{5}}{1{,}4}$, ç) $\frac{0{,}12}{0{,}15}$.
3. Kryeni veprimet e shënuara:
   a) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{5}$, b) $\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{2}{9}}$, c) $\frac{3}{\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}}$, ç) $\frac{2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}-\frac{3}{30}}{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}$.
4. Ndryshimin e thyesave $\frac{6}{5}$ dhe $3\frac{3}{5}$ pjesëtojeni me shumën e tyre.
5. Herësin e numrave $3\frac{5}{8}$ dhe 0,2 mblidheni me herësin e numrave 0,2 dhe $3\frac{5}{8}$.
6. Një fuçi e cila zë $1\frac{5}{8}$ m³ ujë mbushet nga një çezmë për 3 minuta. Me sa ujë do ta mbushni fuçinë nëse çezmën e hapni vetëm një minutë?

17. FUQITË ME BAZË NUMËR TË PLOTË DHE TREGUES NUMËR NATYROR

Koncepti i fuqisë

Aktivitet

Në 5 ndeshje hendbolli, numrin e përgjithshëm të golave për ekipin e vet i shënuan 5 hendbollistë që shënuan nga 5 gola në secilën ndeshje.

a) Shkruani një shprehje me të cilën mund të njehsoni sa gola shënoi ekipi në secilën nga ndeshjet?

b) Shkruani një shprehje me të cilën mund të njehsoni sa gola gjithsej shënoi ekipi në pesë ndeshjet. Si do t'i shkruani shkurtimisht këto shprehje?

Për prodhimin e 4 shumëzuesve të barabartë me numrin 3 shkurtimisht shkruajmë:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ lexojmë "3 në fuqinë e katërt" ose "3 në të katërtën".

Treguesi i fuqisë 4 tregon se sa herë baza 3 është shumëzuar me vetveten.

Ngjashëm, kemi se:

$5 \cdot 5 = 5^2$ lexojmë "5 në fuqinë 2" ose "5 në katror",

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ lexojmë "7 në fuqinë 3" ose "7 në të tretën" ose "7 në kub"

Shumëzimi i shumëzuesve të barabartë na çon te veprimi i **fuqizimit**.

Prodhimi i n shumëzuesve të barabartë, secili prej të cilëve është numër i plotë a, quhet **fuqi** e numrit A me **tregues (eksponent)** numër natyror n dhe shënohet me a^n (lexojmë "a në fuqinë n" ose "a në të n-tën").

Numri A quhet **bazë e fuqisë**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ herë}} = a^n$$

treguesi i fuqisë – numër natyror

baza e fuqisë – numër i plotë

Meqenëse çdo prodhim ka të paktën dy shumëzues, sipas përkufizimit të fuqisë, treguesi i fuqisë duhet të mos jetë më i vogël se dy. Për shkak të kësaj, me marrëveshje, fuqinë e numrit natyror A me eksponent 1 e marrim të jetë vetë ai numër a.

$a^1 = a$

Në këtë kuptim, për shembull, $8^1 = 8$, $(-2)^1 = -2$, $1^1 = 1$, $(-1)^1 = -1$ etj.

Nga përkufizimi vërejmë se baza e fuqisë është shumëzuesi, kurse eksponenti është numri i shumëzuesve dhe tregon se sa herë baza e fuqisë është marrë si shumëzues.

Shembulli 1

Shkruani prodhimin si fuqi, e më pas lexojeni:

a) $4 \cdot 4 \cdot 4$, b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$.

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, lexojmë "4 në fuqinë e tretë" ose "4 në të tretën",
b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$, lexojmë "minus 6 në fuqinë e pestë" ose "minus 6 në të pestën",
c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^4$, lexojmë "minus x në fuqinë e katërt" ose "minus x në të katërtën".

Shembulli 2

Shkruani si prodhim shumëzuesish të barabartë fuqinë: a) 7^3, b) $(-5)^5$, c) $(-y)^2$.

a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, b) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, c) $(-y)^2 = (-y) \cdot (-y)$.

Detyra 1

Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

fuqia	5^2		$(-3)^3$			$(-7)^8$		$(-z)^6$	
baza e fuqisë		4		-3	-1		1		$a - b$
treguesi i fuqisë		8		2	5		9		4

Detyra 2

Shkruani prodhimin si fuqi, e më pas lexoni:
a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $x \cdot x \cdot x \cdot x$, ç) $(-b) \cdot (-b)$,

Detyra 3

Lexoni fuqinë, e më pas shkruani si prodhim shumëzuesish të barabartë:
a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) 0^6, ç) 1^2, d) $(-1)^9$, dh) a^7, e) $(-c)^5$, ë) $(x + y)^4$.

Detyra 4

Në një popullatë me 1 bakter, numri i baktereve N rritet sipas formulës $N = 3^n$, ku n është numri i orëve. Sa baktere do të ketë pas 6 orësh?

Vlera e fuqisë

Aktivitet

Arbeni festoi ditëlindjen e tij. Ai ftoi 3 nxënës nga klasa e tij. Secili prej tyre ftoi edhe nga 3 nxënës nga klasat e tjera, ndërsa ata ftuan edhe nga 3 nxënës nga një shkollë tjetër.

a) Shkruani me fuqi numrin e nxënësve që u ftuan në festën e ditëlindjes.
b) Shkruani fuqinë si prodhim dhe njehsoni prodhimin.
c) Sa nxënës u ftuan në festën e ditëlindjes?

Vlera e fuqisë së çdo numri të plotë llogaritet duke e shkruar fuqinë në formë prodhimi, e më pas duke kryer shumëzimin.
Njehsimin e vlerës së fuqisë mund ta kryejmë edhe me përdorimin e kalkulatorit.
Për njehsimin e vlerës së fuqisë me tregues të fuqisë 2 (katror) dhe me tregues të fuqisë 3 (kub) përdorim butonat x^2 dhe x^3.

Për njehsimin e fuqisë me tregues të fuqisë të ndryshëm nga 2 (katror) ose 3 (kub) përdorim butonat x^n ose y^x.

Aktivitet

Shkruani: a) katrorët e numrave nga 1 deri në 20, b) kubet e numrave nga 1 deri në 5.
Mundohuni t'i mbani mend për t'i përdorur gjatë zgjidhjes së detyrave.

Shembulli 1

Njehsoni vlerën e fuqisë: a) 4^3, b) $(-2)^5$, c) $(-7)^2$, ç) 1^4, d) 0^6.

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
ose në kalkulator
4 x^3 $=$

b) $(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$
ose në kalkulator
$(-)$ 2 x^n 5 $=$

c) $(-7)^2 = (-7)\cdot(-7) = 49$
ose në kalkulator
$(-)$ 7 x^2 $=$

Baza e fuqisë dhe treguesi i fuqisë janë numra pozitivë. Vlera e fuqisë është numër pozitiv.

Baza e fuqisë është numër negativ, kurse treguesi i fuqisë është numër tek. Vlera e fuqisë është numër negativ.

Baza e fuqisë është numër negativ, kurse treguesi i fuqisë është numër çift. Vlera e fuqisë është numër pozitiv.

ç) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, d) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Aktivitet

Shkruani fuqinë dhe njehsoni vlerën e saj:
a) bazë 3 dhe tregues 6, b) bazë -2 dhe tregues 3, c) bazë -4 dhe tregues 2.
A mund të nxjerrni një përfundim për lidhjen midis shenjës së bazës dhe çiftësisë së treguesit me shenjën e vlerës së fuqisë?

- Vlera e fuqisë së një numri të plotë pozitiv është numër i plotë pozitiv.
- Vlera e fuqisë së një numri të plotë negativ me tregues çift është numër i plotë pozitiv.
- Vlera e fuqisë së një numri të plotë negativ me tregues tek është numër i plotë negativ.
- Nëse $A = 1$, atëherë $a^n = 1$ dhe nëse $A = 0$, atëherë $a^n = 0$, për çfardo $n \in \mathbb{N}$.

Detyra 1

Pa llogaritur, përcaktoni shenjën e fuqisë: a) 13^5, b) $(-26)^{52}$, c) $(-77)^{45}$, ç) 1^{44}.

Detyra 2

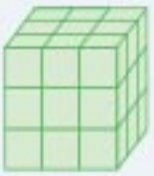
Në fizikë, gjatë llogaritjes së forcës së drejtuar (me shenjën "–" për drejtimin majtas), përdoret një shprehje e cila përmban forcën në katror ose në kub. Nëse forca është –3 N, njehsoni vlerën e saj:
a) katrore, b) kubike.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruani bazën dhe treguesin e fuqisë:
   a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) $(3x)^6$, ç) $(-a + 4)^k$, d) $(-7p^7)^9$ dh) 0^{30}.
2. Shkruani si fuqi prodhimin:
   a) $9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $(-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x)$,
   ç) $(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$, d) $xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy$.
3. Shkruani si prodhim fuqinë:
   a) 6^7, b) $(-19)^2$ c) a^3, ç) $(-x)^2$, d)$(-c - 1)^7$, dh) $(m^3)^5$.
4. Njehsoni vlerën e fuqisë: a) 3^4, b) $(-6)^3$, c) $(-2)^4$.
   Kontrolloni rezultatin tuaj me kalkulator.
5. Shqyrtoni saktësinë e barazisë: a) $(-5)^4 = 5^4$, b) $(-4)^3 = -4^3$, c) $(-3)^4 = -1 \cdot 3^4$.
6. Për cilët numra natyrorë është e saktë (pa)barazia:
   a) $0^n = 0$, b) $2^n > 0$, c) $1^n = 1$, ç) $(-4)^n > 0$, d)$(-7)^n < 0$?
7. Në një simulim kompjuterik, numri i dronëve dyfishohet pas çdo rundi.
   Sa dronë do të ketë pas 5 rundesh, nëse në fillim kishte 3 mikrodronë?
8. Në një turne shahu eliminues, numri i lojtarëve përgjysmohet pas çdo rundi të luajtur. Sa lojtarë do të mbeten pas 4 rundesh, nëse turneu filloi me 128 lojtarë?
9. Një bretkosë ndodhet në origjinën e boshtit koordinativ x. Pas çdo kërcimi, e dyfishon largesën nga origjina e boshtit koordinativ dhe e ndryshon drejtimin (majtas, pastaj djathtas, pastaj majtas, ...). Pozicioni pas n kërcimeve është $(-2)^n$ metra.
   a) Në cilin pozicion është bretkosa pas kërcimit të parë, e në cilin pas kërcimit të dytë?
   b) Pas sa kërcimesh bretkosa do të jetë në të majtë të origjinës së boshtit koordinativ, në distancë 32 m?

Hulumtim

Në vizatimin 1 është dhënë një kub $3 \times 3 \times 3$ mbështjellësi i të cilit është ngjyrosur me ngjyrë të gjelbër.



Vizatimi 1

a) Nga sa kube të vegjël $1 \times 1 \times 1$ përbëhet kubi?
b) Sa kube të vegjël janë të pangjyrosur?
c) Sa kube të vegjël kanë 1 mur të ngjyrosur, sa kanë 2 mure të ngjyrosur, e sa kanë 3 mure të ngjyrosur?
ç) Përgjigjuni të njëjtave pyetje për një kub $4 \times 4 \times 4$.
d) Rishkruani dhe plotësoni tabelën.

kubi	numri i mureve të ngjyrosur te kubet e vegjël			
	0	1	2	3
$2 \times 2 \times 2$				
$3 \times 3 \times 3$				
$4 \times 4 \times 4$				
$5 \times 5 \times 5$				

dh) *A* mund të zbuloni ndonjë rregull në lidhje me numrin e kubeve të vegjël dhe numrin e mureve të ngjyrosur të kubeve të vegjël? Shqyrtoni rregullin për një kub $9 \times 9 \times 9$.

18. RRËNJA KATRORE DHE RRËNJA KUBIKE

Rrënja katrore

Aktivitet

Syprina e një katrori është 16 cm².
a) Sa centimetra është njëra brinjë e tij?
b) Si e njehsojmë gjatësinë e brinjës?

Shembulli 1

a) Plotësoni tabelën:

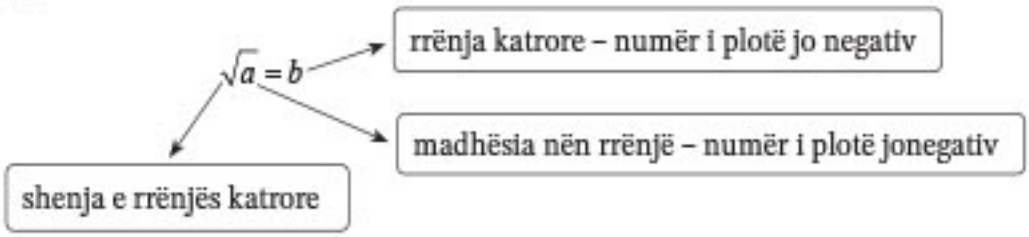
n			5		8
n^2	0	9		49	

Për të plotësuar tabelën duhet:
- për numrat 5 dhe 8 të gjejmë katrorët e tyre, e ato janë 25 dhe 64, përkatësisht,
- të gjejmë numra katrorët e të cilëve janë 0, 9 dhe 49.

Kërkesa e dytë është e anasjellta e të parës, pra për numrin 9 duhet të gjejmë numrin katrori i të cilit është 9. Ai numër shënohet me $\sqrt{9}$ dhe quhet rrënjë katrore e numrit 9.
Ngjashëm kemi se: $\sqrt{49} = 7$ sepse $7^2 = 49$, dhe $\sqrt{0} = 0$ sepse $0^2 = 0$.

Rrënjë katrore e numrit të plotë jo negativ A (nëse ekziston) është numri i plotë jo negativ b, i tillë që $b^2 = a$. Numri A quhet **madhësia nën rrënjë**.
Veprimi me të cilin llogaritet rrënja katrore e një numri të dhënë quhet **rrënjëzim me tregues 2** ose **rrënjëzim**.

Shkruajmë:



Lexojmë: "rrënjë katrore e A është b".

Në kalkulatorë ekziston një tast i veçantë për llogaritjen e rrënjës katrore, zakonisht i shënuar me $\sqrt{\ }$. Kështu, për të llogaritur rrënjën katrore të 64 shtypim:
6 4 $\sqrt{\ }$ = ose $\sqrt{\ }$ 6 4 =.

Aktivitet

Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

n	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{n}$										

Mundohuni t'i mbani mend vlerat e njehsuara për t'i përdorur gjatë zgjidhjes së detyrave.

Detyra 1

Njehsoni dhe kontrolloni me kalkulatoR: a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt{64}$, c) $\sqrt{361}$, ç) $\sqrt{121}$.

Për numrin 43, për shembull, nuk ekziston numër i plotë jo negativ katrori i të cilit është numri 43. Prandaj, nuk ekziston rrënja katrore e numrit 43 në bashkësinë e numrave të plotë jo negativë. Në raste të tilla mund të bëjmë **vlerësim** të vlerës së rrënjës katrore.

Shembulli 2

Vlerësoni vlerën e $\sqrt{7}$ në një vend dhjetor.

Së pari përcaktojmë dy numra të plotë jo negativë midis katrorëve të të cilëve ndodhet numri 7 (vizatimi 1). Meqenëse

$2^2 < 7 < 3^2$ kemi se $2 < \sqrt{7} < 3$.

I llogarisim katrorët e numrave 2; 2,1; 2,2; 2,3; ... 2,9; 3, radhazi, derisa vlera e tyre të kalojë 7:

$2^2 = 4$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$;

$2{,}4^2 = 5{,}76$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; $\mathbf{2{,}6^2 = 6{,}76}$; $\mathbf{2{,}7^2 = 7{,}29}$.

Sipas llogaritjeve përfundojmë se

$6{,}76 = 2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2 = 7{,}29$, prandaj $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.

Largesa nga numri $2{,}6^2 = 6{,}76$ deri te numri 7 është 0,24 njësi, ndërsa largesa nga numri $2{,}7^2 = 7{,}29$ deri te numri 7 është 0,29 njësi.

Meqenëse $0{,}24 < 0{,}29$, numri $2{,}6^2 = 6{,}76$ është më afër numrit 7, që do të thotë se $\sqrt{7}$ është më afër numrit 2,6.

Prandaj, $\sqrt{7} \approx 2{,}6$.



Vizatimi 1

Detyra 2

Vlerësoni vlerën e $\sqrt{50}$ në një vend dhjetor. Më pas, kontrolloni vlerësimin tuaj me kalkulator.

Detyra 3

Një panel ka 2401 llamba të njëjta të vendosura në një grilë katrore.

a) Sa llamba ka në një rresht?

b) Nëse secila llambë zë një katror me brinjë 1 cm, sa është gjatësia e brinjës së grilës?

Rrënja kubike

Aktivitet

Vëllimi i një kubi është 27 cm^3. Sa centimetra është tehu i tij?

Si do e njehsoni gjatësinë e tehut?

Shembulli 3

Kopjoni dhe plotësoni tabelën:

n	3	-4		
n^3			8	-125

Për të plotësuar tabelën duhet:

- të gjeni kubet e numrave 3 dhe -4, e ato janë numrat 27 dhe -64, përkatësisht,
- të gjeni numrat kubet e të cilëve janë 8 dhe -125.

Kërkesa e dytë është e anasjellta e të parës, pra për numrin 8 duhet të gjeni numrin kubi i të cilit është 8. Ai është numri 2 i cili shënohet me $\sqrt[3]{8}$ dhe quhet rrënja kubike e numrit 8.

Ngjashëm, vërejmë se $\sqrt[3]{-125} = -5$ sepse $(-5)^3 = -125$.

Rrënjë kubike (rrënjë e tretë) e numrit të plotë A është numri i plotë b, i tillë që $b^3 = A$ dhe shënohet me $\sqrt[3]{a}$. Numri A quhet **madhësia nën rrënjë**.

Veprimi me të cilin llogaritet rrënja kubike e një numri të dhënë quhet **rrënjëzim me tregues 3** ose **rrënjëzim**.

Shkruajmë:



Lexojmë: "rrënja kubike e A është b" ose "rrënja e tretë e A është b"

Në kalkulatorë ekziston një tast i veçantë për llogaritjen e rrënjës kubike, zakonisht i shënuar me $\sqrt[3]{\ }$.

Kështu, për të llogaritur rrënjën kubike të 125 shtypim:

1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = ose $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

Aktivitet

Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

n	8	27	64	125
$\sqrt[3]{n}$				

Mundohuni t'i mbani mend vlerat e njehsuara për t'i përdorur gjatë zgjidhjes së detyrave.

Detyra 4

Njehsoni dhe kontrolloni me kalkulatoR: a) $\sqrt[3]{-27}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[3]{-125}$, ç) $\sqrt[3]{64}$.

Ashtu si tek rrënjët katrore, jo për çdo numër ekziston numër i plotë kubi i të cilit është numri i dhënë. Prandaj, jo çdo rrënjë kubike është në bashkësinë e numrave të plotë. Në raste të tilla mund të bëjmë **vlerësim** të vlerës së rrënjës kubike.

Shembulli 4

Vlerësoni vlerën e $\sqrt[3]{30}$ në një vend dhjetor.

Së pari përcaktojmë dy numra të plotë midis kubeve të të cilëve ndodhet numri 30. Meqenëse

$3^3 < 30 < 4^3$ kemi se $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

I llogarisim kubet e numrave 3; 3,1; 3,2; 3,3; ... 3,9; 4, radhazi, derisa vlera e tyre të kalojë 30 (vizatimi 2):

$3^3 = 27$; $\mathbf{3{,}1^3 = 29{,}791}$; $\mathbf{3{,}2^3 = 32{,}768}$.

Sipas llogaritjeve përfundojmë se

$29{,}791 = 3{,}1^3 < 30 < 3{,}2^3 = 32{,}768$, prandaj $3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$.

Largësia nga numri $3{,}1^3 = 29{,}791$ deri te numri 30 është 0,209 njësi, ndërsa largesa nga numri $3{,}2^3 = 32{,}768$ deri te numri 30 është 2,768 njësi.

Meqenëse $0{,}209 < 2{,}768$, numri $\mathbf{3{,}1^3 = 29{,}791}$ është më afër numrit 30, që do të thotë se $\sqrt[3]{30}$ është më afër numrit 3,1.

Prandaj, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}1$.



Vizatimi 2

Detyra 5

Vlerësoni vlerën e $\sqrt[3]{10}$ në një vend dhjetor. Më pas, kontrolloni vlerësimin tuaj me kalkulator.

Detyra 6

Një fabrikë paketon kuti në formë kubi në një arkë të madhe. Arka nxë saktësisht 125 kuti të vendosura në mënyrë të njëjtë për nga gjatësia, gjerësia dhe lartësia. Sa kuti ka në secilën brinjë të arkës?

Njehsimi i vlerës së shprehjes numerike me fuqi, rrënjë katrore dhe kubike

Shembulli 5

Njehsoni vlerën e shprehjes: a) $(-5)^3 + 15^2$, b) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})$, c) $(4^2+2\sqrt[3]{64}):3$.

Duhet të ndjekim rregullat:

a) $(-5)^3 + 15^2 = -125 + 225 = 100$

b) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125}) = 4\cdot(4+(-5)) =$
$= 4\cdot(-1) = -4$

c) $(4^2+2\cdot\sqrt[3]{64}):3 = (16+2\cdot4):3 =$
$= (16+8):3 =$
$= 24:3 = 8$

- Gjatë llogaritjes së vlerës së një shprehjeje numerike me kllapa, **përparësi kanë veprimet në kllapa.**
- Gjatë llogaritjes së vlerës së një shprehjeje numerike me veprimet fuqizim, rrënjëzim, shumëzim, pjesëtim, mbledhje dhe zbritje, fillimisht kryejmë **fuqizimin** dhe **rrënjëzimin**, më pas **shumëzimin** dhe **pjesëtimin** dhe në fund **mbledhjen** dhe **zbritjen.**

Detyra 7

Njehsoni vlerën e shprehjes $(2^2-7\sqrt[3]{-125}):(5^2-4\sqrt{9})$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni dhe kontrolloni me kalkulatoR: a) $\sqrt{225}$, b) $\sqrt{144}$, c) $\sqrt{361}$, ç) $\sqrt{121}$.
2. Vlerësoni vlerën e $\sqrt{68}$ në një vend dhjetor.
3. Njehsoni dhe kontrolloni me kalkulatoR: a) $\sqrt[3]{-64}$, b) $\sqrt[3]{-8}$, c) $\sqrt[3]{125}$, ç) $\sqrt[3]{75}$.
4. Mateu është koleksionues i markerëve. Ai donte t'i rendiste në korniza katrore (numri i rreshtave është i barabartë me numrin e kolonave).
   a) Korniza e parë kishte 9 rreshta me nga 9 markerë në çdo rresht. Sa markerë kishte gjithsej në këtë kornizë?
   b) Korniza e dytë kishte 121 markerë. Sa rreshta dhe kolona kishte kjo kornizë, nëse numri i rreshtave është i barabartë me numrin e kolonave?
5. Vlerësoni vlerën e $\sqrt[3]{75}$ në një vend dhjetor.
6. Në laborator ekzaminohet një kub metalik me vëllim 243 cm³. Sa është brinja e kubit?
7. Në kabinetin e matematikës janë vendosen kuti të vogla me shkumës, të cilat kanë formë kubi. Kutitë janë renditur në mënyrë që të formojnë një kub të madh.
   a) Nëse gjithsej ka 125 kuti, sa kuti ka në secilën brinjë të kubit të madh?
   b) Nëse secila kuti e vogël me shkumës ka vëllim 64 cm³, sa është gjatësia e brinjës së një kutie?

8. Njehsoni vlerën e shprehjes:

   a) $((-5)^3 + 16^2) \cdot (7^2 - 2^3)$, b) $(-11)^2 - 5 \cdot (3^3 + \sqrt[3]{-27})$, c) $(\sqrt{9} + 12^2) : \sqrt[3]{27}$.

9. Njehsoni vlerën e shprehjes dhe kontrolloni me kalkulatoR:

   a) $4a - \sqrt[3]{a-8} + \sqrt{a} + 2$ për $A = 16$, b) $(a + 2\sqrt[3]{a-17} - 4)^2 - \sqrt{a}$ për $a = 81$.

19. SHPREHJA E NUMRAVE NË FORMËN $a \cdot 10^k$, PËR $a, k \in \mathbb{N}$

Në jetën e përditshme shpesh hasim numra shumë të mëdhenj – numri i banorëve në një qytet, shtet ose kontinent të caktuar, distanca midis planetëve, numri i baktereve në një popullatë bakteresh, etj. Për të shënuar më lehtë numrat e tillë përdorim fuqitë me bazë 10.

Fuqitë me bazë 10 dhe tregues të fuqisë numër natyror

Dimë se dhjetë njësi formojnë një dhjetëshe, dhjetë dhjetëshe formojnë një qindëshe, dhjetë qindëshe formojnë një mijëshe, etj. Dhjetëshja, qindëshja, mijëshja, etj., quhen **njësi dhjetore**.

Aktivitet

Secilën njësi dhjetore mund ta shkruajmë në formë fuqie me bazë 10.

Ndiqni procedurën dhe krahasoni numrin e zerove në njësinë dhjetore me treguesin e fuqisë në shënimin e tij në formë fuqie me bazë 10.

$10 = 10 = 10^1$

$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$

$1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$

$100\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

$1\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

.....

Me siguri vërejtët se numri i zerove në njësinë dhjetore është i barabartë me eksponentin në shënimin e tij në formë fuqie me bazë 10, pra

$\underbrace{1000\cdots0}_{k \text{ zero}} = 10^k$, për $k \in \mathbb{N}$.

Shembulli 1

Shkruani në formë fuqie me bazë 10 njësinë dhjetore të përmendur në fjalinë:

a) Masa e Neptunit është rreth $\underbrace{1000\cdots0}_{26\text{ zero}}$ kg b) Masa e Hënës është rreth $\underbrace{1000\cdots0}_{23\text{ zero}}$ kg

a) $\underbrace{1000\cdots0}_{26\text{ zero}}=10^{26}$, b) $\underbrace{1000\cdots0}_{23\text{ zero}}=10^{23}$.

Detyra 1

Shkruani njësinë dhjetore që është e barabartë me fuqinë e përmendur në fjalinë:

a) Numri i qelizave në trupin e njeriut është 10^{14}. b) Masa e Diellit është rreth 10^{30} kg.

Për leximin dhe shkrimin e numrave të mëdhenj, disa fuqi të formës 10^k, për $k \in \mathbb{N}$, kanë emra të veçantë. Të tilla janë fuqitë:

10^3 lexohet **kilo** dhe shënohet me k, 10^9 lexohet **giga** dhe shënohet me G,

10^6 lexohet **mega** dhe shënohet me M, 10^{12} lexohet **tera** dhe shënohet me T.

Shembulli 2

Nikolija bleu një disk kompjuterik me memorie 1 gigabajt (GB). Adori llogariti se

$1\text{ GB} = 10^3\text{ MB}$.

A llogariti Adori saktë?

Adori llogariti saktë, sepse

1 GB $= 1\,000\,000\,000\text{ B} = 1000 \cdot 1\,000\,000\text{ B} = 10^3 \cdot 10^6\text{ B} =$ **10^3 MB.**

Shprehja e numrave në formën $a \cdot 10^k$, për $a, k \in \mathbb{N}$

Numrat që mund të shkruhen si prodhim i një numri natyror dhe një njësie dhjetore, mund të shkruhen edhe si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.

Numri 3 000 000 nuk mund ta shkruajmë si fuqi me bazë 10. Prandaj, fillimisht e shkruajmë si prodhim i dy numrave prej të cilëve njëri mund të shkruhet si fuqi me bazë 10, pra

$3\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.

Shembulli 3

Shkruani si prodhim të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10, numrin e përmendur në fjalinë:

a) Numri i rruazave të kuqe të gjakut në 1 l gjak është rreth $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ zero}}$.

b) Diametri i pjesës së dukshme të Universit është rreth $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ zero}}$ m.

a) $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ zero}} = 5\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{12\text{ zero}} = 5\cdot10^{12}$, b) $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ zero}}\ \text{m} = 88\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{25\text{ zero}}\ \text{m} = 88\cdot10^{25}\ \text{m}$.

Detyra 2

Shkruani si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10 numrin e përmendur në fjalinë:

a) Distanca nga Dielli në Neptun është rreth $45\underbrace{000\cdots0}_{11\text{ zero}}$ m.

b) Masa e Diellit është rreth $1\,99\underbrace{000\cdots0}_{28\text{ zero}}$ kg.

Shembulli 4

Maqedonia e Veriut ka $180\cdot10^4$ banorë, Greqia ka $10\cdot10^6$ banorë, kurse Bullgaria ka $69\cdot10^5$ banorë. Cili shtet ka më shumë banorë, e cili më pak?

$180\cdot10^4 = 180\cdot10^4$ $10\cdot10^6 = 1\,000\cdot10^4$ $69\cdot10^5 = 690\cdot10^4$	I shkruajmë numrat në mënyrë që të gjithë treguesit e fuqive në shënimet e reja të jenë të barabartë me 4 (më i vogli në mes të treguesve të fuqive).
$180 < 690 < 1\,000$	I krahasojmë shumëzuesit përpara fuqive përkatëse me bazë 10 si numra natyrorë.

Më pak banorë ka Maqedonia e Veriut, kurse më shumë banorë ka Greqia.

Shembulli 5

Shpejtësia e dritës është rreth 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Rruga që kalon drita gjatë një viti quhet vit dritë (ly). Përafërsisht sa kilometra është një vit dritë? Shkruani vit dritën si prodhim të dy numrave nga të cilët njëri është fuqi me bazë 10.

1 vit = 365 ditë 1 ditë = 24 orë 1 orë = 60 minuta 1 minutë = 60 sekonda

$1\ \text{ly} \approx 300\,000\cdot365\cdot24\cdot60\cdot60 = 9460800\,000\,000 = 94\,608\cdot10^8$ km.

Një vit dritë është rreth $94\,608\cdot10^8$ kilometra.

Detyra 3

Një superkompjuter përpunon 25 000 000 000 instruksione në sekondë.

a) Shkruani numrin e instruksioneve në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.

b) Krahasoni shpejtësinë e superkompjuterit me shpejtësinë e një kompjuteri të zakonshëm i cili përpunon 25 000 instruksione në sekondë.

Rrumbullakimi i numrave deri te njësia dhjetore më e afërt 10^k, $k \in \mathbb{N}$

Shprehja e numrave në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10 mund të lehtësojë procedurën e rrumbullakimit të numrave deri te njësia dhjetore më e afërt, pra deri te dhjetëshja, qindëshja, mijëshja më e afërt, etj.

Aktivitet

1. Me ndihmën e boshtit numerik, rrumbullakoni numrat 342, 367, 362, 347:
   a) në dhjetëshen më të afërt, b) në qindëshen më të afërt.

Cili nga rrumbullakimet është rrumbullakim me shtim, e cili rrumbullakim me shkurtim?

2. Ema dhe Admiri morën për detyrë të bëjnë një prezantim për procedurën e rrumbullakimit të numrave natyrorë, pa përdorimin e boshtit numerik.

Ema në letrën e saj prej kartoni i paraqiti rregullat:

1) Nëse shifra në të djathtë të **shifrës në të cilën rrumbullakojmë** është:
   - 5, 6, 7, 8 ose 9, atëherë shifrën në të cilën rrumbullakojmë e rrisim për 1. Themi **rrumbullakojmë me shtim**.
   - 0, 1, 2, 3 ose 4, atëherë shifra në të cilën rrumbullakosim mbetet e pandryshuar. Themi **rrumbullakojmë me shkurtim**.

2) Shifrat **në të djathtë të shifrës në të cilën rrumbullakojmë** i zëvendësojmë me shifrën 0.

3) Shifrat **në të majtë të shifrës në të cilën rrumbullakojmë** mbeten të pandryshuara, përveç kur kemi bartje gjatë rrumbullakimit me tepricë.

Në mënyrë të veçantë, nëse shifra në të cilën rrumbullakojmë është 9 dhe rrumbullakojmë me shtim, atëherë e zëvendësojmë me shifrën 0, kurse shifrën e parë në të majtë të saj e rrisim për 1. Nëse edhe shifra në të majtë është 9, bartja vazhdon majtas derisa të rritet një shifër më e vogël se 9.

Nëse në të majtë nuk ka shifër, në të majtë shkruhet shifra 1.

Admiri në letrën e tij prej kartoni tregoi disa shembuj:

Numri 825 i rrumbullakuar në numrin dhjetëshen më të afërt është numri 830. Shkruajmë $825 \approx 830$.	Numri 1237 i rrumbullakuar në qindëshen më të afërt është numri 1200. Shkruajmë $1237 \approx 1200$.
Numri 962 i rrumbullakuar në mijëshen më të afërt është numri 1000. Shkruajmë $962 \approx 1000$.	Numri 984 i rrumbullakuar në qindëshen më të afërt është numri 1000. Shkruajmë $984 \approx 1000$.

A është prezantimi i Emës dhe Admit i përpunuar saktë?

Procedura për rrumbullakimin e numrit natyror n deri te njësia dhjetore më e afërt 10k, $k \in \mathbb{N}$, konsiston në gjetjen e numrit natyror i cili ka k zero dhe është më i afërt me numrin n.

Shembulli 6

Rrumbullakoni numrin:
a) 1 430 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^5,
b) 22 372 000 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^8,
c) 1 950 000 000 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^{11}.

a) $1\,430\,000 \approx 1\,400\,000$
Rrumbullakimi është me shkurtim.

- Shifra 4 sipas vendit ka vlerën $4 \cdot 10^5$, pra shifra në të cilën rrumbullakojmë është 4.
- Në të djathtë të shifrës 4 është shifra 3, pra shifra 4 mbetet e pandryshuar.
- Shifrat në të majtë të shifrës 4 mbeten të pandryshuara, kurse shifrat në të djathtë të shifrës 4 i zëvendësojmë me shifrën 0.

b) $22\,372\,000\,000 \approx 22\,400\,000\,000$
Rrumbullakimi është me shtim.

- Shifra 3 sipas vendit ka vlerën $3 \cdot 10^8$, pra shifra në të cilën rrumbullakojmë është 3.
- Në të djathtë të shifrës 3 është shifra 7, prandaj shifra 3 zëvendësohet me shifrën 4.
- Shifrat në të majtë të shifrës 3 mbeten të pandryshuara, kurse shifrat në të djathtë të shifrës 3 i zëvendësojmë me shifrën 0.

c) $1\,950\,000\,000\,000 \approx 2\,000\,000\,000\,000$
Rrumbullakimi është me shtim.

- Shifra 9 sipas vendit ka vlerën $9 \cdot 10^{11}$, pra shifra në të cilën rrumbullakojmë është 9.
- Në të djathtë të shifrës 9 është shifra 5,
- prandaj shifra 9 zëvendësohet me shifrën 0 dhe shtojmë 1 para saj.
- Shifrat në të djathtë të shifrës 9 i zëvendësojmë me shifrën 0.

Detyra 4

Në laborator janë përgatitur 564 300 000 molekula të një përbërësi të ri për eksperiment.
a) Shkruani numrin e molekulave si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.
b) Rrumbullakoni numrin e molekulave deri te njësia dhjetore më e afërt 10^6.
c) Rrumbullakoni numrin e molekulave deri te njësia dhjetore më e afërt 10^7.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruani si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10 numrin:
   a) 40 000 000, b) 5 000 000 000, c) 600 000 000 000.
2. Në një gram tokë ka rreth 1 000 000 000 000 baktere. Shkruani numrin e baktereve në formë fuqie me bazë 10.
3. Në një spital janë përgatitur 3 200 000 doza vaksine për një vit.
   a) Shkruani numrin e dozave në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.
   b) Shpjegoni pse forma nën a) është më e lehtë për t'u përdorur sesa forma e dhënë.

4. Në një supermarket të madh ka 120 000 kanaçe me lëng. Pronari dëshiron ta shkruajë numrin e kanaçeve në një mënyrë me të cilën mund të krahasohet më lehtë me supermarketet e tjera. Shkruani numrin e kanaçeve në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.

5. Në tabelë është dhënë numri i banorëve në disa shtete. Radhitni numrat nga më i vogli te më i madhi.

shteti	numri i banorëve
India	$1\,420 \cdot 10^6$
SHBA	$335 \cdot 10^6$
Gjermania	$84 \cdot 10^6$
Malta	$52 \cdot 10^4$
Islanda	$38 \cdot 10^4$

6. Një makinë kryen 10 000 veprime aritmetike për një sekondë.
   a) Gjeni numrin e veprimeve aritmetike që ajo kryen për një orë.
   b) Shkruani atë numër në formë fuqie me bazë 10.

7. Një qytet i madh prodhon 4 275 000 kg mbeturina në ditë.
   a) Shkruani sasinë e mbeturinave në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.
   b) Paraqitni sasinë e mbeturinave të prodhuara për një muaj në formë prodhimi të një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.

8. Rrumbullakoni numrin:
   a) 44 162 000 000 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^{12},
   b) 78 000 000 000 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^{13},
   c) 3 989 000 000 000 000 në njësinë dhjetore më të afërt 10^{15}.

9. Në një fabrikë të madhe janë prodhuar 426 000 000 000 bateri për një vit.
   a) Shkruani numrin e baterive të prodhuara si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.
   b) Rrumbullakoni numrin e baterive deri te njësia dhjetore më e afërt 10^{10}.
   c) Rrumbullakoni numrin e baterive deri te njësia dhjetore më e afërt 10^{11}.

Hulumtim

Përmes internetit gjeni shembuj të tjerë të numrave të mëdhenj nga shkencat natyrore dhe shkruani si prodhim i një numri natyror dhe një njësie dhjetore.

20. SHUMËZIMI DHE PJESËTIMI I FUQIVE ME BAZA TË BARABARTA

Shumëzimi i fuqive me baza të barabarta

Aktivitet

Shqyrtoni dhe shpjegoni se si janë shumëzuar fuqitë me baza të barabarta:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$.

Tregoni hapat në të cilët janë përdorur përkufizimi i fuqisë dhe ligji asociativ i shumëzimit.

Rregulla vlen për prodhimin e çfarëdo dy fuqive me baza të barabarta.

Prodhimi i dy fuqive me baza të barabarta është i barabartë me fuqinë me të njëjtën bazë dhe tregues të fuqisë të barabartë me shumën e treguesve të atyre fuqive, pra
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $A \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Shembulli 1

Shkruani në formë fuqie prodhimin: a) $8^2 \cdot 8^6$, b) $(-3)^3 \cdot (-3)$, c) $x^m \cdot x^n$.

a) $8^2 \cdot 8^6 = 8^{2+6} = 8^8$, b) $(-3)^3 \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot (-3)^1 = (-3)^{3+1} = (-3)^4$, c) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Mund të vërejmë se rregulla vlen edhe për prodhimin e më shumë fuqive me baza të barabarta. Gjegjësisht, për shkak të ligjit asociativ të mbledhjes dhe ligjit asociativ të shumëzimit, kemi

$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}$.

Gjatë shumëzimit të fuqive me baza të barabarta, baza mbetet e njëjtë, kurse treguesit e fuqive mblidhen.

Shembulli 2

Shkruani në formë fuqie prodhimin:

a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3$, c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p$.

a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3 = 6^{2+6+3} = 6^{11}$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{7+2+5+3} = (-5)^{17}$,
c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p = y^{k+n+p}$.

Detyra 1

Shkruani në formë fuqie prodhimin:
a) $10^4 \cdot 10^6$, b) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$, c) $a^5 \cdot a^6$, ç) $(x-1)^4 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)^{12}$.

Shembulli 3

Thjeshtoni shprehjen: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7$.

a) $9x^7 \cdot 3x^3 = (9 \cdot 3)\, x^{7+3} = 27x^{10}$,
b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7 = (0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)(y+1)^{5+4+7} = 0{,}012(y+1)^{16}$.

Detyra 2

Thjeshtoni shprehjen: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $5a^7 \cdot 3a \cdot 0{,}1a^3$.

Shembulli 4

Luleshitësja Mila mbolli nga 2^2 lule në një saksi. Gjatë ditës mbolli në 2^3 saksi. Sa lule gjithsej mbolli ajo gjatë ditës?

Ta shkruajmë zgjidhjen në formë fuqie, e më pas ta llogarisim vlerën e saj. Kemi

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Luleshitësja Mila gjatë ditës mbolli 32 lule.

Detyra 3

Një fabrikë ditën e parë prodhoi 2^5 kanaçe. Sa kanaçe do të prodhojë për 4 ditë, nëse prodhimi dyfishohet çdo ditë?

Pjesëtimi i fuqive me baza të barabarta

Aktivitet

Zbuloni rregullën për pjesëtimin e fuqive me baza të barabarta sipas llogaritjeve:

$$3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4 = 3^{6-2}$$

Herësi i dy fuqive me baza të barabarta të ndryshme nga zero, te i cili treguesi i fuqisë i të pjesëtuarit është më i madh se treguesi I fuqisë i pjesëtuesit, është i barabartë me fuqinë me të njëjtën bazë dhe tregues të fuqisë të barabartë me diferencën e treguesve të të pjesëtuarit me pjesëtuesin e atyre fuqive, pra

$a^n : a^m = a^{n-m}$, $A \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ dhe $n > m$.

Shembulli 5

Shkruani në formë fuqie herësin: a) $11^8 : 11^3$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4$.

a) $11^8 : 11^3 = 11^{8-3} = 11^5$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4 = (-x)^{12-4} = (-x)^8$.

Detyra 4

Shkruani në formë fuqie herësin:
a) $5^6 : 5^4$, b) $(-4)^{12} : (-4)^7$, c) $b^{72} : b^{46}$, ç) $(x-y)^7 : (x-y)^3$.

Detyra 5

Cilat nga barazitë e mëposhtme janë të sakta:
a) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$, b) $3^5 \cdot 3^3 = 3^2$, c) $7^9 : 7^2 = 7^7$, ç) $x^x \cdot x^8 = x^{x-8}$, d) $m^3 : m = m^3$?
Arsyetoni përgjigjen.

Shembulli 6

Thjeshtoni shprehjen: a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5)$, b) $\dfrac{a^9}{a^4 \cdot a^2}$.

a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5) = x^{12} : x^{3+5} = x^{12} : x^8 = x^{12-8} = x^4$, b) $\dfrac{a^9}{a^4 \cdot a^2} = \dfrac{a^9}{a^{4+2}} = \dfrac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3$.

Detyra 6

Thjeshtoni shprehjen: a) $s^3 \cdot s^4 \cdot s^2 : s^5$, b) $n^4 \cdot n^1 : n^2$, c) $r^{10} : R^4 \cdot R^3 \cdot R^5$.

Detyra 7

Njehsoni vlerën e shprehjes: a) $(2^{14} \cdot 2^2) : 2^9$, b) $\dfrac{3^{14}}{3^7 \cdot 3^4}$, c) $\dfrac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$.

Shembulli 7

Një fabrikë gjatë ditës paketon 3^4 kuti me karamele. Gjatë natës, fabrika paketon 3^2 kuti me karamele.
Sa herë më shumë kuti me karamele paketon fabrika gjatë ditës sesa gjatë natës?

Le ta shkruajmë zgjidhjen në formë fuqie dhe le të llogarisim vlerën e saj:
$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.
Fabrika paketon 9 herë më shumë kuti me karamele gjatë ditës sesa gjatë natës.

Shembulli 8

Në një laborator kimik ruhet një tretësirë e natriumit (Na) në të cilën përqendrimi i grimcave rritet dhe zvogëlohet në varësi të kushteve. Shkencëtari shkroi një shprehje për përqendrimin

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4$.

Thjeshtoni shprehjen për përqendrimin.

Të gjitha fuqitë kanë bazën x, prandaj mund të zbatojmë rregullat për shumëzimin dhe pjesëtimin e fuqive me baza të barabarta.

Gjatë shumëzimit të fuqive me të njëjtën bazë, treguesit mblidhen:

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4 = x^8 : x^4$.

Gjatë pjesëtimit të fuqive me të njëjtën bazë, treguesit zbriten:

$C = x^8 : x^4 = x^4$.

Pas thjeshtimit, për përqendrimin marrim $C = x^4$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shumëzoni fuqitë: a) $6^5 \cdot 6^6$, b) $q^3 \cdot q^{42} \cdot q^2$, c) $t^4 \cdot t^1 \cdot t^2$.

2. Pjesëtoni fuqitë: a) $2^9 : 2^7$, b) $\frac{x^8}{x^3}$, c) $y^{17} : y^6$, ç) $(a-3b)^{19} : (a-3b)^{12}$.

3. Shkruani në formë fuqie prodhimin:
a) $5^4 \cdot (-5)^6$, b) $-x \cdot x^3 \cdot (-x)^3$, c) $(3-a)^2 \cdot (a-3)^6$.

4. Shkruani në formë fuqie shprehjen: a) $2^{41} - 2^{40} - 2^{39}$, b) $3^{51} : (2 \cdot 3^{46} + 7 \cdot 3^{46})$.

5. Thjeshtëzoni shprehjen: a) $15x^8 \cdot 3x^2$, b) $32y^4 : 8y^2$, c) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$, ç) $(y^7 + 2y^2z) : y$.

6. Njehsoni vlerën e shprehjes: a) $(7^4 \cdot 7^2) : 7^5$, b) $\frac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}}$, c) $\frac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \frac{16 \cdot 2^3}{(2^3 : 4) \cdot 2^4}$.

7. Njehsoni: a) $x^5 \cdot x^2$, për $x = -2$ dhe $x = 2$, b) $y^7 : y^4$, për $y = -3$ dhe $y = 3$.

8. Për cilën vlerë të n-së është e saktë barazia:
a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+n}$, b) $a^3 \cdot a^4 = a^{n+2}$, c) $4^5 : 4^3 = 4^{5-n}$, ç) $(x+1)^8 : (x+1)^n = (x+1)^2$?

9. Numri i baktereve në një popullatë bakteriale rritet 2 herë çdo 30 minuta. Sa baktere do të ketë në popullatë pas 3 orësh, nëse në fillim kishte 4 baktere?

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

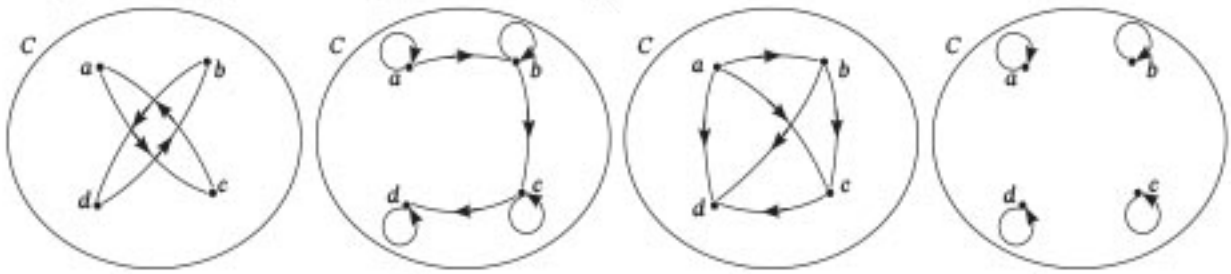
1. Në bashkësinë $A = \{2, 4, 8, 10\}$ është dhënë relacioni R: x është 2 herë më i madh se y.
   Paraqitni relacionin:
   a) në mënyrë tabelare, b) në mënyrë përshkruese, c) me graf.

2. Për secilin kontrollë me shkrim të matematikës, Mila mësoi në numër të ndryshëm orësh. Ajo i vuri në relacion orët e mësimit me numrin e pikëve të fituara. Të dhënat janë dhënë në tabelë.

dita e javës	koha e mësimit (në orë)	pikët e fituara
e hënë	1 orë	60 pikë
e martë	2 orë	70 pikë
e mërkurë	1,5 orë	65 pikë
e enjte	3 orë	85 pikë
e premte	2,5 orë	75 pikë

   Shpjegoni lidhjen midis kohës së mësimit dhe pikëve të fituara.
   Paraqitni relacionin e përcaktuar në këtë mënyrë: a) me graf, b) në mënyrë tabelare.

3. Cilët nga relacionet R_1, R_2, R_3 dhe R_4 në bashkësinë C = {a, b, c, d} në vizatimin 1 janë:
   a) refleksivë, b) simetrikë, c) antisimetrikë, ç) transitivë?



Relacioni R_1 Relacioni R_2 Relacioni R_3 Relacioni R_4

Vizatimi 1

4. Në bashkësinë e nxënësve të klasës së VIII janë dhënë relacionet:
   R_1: "... ka të njëjtin mbiemër me ..." dhe R_2: "... ka emër me gjatësi më të vogël se ...".
   a) Pa i paraqitur relacionet me graf, shqyrtoni vetitë: refleksivitetin, simetrinë, antisimetrinë dhe transitivitetin.
   b) Cili prej tyre është relacion ekuivalence, e cili është relacion renditjeje?

5. Në një seksion sportiv, nxënësit shkëmbejnë pajisje për ushtrime.
   Dihet se:
   Damjani i huazoi një top Emës; Ema i huazoi një litar për ushtrime Llukës;
   Lluka i huazoi një rreth Milës; Mila i huazoi një litar Damjanit.
   a) Paraqitni relacionin R_1: "... i huazoi rekuizite ...", midis nxënësve në mënyrë tabelare dhe me graf.
   b) Shqyrtoni nëse relacioni është refleksiv, simetrik dhe transitiv.
   c) A është relacioni R_2: "... që mund të marrë rekuizite përmes një zinxhiri huazimesh nga ..." (për shembull, nëse Damjani i huazoi Emës, dhe Ema Llukës, atëherë Damjani në mënyrë indirekte mund të marrë rekuizite nga Lluka) relacion ekuivalence?

6. Jepni një shembull që kënaq pohimin:

a) Të gjithë numrat natyrorë janë numra të plotë, por jo të gjithë numrat e plotë duhet të jenë numra natyrorë.

b) Të gjithë numrat e plotë janë numra racionalë, por jo të gjithë numrat racionalë duhet të jenë numra të plotë.

7. Shkruani numrin dhjetor periodik me thyesë:

a) 0,(9); b) 0,(143); c) 3,1(5); ç) 3,45(67); d) 80,23(54).

8. Në një kanistër ka 3,(4) l ujë. Shkruani sasinë e ujit në litra me thyesë.

9. Në një shitore, një litër qumësht kushton 1,2(5) euro.

a) Shkruani çmimin e qumështit me thyesë. b) Sa do të paguajë Astriti për 5 l qumësht?

c) Astriti ka një buxhet të kufizuar prej 10 eurosh. Sa litra qumësht mund të blejë për të shfrytëzuar buxhetin maksimalisht?

10. Në një punëtori artistike, 0,4 e ngjyrave është ngjyrë e kuqe, $\frac{3}{10}$ është ngjyrë e kaltër dhe 30% është ngjyrë e verdhë.

a) Cila ngjyrë është më e përfaqësuar?

b) Ndërtoni një tabelë në të cilën secilën sasi të ngjyrës do ta paraqitni me thyesë, numër dhjetor dhe përqindje.

11. Në një eksperiment bëhet një tretësirë. Në 400 ml ujë janë tretur 80 g kripë. Më pas janë shtuar 100 ml ujë dhe edhe 40 g kripë.

a) Njehsoni përqindjen e kripës në tretësirën fillestare.

b) Njehsoni përqindjen e re të kripës pas shtimit të ujit dhe kripës.

c) *A* u rrit apo u zvogëlua përqendrimi i kripës dhe për sa përqind?

ç) Shprehni përqendrimin e ri si thyesë të tretësirës totale.

12. Një basketbollist në fillim të sezonit shënon mesatarisht 20 pikë për ndeshje.
Në pjesën e dytë të sezonit rrit efikasitetin për 25%, kurse në pjesën e fundit e ul atë për 10% nga ajo vlerë e rritur. Sa pikë mesatarisht shënon në fund të sezonit?

13. Thjeshtoni përpjesëtimin:

a) 0,25 m : 75 cm : 0,5 dm, b) 3 kg : 0,75 kg : 250 g, c) 3 l : 1200 ml : 0,6 l.

14. Milani e kalon rrugën nga shtëpia në shkollë për*R*:
1 orë e 14 minuta, nëse ecën në këmbë, 30 minuta, nëse shkon me biçikletë,
18 minuta, nëse shkon me transport publik.
Shkruani dhe thjeshtoni përpjesëtimin e kohëve, të shkuarit në këmbë ndaj të shkuarit me biçikletë ndaj të shkuarit me transport publik.

15. Këndet e brendshme të një katërkëndëshi janë në përpjesëtim 7 : 3 : 5 : 3. Njehsoni madhësinë e këndit më të madh.

16. Për qumësht me çokollatë, përpjesëtimi i qumështit ndaj ujit ,ndaj çokollatës së shkrirë është 3 : 2 : 1. Dihet se Igori ka 15 l qumësht.

a) Sa litra ujë, e sa litra çokollatë të shkrirë i nevojiten?

b) Sa është sasia totale e qumështit me çokollatë?

17. Nina duhet të zhvendosë 30 kube në një distancë prej 5 m. Ajo e zhvendos një kub për 6 sekonda. Sa kohë i nevojitet për të zhvendosur 30 kube nëse zhvendos:
a) nga 2 kube përnjëherë, b) nga 3 kube përnjëherë?

18. Mensuri drejton një autobus me shpejtësi 80 km/h dhe e kalon rrugën e tij për 5 h 20 min. Tomislavi drejton një veturë me shpejtësi 100 km/h dhe e kalon rrugën e tij për 3 h 10 min. Cili prej tyre ka përshkuar rrugë më të gjatë?

19. Njehsoni:
a) $\frac{1}{2}$ e 36, b) $\frac{1}{4}$ e 72, c) $\frac{1}{2}$ e 36, ç) 0,1 ·180.

20. Në enë kishte $1\frac{1}{4}$ kg miell. Egzona përdori 0,7 kg për ëmbëlsira. Më pas Iliri shtoi edhe 1,2 kg miell. Sa miell ka tani në enë?

21. Një kimist përgatit një tretësirë në laborator. Në gotë kishte 2,5 l tretësirë. Gjatë ngrohjes avulluan 0,75 l, e më pas shtoi edhe $1\frac{1}{4}$ l tretësirë të freskët.
a) Sa është sasia totale e tretësirës në gotë pas të gjitha ndryshimeve?
b) Nëse kimisti dëshiron të ketë 4 l tretësirë, edhe sa litra duhet të shtojë ose të heqë?

22. Në lëndën e gjeografisë, nxënësit studiojnë lumenjtë dhe mesataret e sasive prurëse të tyre (prurje).
Lumi *A* ka një prurje mesatare prej 320,5 m^3/s, kurse lumi *B* ka një prurje mesatare prej 145,25 m^3/s. Inxhinierët planifikojnë ndërtimin e një dige të përbashkët. Ata vendosin që në digë të shkojnë $\frac{3}{4}$ e prurjes së lumit *A* dhe 85% e prurjes së lumit *B*.
a) Sa do të jetë prurja e re e lumit A?
b) Sa do të jetë prurja e re e lumit B?
c) Sa do të jetë prurja totale që do të derdhet në digë nga të dy lumenjtë?
ç) Për sa ka prurje më të madhe lumi *A* në raport me lumin *B* pas ndryshimeve?

23. Njehsoni në mënyrën më të lehtë:
a) $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}-6\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}$, b) $-4\cdot\frac{-5}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-3)$.

24. Njehsoni vlerën e shprehjes: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}+1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{13}\right)\right]-[(0,5-2,5)]\cdot\frac{1}{2}$.

25. Një shitore për fruta bleu 25 kg mollë me çmim 1,8 euro për kilogram. Për transport dhe paketim në mënyrë shtesë pagoi 12,5 euro. Më pas shitorja shiti $\frac{3}{5}$ e mollëve me çmim 2,4 euro për kilogram, kurse pjesën e ngelur i shiti me zbritje prej 0,3 euro për kilogram nga çmimi fillestar. Sa fitim pati shitorja pas shitjes së mollëve?

26. Shndërroni në thyesë të zakonshme:

a) $\dfrac{1:2\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}}:\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}}{5:1\frac{7}{8}}$, b) $\dfrac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{23}}{6\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot 7}{7\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{31}}$.

27. Sa herë do të rrotullohet rrota e biçikletës në një shteg prej 51 m, nëse perimetri i rrotës është $1\frac{1}{4}$m m?

28. Algat në një akuarium dyfishohen çdo 6 orë. Sa alga do të ketë në akuarium pas 24 orësh, nëse në fillim kishte 5 alga?

29. Një robot niset nga origjina e boshtit x. Në çdo lëvizje, e dyfishon largesën nga origjina dhe ndryshon drejtimin në mënyrë alternative nga e djathta në të majtë. Pozicioni i tij pas n lëvizjesh është $(-2)^n$ metra.

a) Në cilin pozicion është roboti pas lëvizjes së parë, e në cilin pas lëvizjes së dytë?

b) Pas sa lëvizjesh do të jetë roboti në të majtë të origjinës, në largësi 8 m?

30. Vlerësoni në një vend dhjetor vlerën e: $\sqrt{51}$, b) $\sqrt[3]{100}$.

Më pas, kontrolloni vlerësimin tuaj me kalkulator.

31. Shkencëtarët hulumtojnë një kub të vogël metalik i cili përdoret si pjesë në bateritë për makina elektrike. Ai kub ka vëllim prej 216 cm^3.

a) Sa është gjatësia e brinjës së kubit metalik?

b) Sa është syprina e kubit metalik?

c) Në laborator bëhen kopje miniaturë të të njëjtit kub me brinjë 6 herë më të vogël. Sa është vëllimi i kubit miniaturë?

32. Njehsoni vlerën e shprehjes:

a) $3 \cdot 5^2 + 4^3 - 5 \cdot 7^3$,

b) $(-2)(-3)(-4)^2-(-1)^5(-2)^2$,

c) $100 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot \sqrt{169} \cdot (-3)^3 - 0{,}3\sqrt[3]{27}$,

ç) $\left(2^3 + \sqrt{256}\right) : \left((-3)^5 - \sqrt[3]{125}\right)$.

Kontrolloni me kalkulator.

33. Në tabelë janë dhënë largesat e planetëve nga Dielli.

a) Shkruani largesat si prodhim i një numri natyror dhe një fuqie me bazë 10.

b) Radhitni largesat nga më e vogla te më e madhja.

planeti	largesa nga Dielli në km
Merkuri	58 000 000
Venera	108 000 000
Marsi	228 000 000
Toka	150 000 000
Jupiteri	780 000 000
Saturni	1 430 000 000
Urani	2 870 000 000
Neptuni	4 500 000 000

34. Buxheti vjetor i një shteti është 87 456 000 000 denarë. Rrumbullakojeni në njësinë dhjetore më të afërt 10^9.

35. Thjeshtoni shprehjen:

a) $(x^{12} : x^6) \cdot (x^7 : x^3) \cdot (x^7 : x^3 \cdot x^9)$, b) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^3}{3a^5}$.

36. Në një fabrikë prodhohen kube metalikë. Secili kub ka brinjë me gjatësi 2 cm.

a) Shkruajeni në formë fuqie, e më pas njehsoni syprinën e dy faqeve të kubit.

b) Shkruajeni në formë fuqie, e më pas njehsoni syprinën e katër faqeve të kubit.

Tema 2:

GJEOMETRIA

Rezultatet e të nxënit:

Gjatë studimit të kësaj teme do të aftësoheni të:

- zgjidhni probleme duke përdorur: kënde me krahë reciprokisht paralelë, kënde me krahë reciprokisht normalë, kënd periferik dhe qendror mbi të njëjtin hark rrethor, pjesë të rrethit dhe të vijës rrethore.
- zbatoni puthitshmërinë e trekëndëshit në zgjidhjen e problemeve nga konteksti i përditshëm.
- përdorni karakteristikat dhe vetitë e formave 2D (trekëndëshi dhe katërkëndëshi) në zgjidhjen e problemeve me konstruktime dhe teoremën e Pitagorës.
- demonstroni të kuptuarit për poliedrin, poliedrin e rregullt dhe lidhjen midis numrit të faqeve, brinjëve dhe kulmeve te poliedrat.
- transformoni format 2D duke kombinuar transformimet: simetria boshtore, translacioni dhe rotacioni.

1. KËNDET ME KRAHË RECIPROKISHT PARALELË DHE KËNDET ME KRAHË RECIPROKISHT NORMALË

Këndet me krahë reciprokisht paralelë

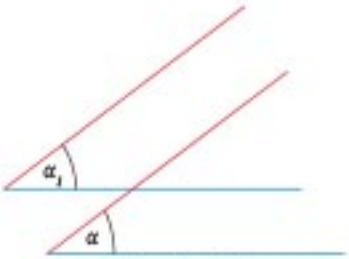
Aktivitet

1. Në parking janë vizatuar vija paralele për të shënuar vendet e parkimit si në figurën 1.
Cila është pozita e ndërsjellë e krahëve përkatëse të këndeve 1 dhe 2?

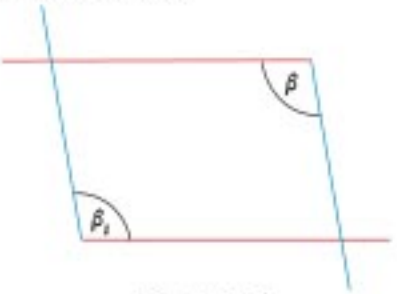


Figura 1

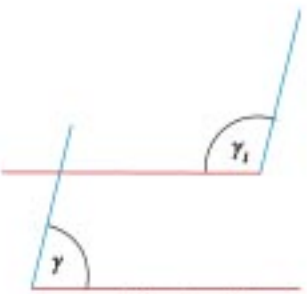
Këndet α dhe α_1 në vizatimin 1a kanë krahë reciprokisht paralelë me kahe të njëjta.
Këndet β dhe β_1 në vizatimin 1b kanë krahë reciprokisht paralelë me kahe të kundërta.
Këndet γ dhe γ_1 në vizatimin 1c kanë krahë reciprokisht paralelë. Njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër janë me kahe të kundërta.



Vizatimi 1a



Vizatimi 1b



Vizatimi 1c

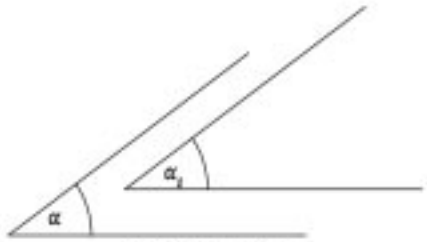
Çiftet e këndeve α dhe α_1, β dhe β_1, γ dhe γ_1 janë shembuj të këndeve me krahë reciprokisht paralelë.

Detyra 1

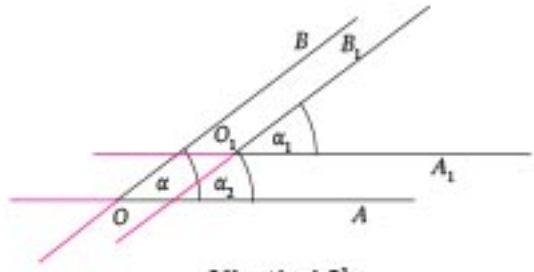
Vizatoni dy kënde me krahë reciprokisht paralelë:
a) me kahe të njëjta, b) me kahe të kundërta,
c) njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër me kahe të kundërta.

Shembulli 1

Në vizatimin 2a, këndet α dhe α_1 kanë krahë reciprokisht paralelë, me kahe të njëjta. Me kujdes matni, e më pas krahasoni madhësitë e tyre. Çfarë vëreni? A mund të arrini në të njëjtin përfundim pa matur?



Vizatimi 2a



Vizatimi 2b

Pas matjes, me siguri vërejtët se këndet e dhënë janë të barabartë, pra se $\alpha = \alpha_1$.
Për të përcaktuar pa matur se $\alpha = \alpha_1$, do t'i vazhdojmë krahët e këndeve në drejtëza (vizatimi 2b). Atëherë vërejmë se:
$OB \parallel O_1B_1$ dhe OA është transversale (prerëse), pra $\alpha = \alpha_2$ (si kënde përgjegjëse);
$OA \parallel O_1A_1$ dhe O_1B_1 është transversale, pra $\alpha_2 = \alpha_1$ (si kënde përgjegëse);
Nga $\alpha = \alpha_2$ dhe $\alpha_2 = \alpha_1$ marrim se $\alpha = \alpha_1$.

Shembulli 2

Shpjegoni pse këndet β dhe β_1 në vizatimin 3a janë të barabartë.



Vizatimi 3a

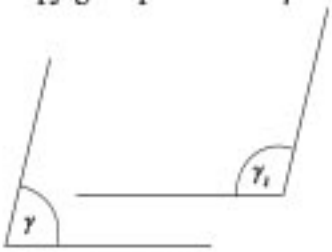


Vizatimi 3b

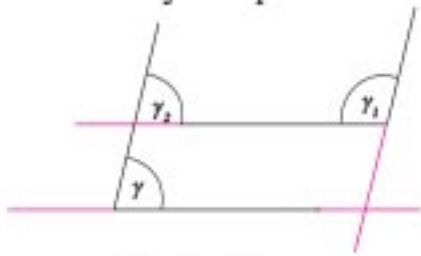
Këndet β dhe β_1 kanë krahë reciprokisht paralelë me kahe të kundërta. Nëse i vazhdojmë krahët e këndeve në drejtëza (vizatimi 3b), vërejmë se:
$\beta = \beta_2$ (si kënde përgjegjëse) dhe $\beta_2 = \beta_1$ (si kënde të anëshkruara (ndërruese ose alternative)).
Nga $\beta = \beta_2$ dhe $\beta_2 = \beta_1$ rrjedh se $\beta = \beta_1$.

Shembulli 3

Shpjegoni pse këndet γ dhe γ_1 në vizatimin 4a janë suplementarë.



Vizatimi 4a



Vizatimi 4b

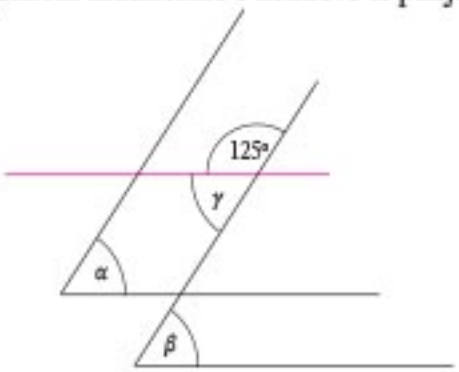
Këndet γ dhe γ_1 kanë krahë reciprokisht paralelë, njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër me kahe të kundërta.

Nëse i vazhdojmë krahët e këndeve në drejtëza (vizatimi 4b), vërejmë se:
$\gamma = \gamma_2$ (si kënde përgjegjëse) dhe $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ (janë kënde suplementarë si kënde të brendshme të njëanshme (të kundërt)).
Nga $\gamma = \gamma_2$ dhe $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ fitojmë se $\gamma + \gamma_1 = 180°$, pra γ dhe γ_1 janë kënde suplementarë.

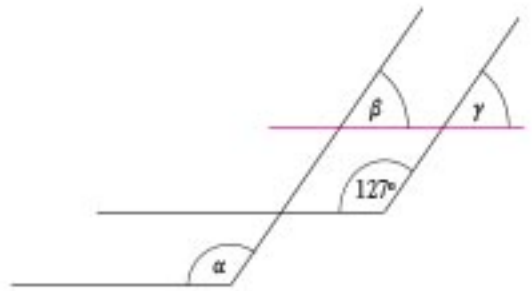
Këndet me krahë reciprokisht paralelë janë:
- të barabartë, nëse të dy çiftet e krahëve janë me kahe të njëjta ose me kahe të kundërta,
- suplementarë, nëse njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër me kahe të kundërta.

Detyra 2

Njehsoni madhësinë e këndeve të panjohura në vizatimin 5a dhe vizatimin 5b.



Vizatimi 5a



Vizatimi 5b

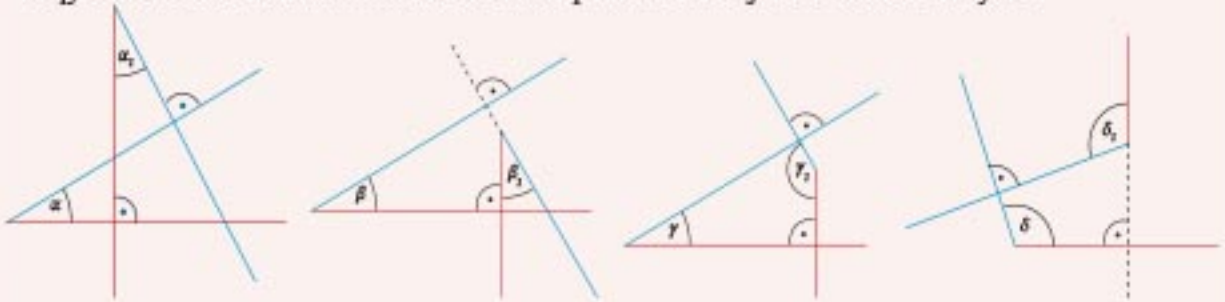
Detyra 3

Në planin e një qyteti janë paraqitur dy rrugë paralele: Rruga *a* dhe Rruga B. Rruga Diagonalja i pret të dy rrugët, dhe në kryqëzimin me Rrugën *A* formon kënd prej 120°.
Në kryqëzimin e Rrugës *B* dhe Diagonalës janë formuar katër kënde.
a) Vizatoni një pjesë të planit me tre rrugët dhe shënoni këndet.
b) Gjeni madhësinë e këndeve në kryqëzimin me Rrugën *B* dhe Diagonalen.

Kënde me krahë reciprokisht normalë (pingulë)

Aktivitet

Shqyrtoni këndet në vizatimin 6. Cila është pozita e ndërsjellë e krahëve të tyre?



Vizatimi 6

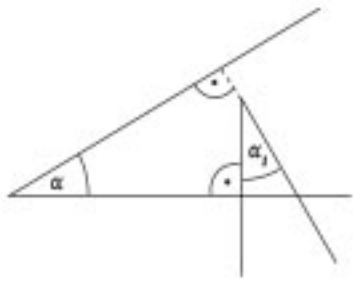
Rishkruani dhe plotësoni tabelën.

çifti i këndeve	madhësia e këndeve	krahasimi i këndeve (të barabartë apo të ndryshëm)	shuma e këndeve
α dhe α_1			
β dhe β_1			
γ dhe γ_1			
δ dhe δ_1			

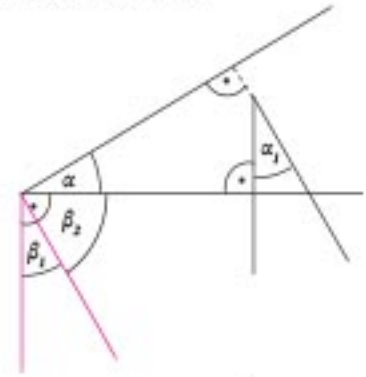
Çiftet e këndeve α dhe α_1, β dhe β_1, γ dhe γ_1 , δ dhe δ_1 të shqyrtuara në aktivitet janë shembuj të **këndeve me krahë reciprokisht normalë (pingulë)**.

Për të përcaktuar lidhjen midis madhësive të dy këndeve me krahë reciprokisht normalë, do t'i shqyrtojmë dy rastet e mëposhtme:

1. Në vizatimin 7a, këndet α dhe α_1 janë krahë reciprokisht normalë.



Vizatimi 7a



Vizatimi 7b

Në vizatimin 7b, këndi β_1 është vizatuar me kulm si të këndit α, ashtu që α_1 dhe β_1 janë krahë reciprokisht paralelë me kahe të njëjta. Vërejmë se:

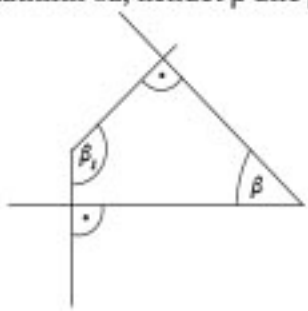
$\alpha_1 = \beta_1$ (si kënde me krahë reciprokisht paralelë me kahe të njëjta).

$\alpha + \beta_2 = 90°$ dhe $\beta_1 + \beta_2 = 90°$;

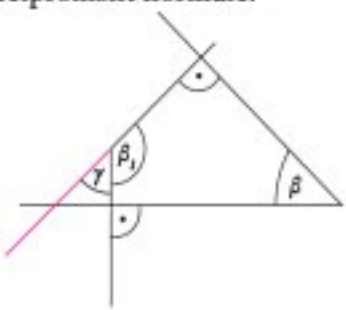
Nga $\alpha = 90° - \beta_2$ dhe $\beta_1 = 90° - \beta_2$ fitojmë se $\alpha = \beta_1$;

Nga $\alpha = \beta_1$ dhe $\alpha_1 = \beta_1$ fitojmë se $\alpha = \alpha_1$.

2. Në vizatimin 8a, këndet β dhe β_1 janë krahë reciprokisht normalë.



Vizatimi 8a



Vizatimi 8b

Në vizatimin 8b, këndi γ është vizatuar me kulm si të këndit β_1, ashtu që γ dhe β janë krahë reciprokisht normalë. Vërejmë se:

$\beta = \gamma$ (kënde me krahë reciprokisht normalë, si në rastin e mëparshëm),

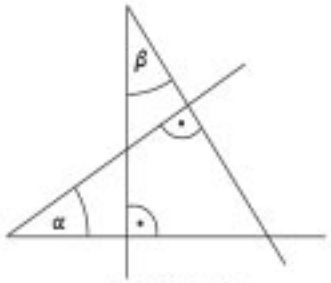
$\gamma + \beta_1 = 180°$;

Nga $\beta = \gamma$ dhe $\gamma + \beta_1 = 180°$ fitojmë $\beta + \beta_1 = 180°$.

Këndet me krahë reciprokisht normalë janë ose të barabartë ose suplementarë.

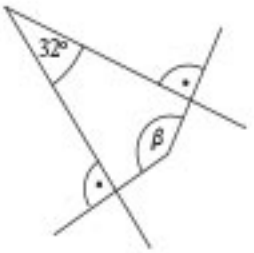
Detyra 4

a) Si janë ndërmjet tyre këndi α dhe këndi β në vizatimin 9?



Vizatimi 9

b) Llogaritni madhësinë e këndit β në vizatimin 10.



Vizatimi 10

Detyra 5

Këndet α dhe β janë kënde me krahë reciprokisht normalë. Nëse $\alpha = 151°$, atëherë sa mund të jetë këndi β? Ndërtoni vizatim.

Detyra 6

Në një oborr, gardhi dhe shtegu janë vendosur ashtu që priten në një kënd prej 60°. Pronari vendosi një stol ashtu që brinja më e gjatë e tij është normale me gardhin. Më pas, në vazhdim, mbolli një lehe me lule normale me shtegun.

a) Vizatoni një skicë të gardhit, shtegut, stolit dhe lehes me lule.

b) Sa është këndi midis stolit dhe lehes me lule?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në figurën 2 është dhënë plani i një pjese të lagjes me shtëpi dhe shesh lojërash.
   a) Përshkruani dhe plotësoni me shenjat:
   „ || “ – „ ... është paralel me ... “ dhe
   „⊥“ – „ ... është normal me ... “:
   PM ___ SQ, PN ___ SR, DA ___ AB,
   DC ___ CB, RT ___ NO.
   b) Shkruani çiftet e këndeve me krahë reciprokisht paralelë.
   c) Shkruani çiftet e këndeve me krahë reciprokisht normalë..
   ç) Nëse $\measuredangle MPN = 65°$, njehsoni madhësinë e $\measuredangle ONP$, $\measuredangle QSR$ dhe $\measuredangle SRT$.
   d) Nëse $\measuredangle ADC = 110°$, njehsoni madhësinë e $\measuredangle ABC$.

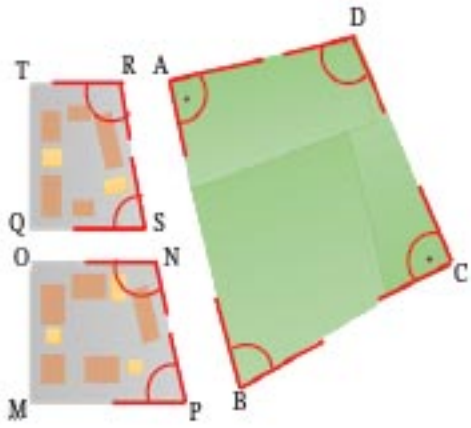


Figura 2

2. Vizatoni një kënd të ngushtë të çfardoshëm α, një kënd të gjerë të çfardoshëm β dhe pikat S dhe P, në zonat e tyre të brendshme përkatëse. Vizatoni këndin:
   a) ASB, krahët e të cilit janë paralelë me krahët e këndit α, me kahe të njëjta,
   b) CPD, krahët e të cilit janë paralelë me krahët e këndit β, me kahe të kundërta.

3. Vizatoni këndet *AOB* dhe *COD* dhe pikat *T* dhe Q në zonat e tyre të brendshme përkatëse. Vizatoni këndin:
   a) *ETF*, krahët e të cilit janë paralelë me krahët e këndit *AOB*, dhe krahu *TE* ka të njëjtin kah me krahun *OA*, kurse krahu *TF* kah të kundërt me *OB*.
   b) *GQH*, krahët e të cilit janë paralelë me krahët e këndit *COD*, dhe krahu *QH* ka kah të kundërt me krahun *OC*, kurse krahu *QG* ka të njëjtin kah me *OD*.

4. Vizatoni këndin α dhe në zonën e tij të brendshme pikën M. Më pas vizato këndin me kulm në pikën M dhe krahë që janë reciprokisht normalë me krahët e këndit α. Sa kënde të tillë ekzistojnë?

5. Njëri nga dy këndet me krahë reciprokisht paralelë është 56°. Sa është këndi tjetër nëse:
   a) krahët e tyre janë me kahe të njëjta, b) krahët e tyre janë me kahe të kundërta,
   c) njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër me kahe të kundërta?

6. Gjeni këndet α dhe β me krahë reciprokisht paralelë, nëse:
   a) shuma e tyre është 154°, b) ndryshimi i tyre është 76°.

7. Gjej këndet α dhe β me krahë reciprokisht normalë, nëse: a) $\alpha = 125° + \beta$, b) $\alpha = 3\beta$.

8. Dy rrugë paralele priten me një rrugë të tretë si në figurën 3. Gjeni këndin α.

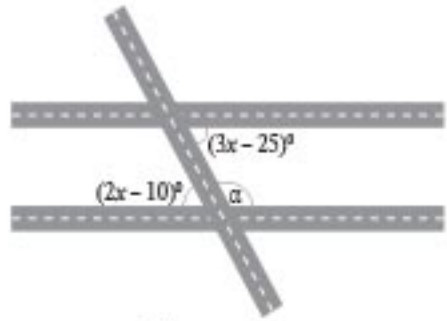


Figura 3

9. Në një qytet, rrugët *A* dhe *B* priten nën një kënd prej 55°. Në plan, urbanisti vizaton rrugën tërthore *C*, ashtu që *C* është normale me *A*, dhe rrugën D, ashtu që *D* është normale me B.
   a) Vizatoni një skicë me rrugët *A*, *B*, *C* dhe *D*.
   b) Sa është këndi midis rrugëve *C* dhe D?
   c) Cilit lloj këndesh i përkasin këndi në mes *A* dhe *B* dhe këndi në mes *C* dhe D?

2. VIJA RRETHORE, RRETHI DHE PJESËT E TYRE

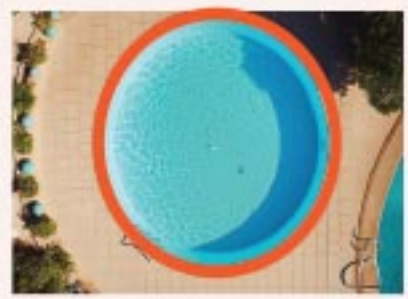
Vija rrethore dhe rrethi

Aktivitet

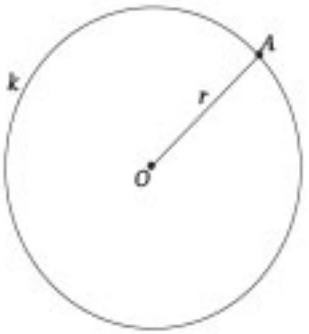
Konceptet e vijës rrethore dhe rrethit janë ndër konceptet më të rëndësishme në gjeometri.

a) Në figurën 1, përcaktoni se çfarë paraqet vijë rrethore, e çfarë rreth.

b) Cili është dallimi midis këtyre dy formave?


Figura 1

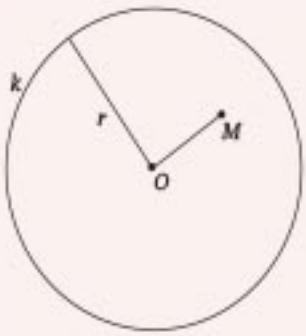
Të rikujtojmë, **vija rrethore** është bashkësia e të gjitha pikave A në rrafsh të cilat janë në largësi të barabartë r nga një pikë e dhënë O në rrafsh (vizatimi 1).
Gjatësia $r = \overline{OA}$ quhet **rreze** e vijës rrethore.
Por, rreze të vijës rrethore mund të nënkuptojë edhe segmentin që lidh qendrën me një pikë të çfarëdoshme nga vija rrethore.
Vija rrethore me qendër në pikën O dhe rreze r shënohet me k(O, r) ose vetëm me k.



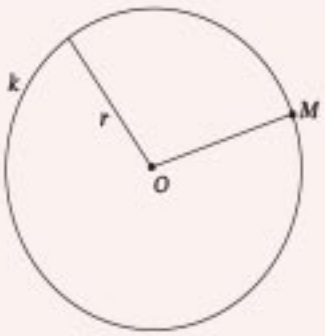
Vizatimi 1

Aktivitet

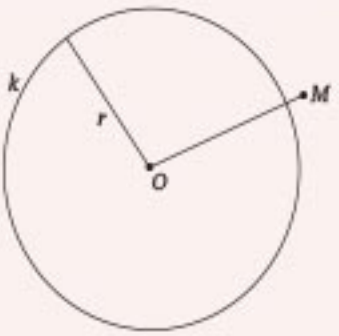
Cila është pozita e pikës M në raport me vijën rrethore k, nëse largesa e saj nga qendra O e vijës rrethore është:
a) më e vogël se r (vizatimi 2a) b) e barabartë me r (vizatimi 2b) c) më e madhe se r (vizatimi 2c).



Vizatimi 2a

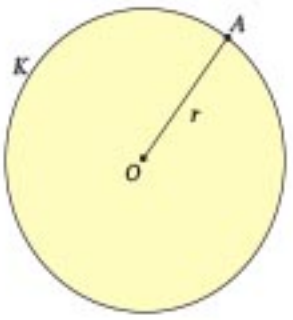


Vizatimi 2b



Vizatimi 2c

Të rikujtojmë, **rrethi** është bashkësia e të gjitha pikave A në rrafsh të cilat janë në largësi më të vogël ose të barabartë me r nga një pikë e dhënë O në rrafsh (Vizatimi 3).
Secili rreth përbëhet nga një vijë rrethore dhe brendësia e tij.
Nëse pika A është në vijën rrethore, atëherë gjatësia $r = \overline{OA}$ quhet **rreze** e rrethit.
Rrethi me qendër në pikën O dhe rreze r shënohet me K(O, r) ose vetëm me K.



Vizatimi 3

Detyra 1

Vizatoni:
a) një vijë rrethore me qendër arbitrare dhe rreze 2 cm,
b) një rreth me qendër arbitrare dhe rreze 3 cm,
c) dy vija rrethore koncentrike me qendër arbitrare dhe rreze 3 cm dhe 4 cm.

Unaza rrethore

Aktivitet

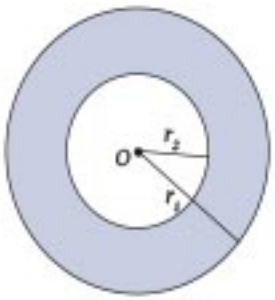
Në figurën 2 janë dhënë disa objekte nga rrethina juaj. A vëreni ndonjë formë 2D që shfaqet tek të gjitha objektet? Përshkruajeni me fjalë.



Figura 2

Unazë rrethore është pjesa e rrafshit e kufizuar me dy vija rrethore koncentrike.

Në vizatimin 4 është paraqitur një unazë rrethore e kufizuar me dy vija rrethore koncentrike me qendër në pikën O dhe rreze r_1 dhe r_2.
Të dy vijat rrethore koncentrike i përkasin unazës rrethore.



Vizatimi 4

Detyra 2

Vizatoni dy vija rrethore koncentrike me rreze 3 cm dhe 5 cm, e më pas ngjyrosni unazën rrethore të përcaktuar prej tyre.

Detyra 3

Një teren sportiv ka një pistë për vrapim në formë unaze rrethore të përcaktuar me vija rrethore me rreze 10 m dhe 12 m.
a) Vizatoni një skicë të terenit dhe ngjyroseni terenin.
b) Sa është gjerësia e pistës?

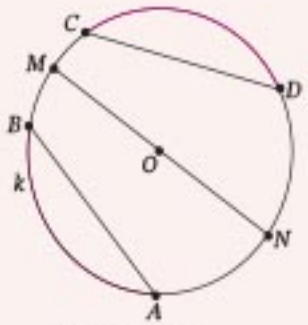
Segmenti rrethor

Aktivitet

1. a) Çfarë është **kordë** e vijës rrethore? Emërtoni kordat në vijën rrethore k të dhënë në vizatimin 5.

b) Çfarë është **diametër** i vijës rrethore? Emërtoni diametrin e vijës rrethore të dhënë.

c) Çfarë është **hark rrethor** në vijën rrethore? Emërtoni harqet rrethore që u përgjigjen kordave AB dhe CD, përkatësisht.
Si quhet harku rrethor që i përgjigjet diametrit MN?



Vizatimi 5

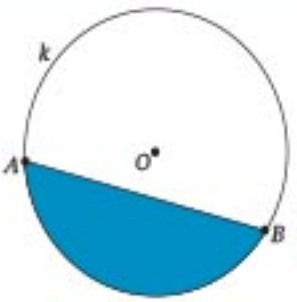
ç) Emërtoni kordat që u përgjigjen harqeve rrethore $\overset{\frown}{AB}$ dhe $\overset{\frown}{CD}$, përkatësisht. Cila kordë i përgjigjet harkut rrethor $\overset{\frown}{MN}$?

2. Përshkruaj formën 2D që shfaqet objektet në figurën 3.


Figura 3

Segmenti rrethor është pjesa e rrethit e kufizuar me një kordë dhe harkun rrethor që i përgjigjet asaj korde.
Nëse korda është diametri i rrethit, atëherë segmenti rrethor quhet **gjysmërreth**.

Në vizatimin 6 është paraqitur një segment rrethor të cilin korda AB e ndanë nga rrethi.
Korda AB dhe harku rrethor $\overset{\frown}{AB}$ i përkasin segmentit rrethor.



Vizatimi 6

Detyra 4

Vizatoni një vijë rrethore me rreze 4 cm dhe një kordë MN me gjatësi 6 cm. Më pas ngjyrosni segmentin rrethor më të vogël të përcaktuar me kordën MN dhe harkun rrethor $\overset{\frown}{MN}$ që i përgjigjet kordës.

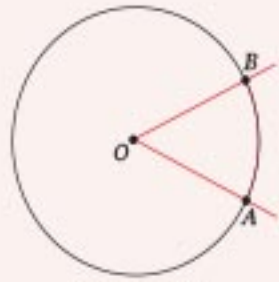
Detyra 5

Marko ndërton një dekorim për shfaqjen e shkollës. Ai preu dy copa, njërën nga rrethi me ngjyrë të gjelbër dhe tjetrën nga rrethi me ngjyrë të kuqe. Në cilin rast Marko mund të formojë një rreth nga copat e prera? Arsyetoni përgjigjen.

Sektori rrethor

Aktivitet

1. Si quhet këndi *AOB* në vizatimin 7?



Vizatimi 7

2. Përshkruani formën 2D që shfaqet te të gjitha objektet në figurën 4.



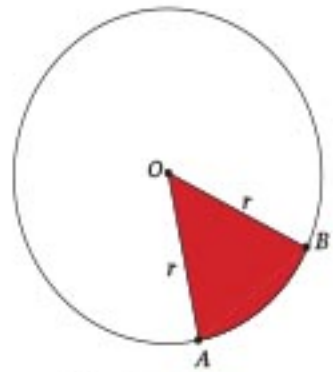
Figura 4

Sektor rrethor është pjesa e rrethit e kufizuar me dy rreze të tij dhe harkun rrethor që ndodhet midis tyre.

Në vizatimin 8 është paraqitur një sektor rrethor i kufizuar me dy rreze *OA* dhe *OB* dhe harkun rrethor $\overset{\frown}{AB}$ që ndodhet midis tyre.

Rrezet *OA* dhe *OB* dhe harku rrethor $\overset{\frown}{AB}$ i përkasin sektorit rrethor.

Çdo këndi qendror i përgjigjet një sektor rrethor dhe anasjelltas, çdo sektori rrethor i përgjigjet një kënd qendror.



Vizatimi 8

Detyra 6

Vizatoni një rreth me rreze 3 cm, e më pas ngjyrosni një sektor rrethor të përcaktuar me dy rreze të tij dhe harkun rrethor që i përgjigjet një këndi qendror prej 90°.

Detyra 7

Pica (ushqim me origjinë italiane) ka formë rrethi me rreze $r = 15$ cm. Pica është prerë në 8 copa të barabarta.

a) Çfarë forme gjeometrike ka një copë pice?

b) Sa është këndi qendror i një cope pice?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në një parcelë, në formë rrethi, ndodhet një pellg me lëndinë rreth tij dhe një urë mbi pellgun (figura 5).
   a) Si quhet pjesa e parcelës rrethore që është lëndinë?
   b) Si quhet pjesa më e vogël e pellgut e ndarë nga ura?
   c) Si quhet pjesa e pellgut ku ndodhen rosat?
   ç) Krahasoni sipas madhësisë pjesën me rosat dhe pjesën me zambakët e bardhë të ujit.
   d) Sa segmente rrethore janë paraqitur në figurën e pellgut?
   dh) Sa sektorë rrethorë janë paraqitur në figurën e pellgut?

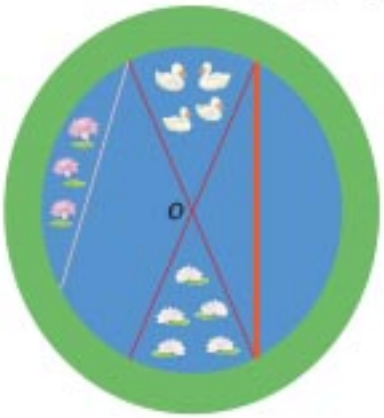


Figura 5

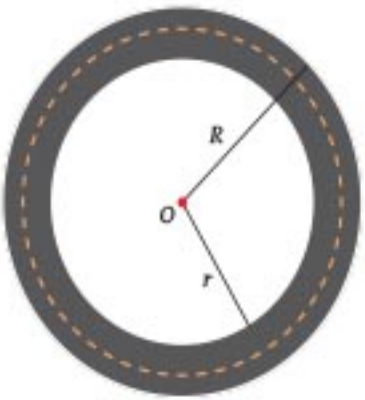
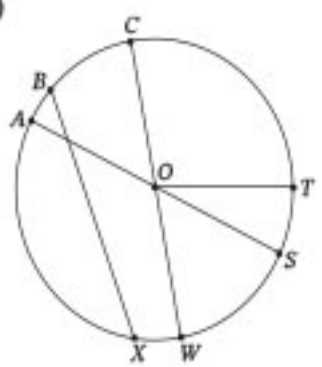


Figura 6

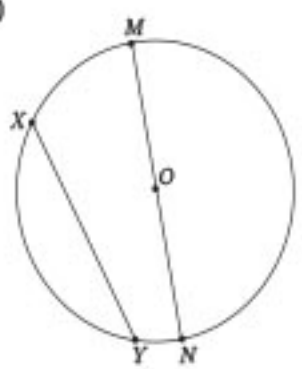
2. Sa është e gjerë rruga e pistës rrethore në figurën 6, nëse $R = 87{,}2$ m dhe $r = 82{,}7$ m?

3. Emërtoni të gjithë sektorët rrethorë që i shihni në vizatimin 9.

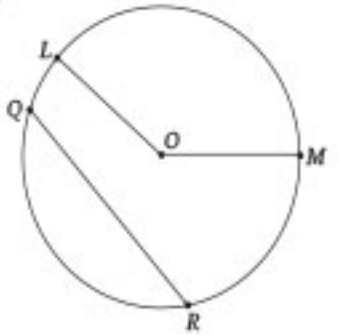
a)



b)



c)



Vizatimi 9

4. Emërtoni të gjithë segmentët rrethorë që i shihni në vizatimin 9.

5. Vizatoni:
   a) unazë rrethore të kufizuar me dy vija rrethore koncentrike me rreze 2 cm dhe 5 cm,
   b) sektor rrethor me rreze 3 cm që i përgjigjet një këndi qendror prej 120°,
   c) segment rrethor me rreze 4 cm që i përgjigjet një këndi qendror prej 60°.

6. Detyrë projektuese

Nga 4 pllaka me dizajn identik janë formuar 2 figura të ndryshme si në figurën 7.



Figura 7

Vizatoni dizajnet e dhëna (figura 8) në një pllakë në formë katrori me brinjë 10 cm. Ndërtoni të paktën 4 pllaka identike nga kartoni dhe vendosini si në shembull. Përpiquni ta bëni këtë në më shumë mënyra.

a) b)



Figura 8

3. KËNDI PERIFERIK

Aktivitet

Ana ndodhet në qendër të vijës rrethore O. Ajo sheh harkun rrethor midis dy pemëve nën këndin *BOC*. Iliri ndodhet në pikën A të vijës rrethore.

a) Si quhet këndi *BOC*?

b) Cilët do të jenë kulmi dhe krahët e këndit nën të cilin ai do të shohë të njëjtin hark rrethor nga pika *A* (figura 1)?



Figura 1

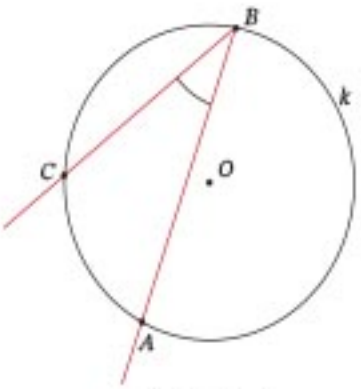
Këndi, kulmi i të cilit është në vijën rrethore, kurse krahët e tij e presin vijën rrethore, quhet **kënd periferik**.

Në vizatimin 1 janë dhënë vija rrethore k me qendër O dhe këndi ABC, kulmi i të cilit ndodhet në vijën rrethore.

Krahët e tij presin harkun rrethor $\overset{\frown}{AC}$ në pjesën e vijës rrethore në të cilin nuk ndodhet kulmi B.

Këndi ABC është kënd periferik mbi harkun $\overset{\frown}{AC}$.

Për harkun $\overset{\frown}{AC}$ që ndodhet në zonën e këndit periferik ABC themi se **i përgjigjet** këndit periferik ABC.



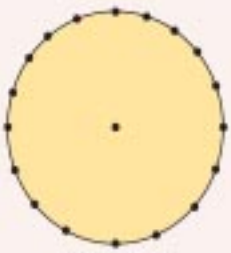
Vizatimi 1

Aktivitet

Për ta kuptuar më lehtë lidhjen midis këndeve në vijën rrethore, ndërtoni "rrethin këndor" tuajin.

Do t'ju nevojitet: një copë kartoni, stiropor, këndmatës, llastik dhe rreth 20 gjilpëra me toptha për fiksimin e materialeve prej letre në stiropor.

Përgatitja: Në karton me një kompas vizatoni një vijë rrethore me rreze rreth 10 cm. Fiksoni vijën rrethore në stiropor, duke vendosur gjilpëra përgjatë saj në largësi përafërsisht të barabartë. Një gjilpërë vendoseni në qendër të vijës rrethore (figura 2a). Vendoseni llastikun si në figurën 2b. Shënoni këndin qendror dhe atë periferik me α dhe β, përkatësisht. Matni me këndmatës këndet α dhe β, e më pas krahasoni sipas madhësisë. Ndryshoni harkun e rrethit këndor dhe shënoni këndin qendror dhe atë periferik me α_1 dhe β_1, përkatësisht (figura 2c). Matni dhe krahasoni këndet α_1 dhe β_1. Përsëriteni procedurën edhe disa herë duke ndryshuar harkun e rrethit këndor. Çfarë mund të përfundoni në lidhje me madhësinë e këndit periferik dhe atij qendror mbi të njëjtin hark rrethor?


Figura 2a

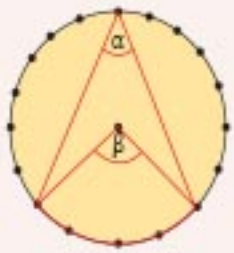


Figura 2b

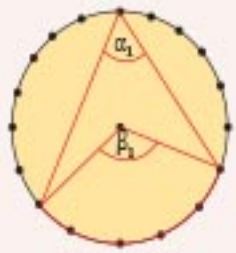


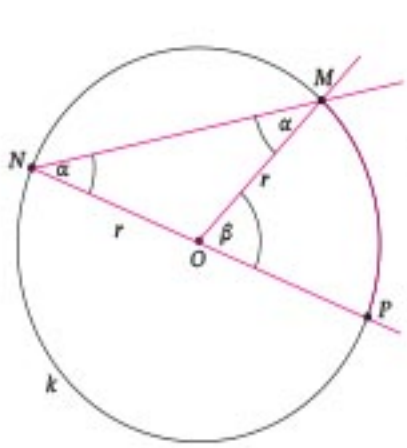
Figura 2c

Për të përcaktuar lidhjen midis madhësisë së këndit qendror dhe madhësisë së këndit periferik mbi të njëjtin hark rrethor, do t'i shqyrtojmë tri rastet e mëposhtme:

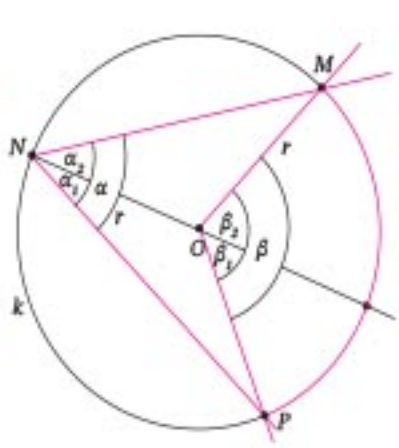
1. Qendra e vijës rrethore ndodhet në njërin nga krahët e këndit periferik (vizatimi 2a).
   Trekëndëshi OMN është barakrahës, prandaj për këndin e tij të jashtëm β vlen

   $$2\alpha = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2},$$

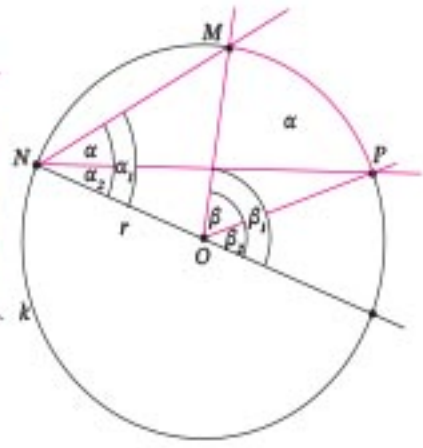
   ku α është këndi mbi bazën e trekëndëshit.



Vizatimi 2a



Vizatimi 2b



Vizatimi 2c

2. Qendra e vijës rrethore ndodhet në zonën e këndit periferik (vizatimi 2b).
Sipas vizatimit gjejmë se $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ dhe $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Atëherë

$$2\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. Qendra e vijës rrethore ndodhet jashtë zonës së këndit periferik (vizatimi 2c).
Sipas vizatimit gjejmë se $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ dhe $\beta_1 - \beta_2 = \beta$. Atëherë

$$2\alpha = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Madhësia e këndit periferik mbi një hark të dhënë është e barabartë me gjysmën e këndit qendror mbi të njëjtin hark.

Shembulli 1

Gjeni këndin periferik që ndodhet mbi të njëjtin hark rrethor me këndin qendror prej:
a) 130°, b) 215°.

Le të shënojmë me α këndin periferik që duhet të njehsojmë.
Meqenëse këndi periferik është dy herë më i vogël se këndi qendror β mbi të njëjtin hark rrethor, fitojmë:

a) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$,

b) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{215^\circ}{2} = 107^\circ 30'$.

Detyra 1

Gjeni madhësinë e këndit periferik mbi harkun i cili është $\frac{1}{6}$ e vijës rrethore.

Aktivitet

Përsëri do të përdorim rrethin këndor (figura 3a). Matni këndin α.
Zhvendoseni llastikun nga kulmi i këndit α në një gjilpërë tjetër të vijës rrethore si në figurën 3b. Matni këndin e fituar α_1. Përsëriteni procedurën edhe disa herë tjera duke zhvendosur kulmin e këndit.

Çfarë përfundoni në lidhje me madhësinë e këndeve të matura?

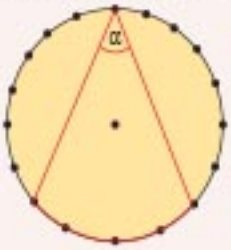


Figura 3a

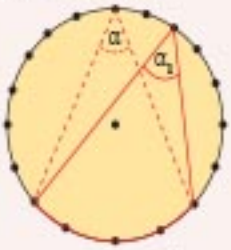
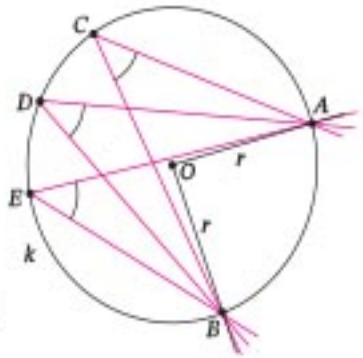


Figura 3b

Nëse matët mirë, me siguri vërejtët se këndet periferike mbi të njëjtin hark rrethor që matët janë të barabartë ndërmjet tyre. Në të njëjtin përfundim do të arrini nëse i matni dhe krahasoni madhësitë e këndeve periferike mbi harkun rrethor ***AB*** në vijën rrethore *k* në vizatimin 3.

Mund të mendojmë në këtë mënyrë:
Meqenëse madhësia e secilit kënd periferik mbi të njëjtin hark rrethor është e barabartë me gjysmën e këndit qendror mbi të njëjtin hark, të gjithë këndet periferikë mbi atë hark rrethor janë të barabartë ndërmjet tyre.



Vizatimi 3

Të gjithë këndet periferikë mbi të njëjtin hark rrethor në një vije rrethore janë **të barabartë ndërmjet tyre**.

Aktivitet

Vendoseni llastikun në rrethin këndor ashtu që këndi qendror të jetë kënd i shtrirë (180°). Atëherë këndi periferik do të jetë mbi gjysmërrethin si në figurën 4a. Matni këndin α (figura 4b). Zhvendosni llastikun nga kulmi i këndit α në një gjilpërë tjetër të vijës rrethore si në vizatim. Matni këndin e fituar α_1. Përsëriteni procedurën edhe disa herë tjera duke zhvendosur kulmin e këndit. Çfarë përfundoni në lidhje me madhësinë e këndeve të matura?

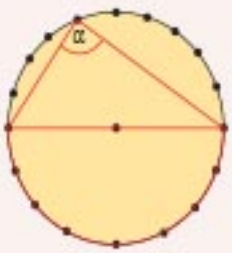


Figura 4a

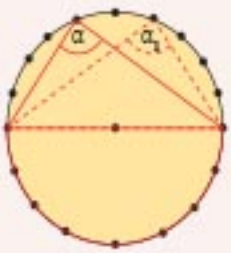


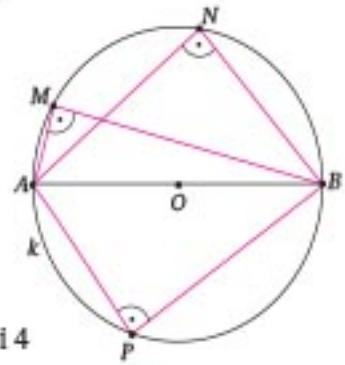
Figura 4b

Nëse matët mirë, me siguri vërejtët se këndet periferike që matët mbi gjysmërrethin janë kënde të drejta.

Në të njëjtin përfundim do të arrini nëse me këndmatës i matni dhe krahasoni madhësitë e këndeve periferike mbi këndin qendror *AOB* në vijën rrethore *k* në vizatimin 4.

Mund të mendojmë në këtë mënyrë:

Meqenëse madhësia e secilit kënd periferik mbi të njëjtin hark rrethor është e barabartë me gjysmën e këndit qendror mbi të njëjtin hark, të gjithë këndet periferikë mbi gjysmërrethin janë kënde të drejta. Kjo veti është e njohur si **teorema e Talesit**.



Vizatimi 4

Çdo kënd periferik mbi gjysmërreth është **i drejtë**.

Nëse kemi parasysh se gjysmërrethi i përgjigjet diametrit të rrethit, mund të themi se çdo kënd periferik mbi diametrin e rrethit është kënd i drejtë.

Nga kjo përfundojmë se të gjitha pikat në vijën rrethore me diametër *AB* (përveç pikave *A* dhe B) janë kulme të një trekëndëshi kënddrejtë me hipotenuzë *AB*.

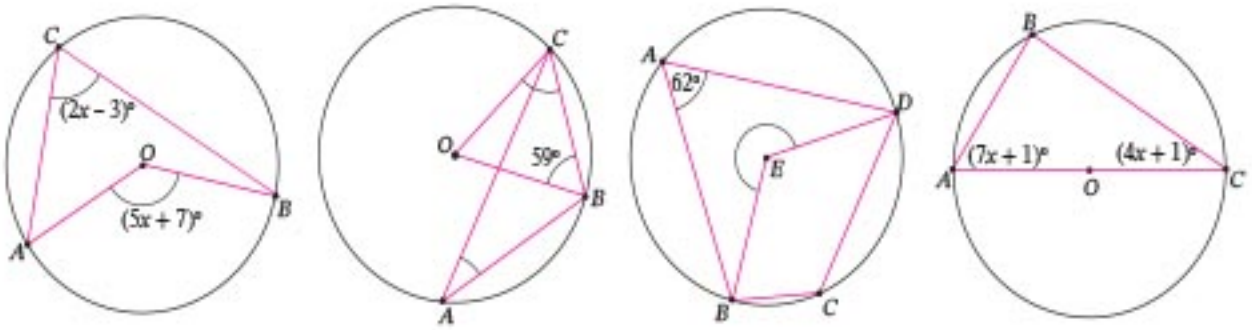
Detyra 2

Është dhënë drejtëza p dhe dy pika *A* dhe *B* që nuk shtrihen në të. Në drejtëzën p vizatoni pikën M, ashtu që këndi *AMB* të jetë i drejtë.

Udhëzim: Vizatoni një vijë rrethore për të cilën segmenti *AB* do të jetë diametër. Shënoni me M pikën e prerjes së vijës rrethore me drejtëzën e dhënë p. Këndi *AMB* është kënd periferik mbi diametrin *AB*.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni këndin periferik që ndodhet mbi të njëjtin hark rrethor me këndin qendror prej:
   a) 158°, b) 89°.
2. Gjeni këndin qendror që ndodhet mbi të njëjtin hark rrethor me këndin periferik prej:
   a) 32°, b) 83°.
3. Sa është këndi periferik mbi harkun rrethor që përfaqëson:
   a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{4}{9}$, c) $\frac{5}{6}$, ç) $\frac{3}{5}$ e vijës rrethore?
4. Brenda cilëve kufij ndryshon këndi qendror në vijën rrethore, e brenda cilëve kufij ndryshon këndi periferik?
5. Shuma e madhësisë së këndit periferik dhe këndit qendror përkatës në një vijë rrethore është 150°. Llogaritni madhësinë e të dy këndeve.
6. Sipas vizatimit 5, gjeni madhësinë e këndeve:
   a) $\sphericalangle ACB$ dhe $\sphericalangle AOB$, b) $\sphericalangle CAB$, c) $\sphericalangle BED$ dhe $\sphericalangle BCD$, ç) $\sphericalangle BAC$ dhe $\sphericalangle ACB$.



Vizatimi 5

7. Në figurën 5 është dhënë një pjesë e vijës rrethore e cila shihet nën këndin $\alpha = 58°$ nga një pikë e vijës rrethore. Nën cilin kënd shihet e njëjta pjesë nga qendra e vijës rrethore?

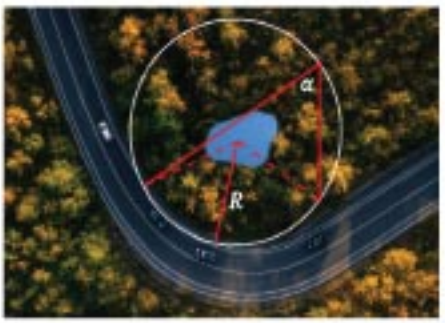
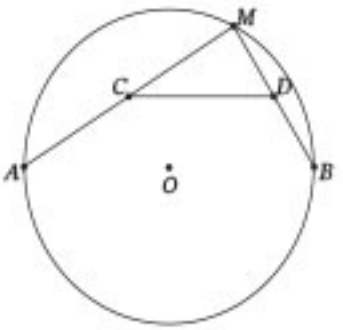


Figura 5

8. Nga pika M e një vije rrethore k(O, r) janë tërhequr dy korda reciprokisht normale *MA* dhe *MB* (vizatimi 6). Largësia midis pikave të mesme *C* dhe *D* të kordave është 2,5 cm. Njehsoni diametrin e vijës rrethore.
Udhëzim: Zbatoni vetinë e mesores në trekëndësh.



Vizatimi 6

Hulumtim

Pajisjet e nevojshme për punë: laps, gozhdë dhe pe.
Në njërin skaj të perit lidheni lapsin, ndërsa në tjetrin lidheni gozhdën. Vizatoni pikën O. Ngulni gozhdën në pikën O dhe duke e tërhequr perin vizatoni një vijë rrethore.
Zgjidhni një pikë *A* nga vija rrethore dhe me të njëjtën procedurë si më parë vizatoni një vijë rrethore me qendër në A. Le të jetë *B* një nga pikat e prerjes së të dy vijave rrethore. Përsëri, si më sipër, vizatoni një vijë rrethore me qendër në B. Le të jetë *C* pika e prerjes së vijës rrethore të tretë me vijën rrethore të parë, e cila është e ndryshme nga A.
Çfarë paraqet segmenti *AC* për vijën rrethore të parë?
Zgjidhni një pikë *D* nga vija rrethore e parë. Në pikat *A*, *C* dhe *D* ngulni gozhda. Më pas shtërngoni perin rreth gozhdave të ngulura. Sa është këndi *CDA*?
Arsyetoni përgjigjen tuaj.

4. KONSTRUKTIMI I DISA LLOJEVE TË VEÇANTA TË TREKËNDËSHAVE

Aktivitet

Isa duhet të bëjë një vizatim të përpiktë të shenjës së komunikacionit në formë trekëndëshi barabrinjës me brinjë 3 cm (figura 1).

Ndihmoni Isës ta konstruktojë shenjën.



Figura 1

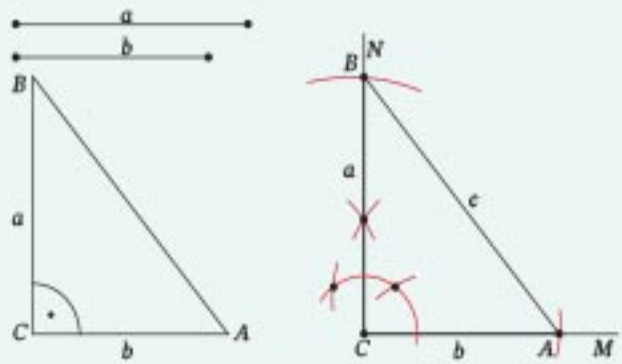
Konstruktimi i trekëndëshit kënddrejtë me dy elemente të dhëna

Të rikujtojmë se procedura e konstruktimit të një trekëndëshi fillon me vizatimin e një **skice** të trekëndëshit të kërkuar me dorë të lirë. Më pas, në bazë të skicës, bëjmë një **analizë** të lidhjes midis elementeve të dhëna dhe elementeve tjera të trekëndëshit. Në fund, sipas analizës, përcaktojmë hapat me të cilët kryejmë **konstruktimin** e trekëndëshit.

Shembulli 1

Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë katetet a dhe b.

Në vizatimin 1 është dhënë skica e trekëndëshit të kërkuar kënddrejtë ABC me katete a dhe b.
Dimë se katetet te trekëndëshi kënddrejtë formojnë kënd të drejtë.
Prandaj, konstruktimi reduktohet në konstruktimin e një trekëndëshi me dy brinjë të dhëna dhe këndin midis tyre. Ai përbëhet nga hapat e mëposhtëm:



Vizatimi 1

- vizatojmë një gjysmëdrejtëz CM ku C është njëri kulm i trekëndëshit,
- në gjysmëdrejtëzën CM, me kompas, e bartim katetin b për të fituar kulmin A,
- konstruktojmë një kënd të drejtë me kulm C dhe një krah në gjysmëdrejtëzën CM,
- në krahun tjetër CN të këndit të drejtë, me kompas e vendosim katetin a për të marrë kulmin B të trekëndëshit,
- duke lidhur kulmet A dhe B fitojmë brinjën e tretë të trekëndëshit ABC.

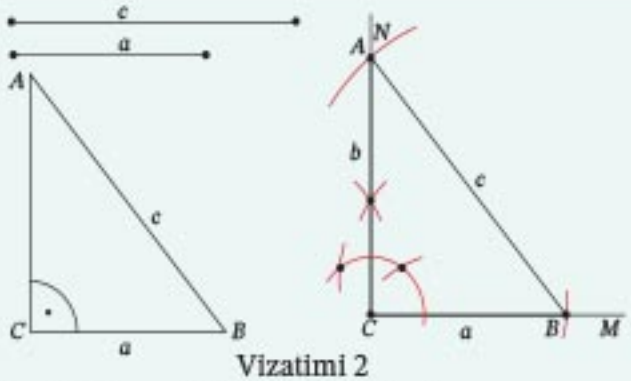
Detyra 1

Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë katetet $a = 3{,}6$ cm dhe $b = 4{,}5$ cm.

Shembulli 2

Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza c dhe një katet a.

Në vizatimin 2 janë vizatuar me vizore kateti a dhe hipotenuza c. Gjithashtu, është bërë skica e trekëndëshit të kërkuar kënddrejtë ABC me hipotenuzë c dhe katet a.
Konstruktimi përbëhet nga hapat e mëposhtëm:



Vizatimi 2

- vizatojmë një gjysmëdrejtëz CM ku C është njëri kulm i trekëndëshit,
- në gjysmëdrejtëzën CM, me kompas, e bartim katetin a për të fituar kulmin B,
- konstruktojmë një kënd të drejtë me kulm C dhe një krah në gjysmëdrejtëzën CM,
- shënojmë me CN krahun tjetër të këndit të drejtë,
- shënojmë me A pikën e prerjes së harkut rrethor me qendër në B dhe rreze c me krahun CN,
- duke lidhur kulmet A dhe B fitojmë brinjën e tretë të trekëndëshit ABC.

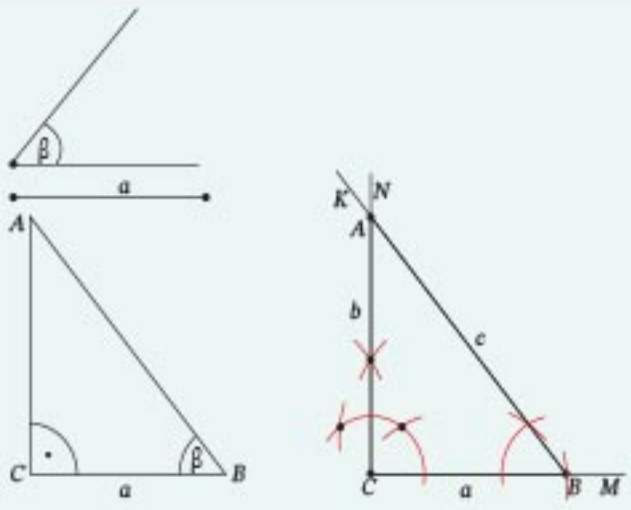
Detyra 2

Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza $c = 7$ cm dhe kateti $b = 3{,}4$ cm.

Shembulli 3

Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë kateti a dhe këndi β.

Skica e trekëndëshit të kërkuar kënddrejtë ABC me katetin a dhe këndin β është dhënë në vizatimin 3.
Konstruktimi përbëhet nga hapat në vijim:



Vizatimi 3

- vizatojmë një gjysmëdrejtëz CM,
- në gjysmëdrejtëzën CM, me kompas, e vendosim katetin a për të fituar kulmin B,
- konstruktojmë një kënd të drejtë me kulm në C,
- shënojmë me CN krahun tjetër të këndit të drejtë,
- konstruktojmë këndin β në kulmin B dhe një krah BC,
- shënojmë me BK krahun tjetër të këndit β,
- në prerjen e krahëve CN dhe BK fitojmë kulmin e tretë A të trekëndëshit ABC.

Detyra 3

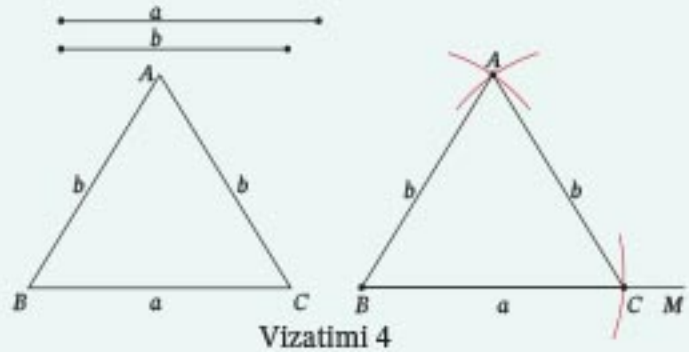
Konstruktoni një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza $c = 5$ cm dhe këndi $\alpha = 60°$.

Konstruktimi i trekëndëshit barakrahës me dy elemente të dhëna

Shembulli 4

Konstruktoni një trekëndësh barakrahës, nëse janë dhënë baza a dhe krahu b.

Skica e trekëndëshit të kërkuar barakrahës ABC me bazë a dhe krah b është dhënë në vizatimin 4. Dimë se krahët te trekëndëshi barakrahës janë të barabartë. Prandaj, konstruktimi reduktohet në konstruktimin e një trekëndëshi me tre brinjë të dhëna.



Vizatimi 4

Ai përbëhet nga hapat në vijim:

- konstruktojmë një gjysmëdrejtëz BM me fillim në kulmin B,
- në gjysmëdrejtëzën BM vendosim bazën a për të marrë kulmin C,
- konstruktojmë një hark rrethor me qendër në B dhe rreze b,
- konstruktojmë një hark rrethor me qendër në C dhe rreze b,
- shënojmë me A pikën e prerjes së dy harqeve rrethorë (A është kulmi i tretë i trekëndëshit),
- lidhim kulmin A me kulmet B dhe C për të fituar trekëndëshin ABC.

Detyra 4

Konstruktoni një trekëndësh barakrahës, nëse janë dhënë krahu $b = 5$ cm dhe këndi mbi bazë $\alpha = 45°$.

Shembulli 5

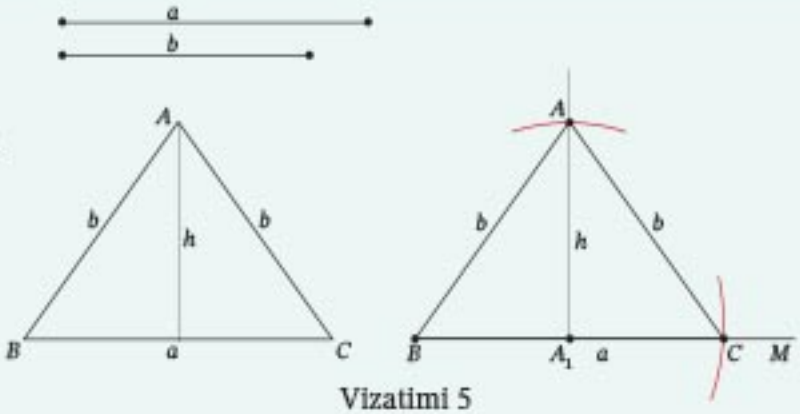
Konstruktoni një trekëndësh barakrahës, nëse janë dhënë baza a dhe lartësia h që i përgjigjet bazës.

Në vizatimin 5 është dhënë skica e trekëndëshit të kërkuar barakrahës ABC me bazë a dhe lartësi h në bazë. Dimë se këmbëza e lartësisë në bazën e një trekëndëshi barakrahës është pika e mesme e bazës.

Konstruktimi përbëhet nga hapat në vijim:

- vizatojmë një gjysmëdrejtëz BM me fillim në kulmin B,

- në gjysmëdrejtëzën BM e bartim bazën a për të fituar kulmin C,
- konstruktojmë përgjysmoren (simetralen) e segmentit BC,
- shënojmë me A_1 pikën e prerjes së përgjysmores dhe segmentit BC,
- konstruktojmë një hark rrethor me qendër në A_1 dhe rreze h,
- shënojmë me A pikën e prerjes së përgjysmores dhe harkut rrethor,
- lidhim kulmin A me kulmet B dhe C për të fituar trekëndëshin ABC.



Vizatimi 5

Detyra 5

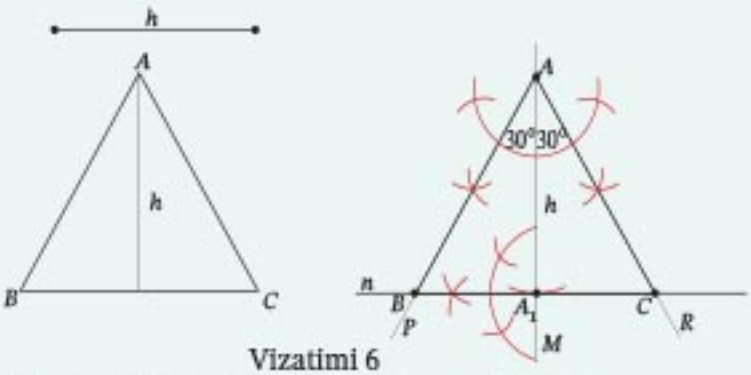
Konstruktoni një trekëndësh barakrahës, nëse janë dhënë krahu b dhe lartësia h e lëshuar në bazë.

Konstruktimi i trekëndëshit barabrinjës me lartësi të dhënë ose me mesore të dhënë

Shembulli 6

Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës, nëse është dhënë lartësia e tij h.

Skica e trekëndëshit të kërkuar barabrinjës ABC, me lartësinë h të lëshuar nga kulmi A, është dhënë në vizatimin 6.
Konstruktimi përbëhet nga hapat në vijim:



Vizatimi 6

- vizatojmë gjysmëdrejtëzën AM me fillim në kulmin A,
- në gjysmëdrejtëzën AM, nga kulmi A, e bartim lartësinë h, për të marrë këmbëzën e saj A_1,
- konstruktojmë dy kënde MAP dhe MAR prej 30° (me kulm në pikën A, në të majtë dhe në të djathtë të lartësisë h),
- konstruktojmë drejtëzën n nëpër pikën A_1 normale me AA_1,
- shënojmë me B pikën e prerjes së drejtëzës n dhe krahut AP,
- shënojmë me C pikën e prerjes së drejtëzës n dhe krahut AR,
- trekëndëshi i kërkuar është trekëndëshi ABC.

Shembulli 7

Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës nëse është dhënë mesorja e tij t.

Në trekëndëshin barabrinjës, mesorja përputhet me lartësinë. Prandaj, konstruktimi i trekëndëshit barabrinjës me mesore të dhënë sillet në konstruktimin e trekëndëshit barabrinjës me lartësi të dhënë.

Detyra 6

Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës nëse është dhënë:
a) lartësia e tij $h = 4$ cm, b) mesorja e tij $t = 5$ cm.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Konstruktoni një trekëndësh këndrejtë ABC, nëse janë dhënë:
   a) katetet $a = 3$ cm dhe $b = 4$ cm, b) hipotenuza $c = 6$ cm dhe kateti $b = 3$ cm.
2. Konstruktoni një trekëndësh këndrejtë ABC, nëse janë dhënë:
   a) hipotenuza $c = 5{,}6$ cm dhe këndi $\alpha = 38°$, b) kateti $a = 4$ cm dhe këndi $\alpha = 40°$.
3. Konstruktoni një trekëndësh barakrahës ABC, nëse janë dhënë:
   a) baza $a = 3{,}2$ cm dhe lartësia $h = 4{,}5$ cm,
   b) këndi në bazë $\alpha = 58°$ dhe baza $a = 3$ cm.
4. Konstruktoni një trekëndësh barakrahës ABC, nëse janë dhënë:
   a) këndi në kulm $\gamma = 46°$ dhe krahu $b = 5{,}2$ cm,
   b) krahu $b = 6{,}2$ cm dhe këndi në bazë $\alpha = 73°$,
   c) lartësia në bazë h_a = 5 cm dhe këndi në kulm $\gamma = 48°$.
5. Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës ABC, nëse është dhënë:
   a) lartësia $h = 3{,}6$ cm, b) mesorja $t = 4{,}2$ cm.

Hulumtim

Shtëpia në figurën 1 ka gjerësi të bazës 4 m, ndërsa çatia formon kënd prej 70° me bazën e shtëpisë. Safeti nuk ka shkallë, por duhet ta masë lartësinë e shtëpisë. Hulumtoni dhe sqaroni se si, duke konstruktuar një trekëndësh të ngjashëm në përmasa më të vogla, ai mund ta përcaktojë lartësinë e shtëpisë.

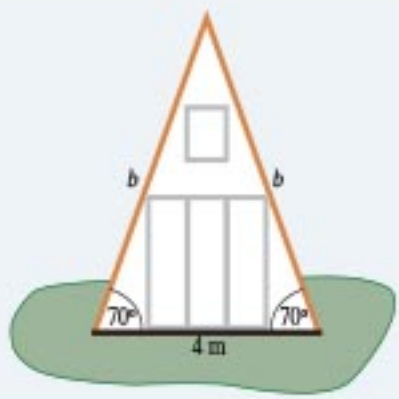


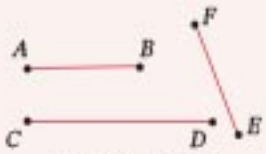
Figura 1

5. KUPTIMI I PUTHITSHMËRISË. TREKËNDËSHAT E PUTHITSHËM

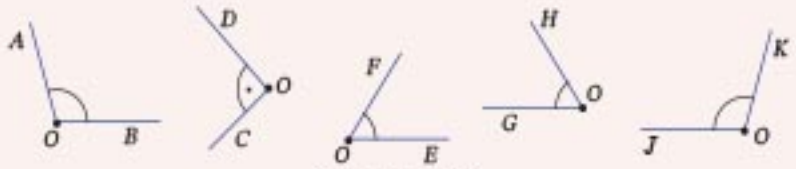
Kuptimi i puthitshmërisë. Format 2D të puthitshme

Aktivitet

1. a) Matni segmentet në vizatimin 1a dhe krahasoni gjatësitë e tyre. Çfarë mund të përfundoni?
   b) Si është gjatësia e segmentit AB në raport me segmentin EF?
2. Matni këndet në vizatimin 1b me këndmatës dhe përcaktoni cilët prej tyre kanë të njëjtën madhësi.



Vizatimi 1a



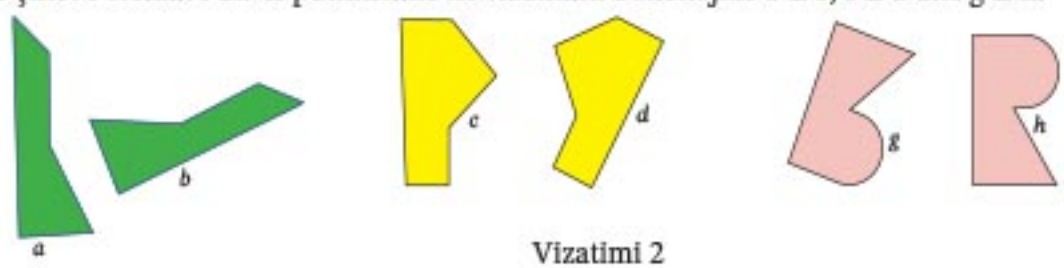
Vizatimi 1b

Segmentet që kanë gjatësi të barabarta quhen **segmente të puthitshme** (ose **kongruente**).
Këndet që kanë madhësi të barabarta quhen **kënde të puthitshme** (ose **kongruente**).

Duke zhvendosur një segment deri te segmenti i tij i puthitshëm, ose duke zhvendosur një kënd deri te këndi i tij i puthitshëm, këto forma gjeometrike sillen në puthitje. *A* vlen e njëjta gjë edhe për format e tjera gjeometrike? Në jetën e përditshme, shpesh flasim për forma të puthitshme. Këtu, nënkuptojmë se dy forma janë të puthitshme nëse kanë **të njëjtën formë** dhe **madhësi**.
Për shembull, të tilla janë: fletët e letrës A4 ose të gazetës, shablloni dhe prerja e tij, dy monedha me të njëjtën vlerë, etj.

Format 2D që mund të sillen në puthitje njëra me tjetrën quhen **forma 2D të puthitshme** (ose **kongruente**).

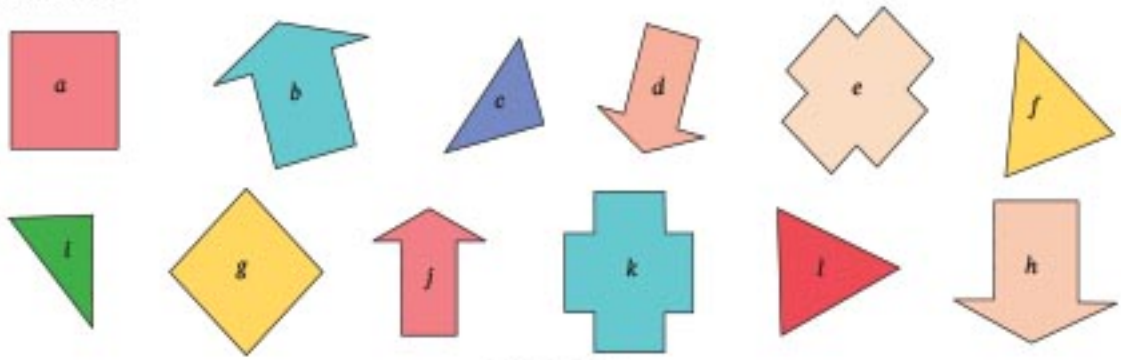
Për të shënuar puthitshmërinë e dy formave përdorim shenjën $\cong$. Me shenjën $\ncong$ shënojmë se format e dhëna nuk janë të puthitshme.
Për çiftet e formave 2D të puthitshme në vizatimin 2 shënojmë $a \cong b$, $c \cong d$ dhe g $\cong$ h.



Vizatimi 2

Detyra 1

Duke përdorur shenjën e puthitshmërisë ≅, shkruani çiftet e puthitshme të formave 2D në vizatimin 3.



Vizatimi 3

Shembulli 1

Cili është kushti që: a) dy rrathë të jenë të puthitshëm, b) dy katrorë të jenë të puthitshëm?

Ata do të jenë të puthitshëm nëse kanë: a) rreze të barabarta, b) brinjë me gjatësi të barabarta.

Detyra 2

Vizatoni dy drejtkëndësha të puthitshëm. Nëse njëri drejtkëndësh ka brinjë 3 cm dhe 5 cm, sa do të jenë brinjët e drejtkëndëshit tjetër?

Trekëndëshat e puthitshëm

Rikujtoni se brinjët dhe këndet janë elementet themelore të trekëndëshit. Duke pasur parasysh se folëm për segmente dhe kënde të puthitshme, natyrshëm lind pyetja për puthitshmërinë e dy trekëndëshave.

Shembulli 2

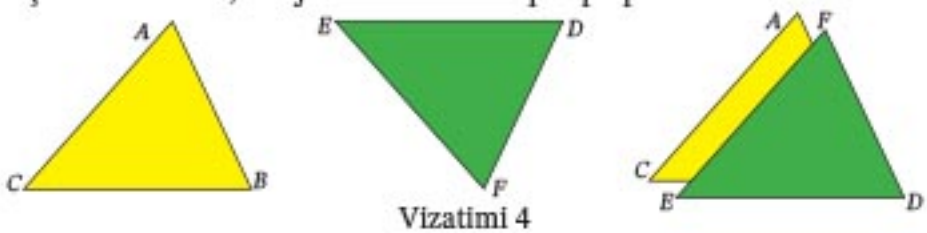
Vizatoni dy trekëndësha dhe shënoni si në vizatimin 4.

a) Matni brinjët e të dy trekëndëshave. Krahasoni gjatësitë e brinjëve: AB dhe FD, AC dhe FE, BC dhe DE.

b) Matni këndet e të dy trekëndëshave. Krahasoni madhësitë e: $\measuredangle$A dhe $\measuredangle$F, $\measuredangle$C dhe $\measuredangle$E, $\measuredangle$B dhe $\measuredangle$D.

c) Më pas, pritni të dy trekëndëshat dhe vendosni njërin mbi tjetrin. Çfarë përfundoni, *a* do të përputhen brinjët dhe këndet e barabarta? *A* do të përputhen të dy trekëndëshat?

ç) Shkruani çiftet e kulmeve, brinjëve dhe këndeve që u përputhën.

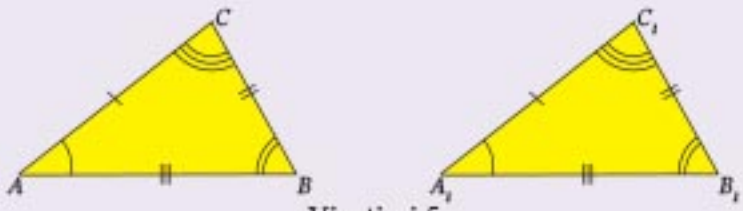


Vizatimi 4

a) Nëse keni matur saktë, me siguri fituat se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}$ dhe $\overline{BC} = \overline{DE}$.
b) Nga këndet e matura vërejtët se: $\measuredangle ABC = \measuredangle FDE$, $\measuredangle ACB = \measuredangle FED$, $\measuredangle BAC = \measuredangle DFE$.
c) Vërejmë se u përputhën brinjët dhe këndet e barabarta:
AB dhe *FD*, *AC* dhe *EF*, *BC* dhe *DE*; $\measuredangle ABC = \measuredangle FDE$, $\measuredangle ACB = \measuredangle FED$ dhe $\measuredangle BAC = \measuredangle DFE$
Të dy trekëndëshat u përputhën. Në këtë rast, kulmi *A* u përputh me kulmin F, *B* me *D* dhe *C* me E.
ç) Për kulmet, brinjët dhe këndet që u përputhën, themi se janë **përgjegjëse** me njëri-tjetrin.
Në këtë kuptim, themi se:
kulmi *A* është përgjegjës me kulmin F, *B* është përgjegjës me *D* dhe *C* është përgjegjës me E, brinja *AB* është përgjegjëse me *FD*, *AC* është përgjegjëse me *FE* dhe *BC* është përgjegjëse me *DE*, dhe këndi $\measuredangle ABC$ është përgjegjës me këndin $\measuredangle FDE$, $\measuredangle ACB$ është përgjegjës me $\measuredangle FED$ dhe $\measuredangle BAC$ është përgjegjës me $\measuredangle DFE$.

Për trekëndëshat *ABC* dhe $A_1B_1C_1$ themi se janë **të puthitshëm** (ose **kongruentë**), nëse kanë brinjë përgjegjëse të barabarta dhe kënde përgjegjëse të barabarta (vizatimi 5), pra

$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, dhe
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1$.



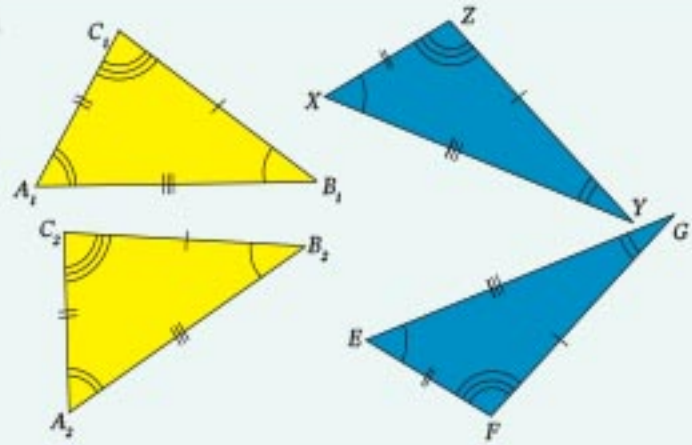
Vizatimi 5

Nëse dy trekëndësha *ABC* dhe $A_1B_1C_1$ janë të puthitshëm, shkruajmë $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$. Me marrëveshje, elementet përgjegjëse i lexojmë sipas renditjes së kulmeve në shënimet e dy trekëndëshave.

Shembulli 3

Shkruani çiftet e trekëndëshave të puthitshëm në vizatimin 6.

Kulmi A_1 është përgjegjës me kulmin A_2, B_1 me B_2 dhe C_1 me C_2.
Sipas shënimeve në vizatim, brinjët përgjegjëse janë të barabarta:
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (të shënuara me tre vijëza |||)
$\overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}$ (të shënuara me dy vijëza ||)
$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ (të shënuara me një vijëz |)



Vizatimi 6

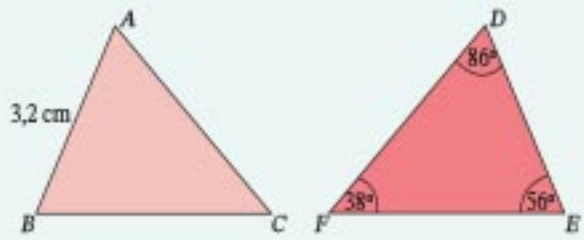
Ngjashëm, sipas shënimeve në vizatim, këndet përgjegjëse janë të barabartë:
$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$, $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_2C_2A_2$.
Pra $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.
Në të njëjtën mënyrë përfundojmë se $\Delta XYZ \cong \Delta EGF$.

Shembulli 4

Për trekëndëshat në vizatimin 7 vlen $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Sipas të dhënave në vizatim, gjeni:
a) gjatësinë e brinjës DE, b) madhësinë e këndit në kulmin B.

Sipas kushtit në detyrë kemi se $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

a) Brinja DE është përgjegjëse me brinjën AB. Prandaj, ato kanë gjatësi të barabarta, pra $\overline{AB} = \overline{DE}$. Meqenëse $\overline{AB} = 3{,}2\,\text{cm}$, përfundojmë se $\overline{DE} = 3{,}2\,\text{cm}$.

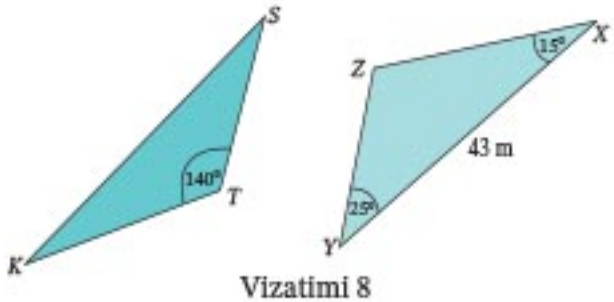


Vizatimi 7

b) Këndi në kulmin B është përkatës me këndin në kulmin E. Prandaj, ato kanë madhësi të barabarta, pra $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$. Meqenëse $\sphericalangle FED = 56°$, përfundojmë se $\sphericalangle CBA = 56°$.

Detyra 3

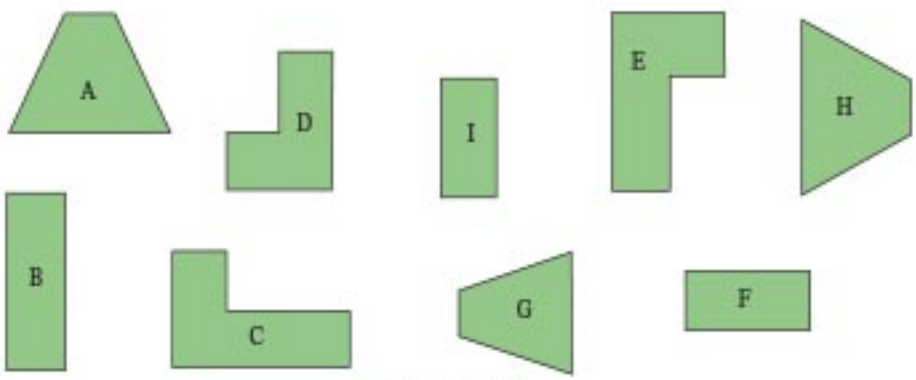
Për trekëndëshat në vizatimin 8 vlen $\Delta KST \cong \Delta XYZ$. Sipas të dhënave në vizatim, njehsoni:
a) gjatësinë e brinjës KS,
b) madhësinë e këndit në kulmin S.



Vizatimi 8

DETYRA PËR USHTRIME

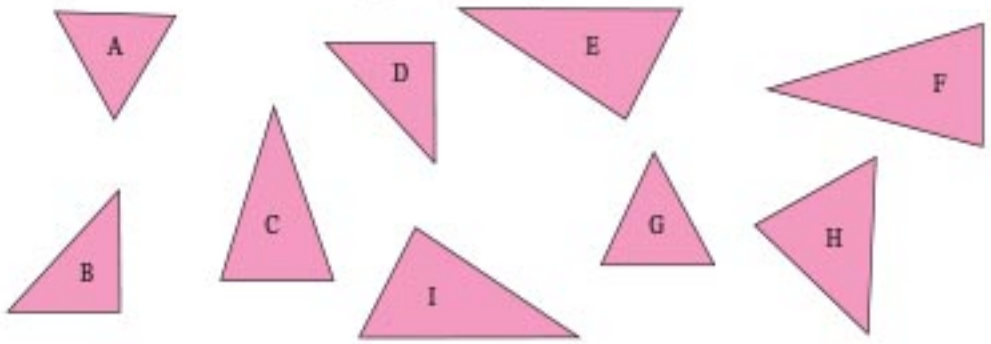
1. Shkruani çiftet e puthitshme të formave 2D që shikoni në vizatimin 9.



Vizatimi 9

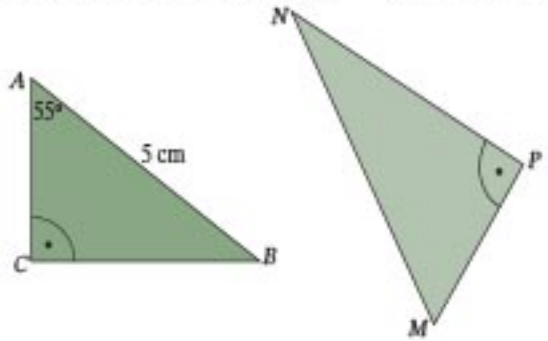
2. Dihet se $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Shkruani çiftet përgjegjëse të:
   a) kulmeve, b) brinjëve të trekëndëshave *ABC* dhe *DEF*.

3. Shkruani çiftet e trekëndëshave të puthitshëm që shikoni në vizatimin 10.

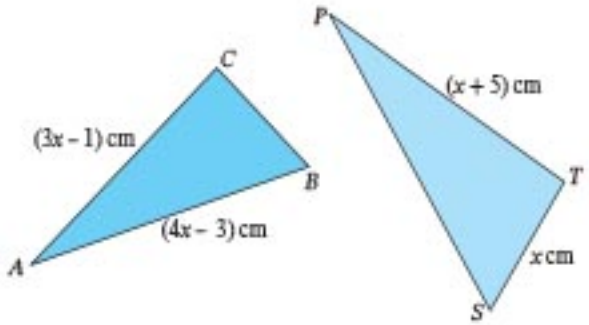


Vizatimi 10

4. Dihet se $\Delta ABC \cong \Delta MNP$. Sipas të dhënave në vizatimin 11, gjeni
   a) gjatësinë e brinjës *MN*, b) madhësinë e këndit në kulmin N.



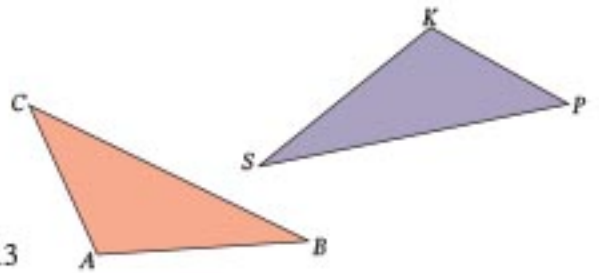
Vizatimi 11



Vizatimi 12

5. Dihet se $\Delta ABC \cong \Delta PST$. Sipas të dhënave në vizatimin 12, gjeni gjatësinë e secilës brinjë të trekëndëshave.

6. Dihet se $\Delta ABC \cong \Delta KSP$ (vizatimi 13).
   Llogaritni madhësinë e këndit *KSP*,
   nëse $\measuredangle BAC = 38°$ dhe $\measuredangle ACB = 26°$.



Vizatimi 13

Hulumtim

Në bashkësinë e të gjitha formave 2D le të jetë dhënë relacioni
R "... është i puthitshëm me ...". Shqyrtoni nëse relacioni *R* është refleksiv, simetrik dhe transitiv.

6. KRITERET E PUTHITSHMËRISË SË TREKËNDËSHAVE

Për të verifikuar nëse dy trekëndësha janë të puthitshëm, duhet të verifikojmë nëse mund të puthiten, pra përputhen. Por, natyrshëm lind pyetja nëse kjo është gjithmonë realisht e mundur. Për shembull, në këtë mënyrë nuk mund të verifikojmë nëse dy parcela në formë trekëndëshi janë të puthitshme, sepse nuk mund t'i puthisim. Prandaj përdorim mënyra të tjera për të përcaktuar puthjen e trekëndëshave, të quajtura **kritere të puthitshmërisë së trekëndëshave**. Në to përcaktohen kushtet për të vërtetuar puthjen e trekëndëshave të dhënë. Ekzistojnë **tri kritere themelore të puthitshmërisë së trekëndëshave**.

Kriteri i parë i puthitshmërisë së trekëndëshave

Aktivitet

Brinjët e një trekëndëshi janë 3 cm dhe 5 cm, dhe këndi midis tyre është 102°. Sa trekëndësha të tillë mund të vizatoni? Arsyeto përgjigjen.

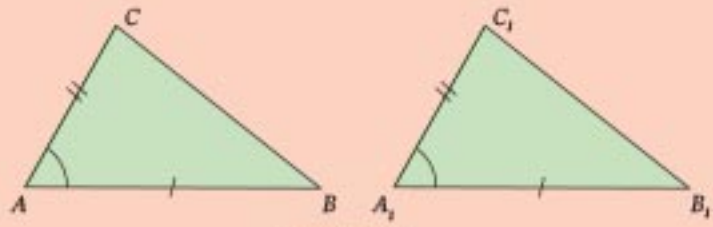
Dy trekëndësha janë të puthitshëm nëse dy brinjë dhe këndi midis tyre të njërit trekëndësh janë të barabartë me dy brinjët përgjegjëse dhe këndin midis tyre të trekëndëshit tjetër (vizatimi 1).

B: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$,

K: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

B: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

BKB: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

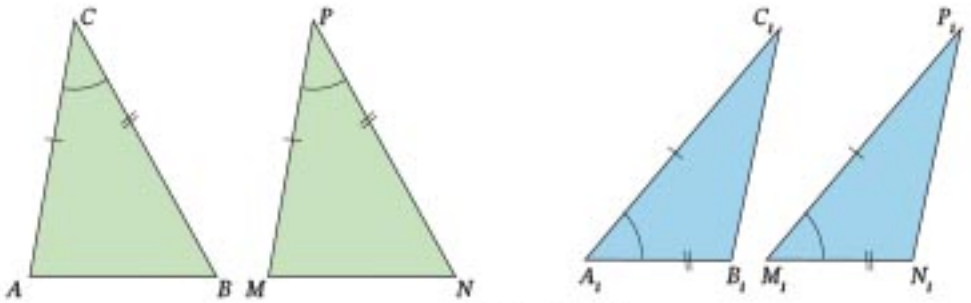


Vizatimi 1

Sipas këtij kriteri, për të vërtetuar puthitshmërinë e dy trekëndëshave, bëjmë verifikimin e barazisë së dy brinjëve dhe këndit midis tyre të njërit trekëndësh me elementet përkatëse të trekëndëshit tjetër. Prandaj, kriteri quhet **brinja – këndi – brinja** dhe shkurt shënohet me **BKB**.

Shembulli 1

Në vizatimin 2 janë vizatuar çifte trekëndëshash dhe janë shënuar elementet përkatëse. Me ndihmën e kriterit BKB, vërtetoni se trekëndëshat janë të puthitshëm:



Vizatimi 2

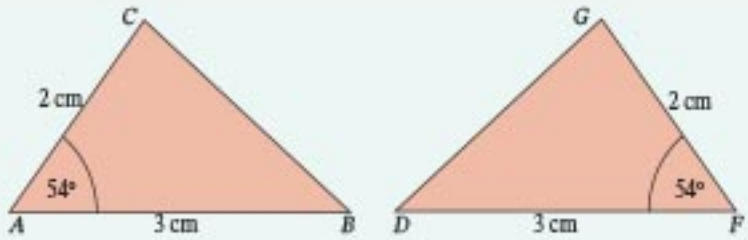
B: $\overline{AC} = \overline{MP}$
K: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MPN$
B: $\overline{CB} = \overline{PN}$
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

B: $\overline{A_1B_1} = \overline{M_1N_1}$
K: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
B: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
BKB: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Shembulli 2

Verifikoni nëse trekëndëshat në vizatimin 3 janë të puthitshëm.

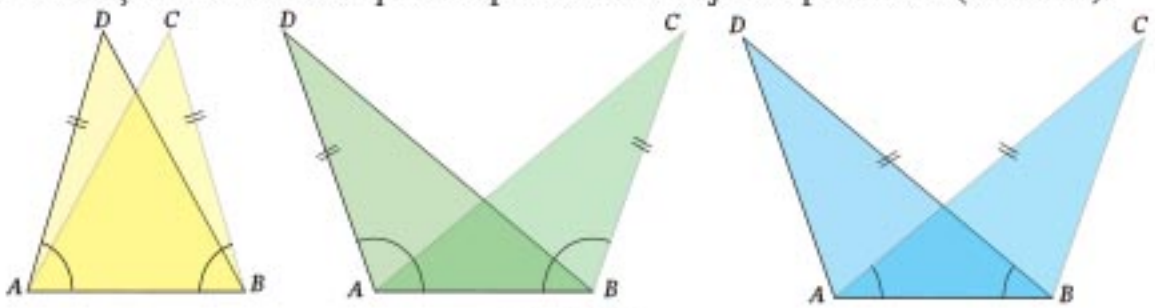
B: $\overline{AB} = \overline{FD} = 3$ cm
K: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 54^\circ$
B: $\overline{AC} = \overline{FG} = 2$ cm
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$



Vizatimi 3

Shembulli 3

Në secilin çift trekëndëshash sqaroni se pse trekëndëshat janë të puthitshëm (vizatimi 4):



Vizatimi 4

B: AB është brinjë e përbashkët
K: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
B: $\overline{BC} = \overline{AD}$
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

B: AB është brinjë e përbashkët
K: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
B: $\overline{BC} = \overline{AD}$
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

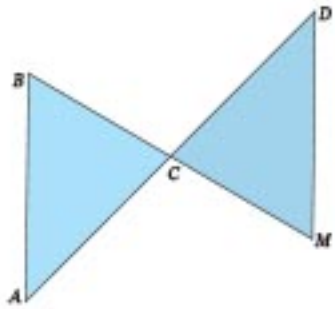
B: AB është brinjë e përbashkët
K: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$
B: $\overline{AC} = \overline{BD}$
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

Shembulli 4

Shqyrtoni formën 2D në vizatimin 5.

Pika C është pikë e mesme për segmentet AD dhe BM.
Shpjegoni pse $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.

B: $\overline{AC} = \overline{DC}$ C është pika e mesme e segmentit AD.
K : $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCM$ Si kënde të kundërta.
B: $\overline{BC} = \overline{MC}$ C është pika e mesme e segmentit BM.
BKB: $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.



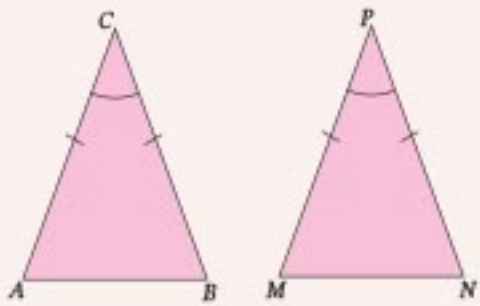
Vizatimi 5

Aktivitet

Shqyrtoni trekëndëshat në vizatimin 6a dhe vizatimin 6b. Çfarë është e mjaftueshme për të vërtetuar se:
a) dy trekëndësha kënddrejtë janë të puthitshëm,
b) dy trekëndësha barakrahës janë të puthitshëm?



Vizatimi 6a



Vizatimi 6b

- Dy **trekëndësha kënddrejtë** janë të puthitshëm nëse katetet e njërit trekëndësh janë të barabarta me katetet përgjegjëse të trekëndëshit tjetër.
- Dy **trekëndësha barakrahës** janë të puthitshëm nëse krahu dhe këndi në kulm të njërit trekëndësh janë të barabartë me krahun dhe këndin në kulm të trekëndëshit tjetër.

Shembulli 5

Në trekëndëshin barakrahës MPQ është lëshuar lartësia nga kulmi P në bazën MQ (vizatimi 7). Shqyrtoni nëse $\Delta MNP \cong \Delta QNP$.

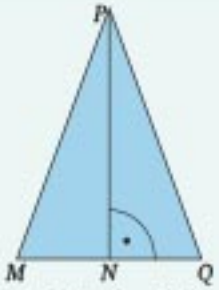
Për trekëndëshat MNP dhe QNP vlejnë kushtet e mëposhtme:

B: PN është brinjë e përbashkët.

K: $\sphericalangle MNP = \sphericalangle QNP = 90°$ Lartësia është normale në bazë.

B: $\overline{NM} = \overline{NQ}$ Lartësia e ndan bazën në dy segmente të barabarta.

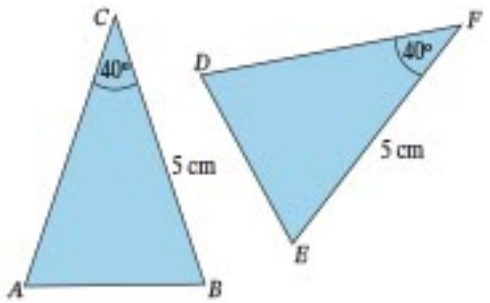
BKB: $\Delta MNP \cong \Delta QNP$



Vizatimi 7

Detyra 1

Shpjegoni pse trekëndëshat barakrahës ABC dhe DEF janë të puthitshëm (vizatimi 8).



Vizatimi 8

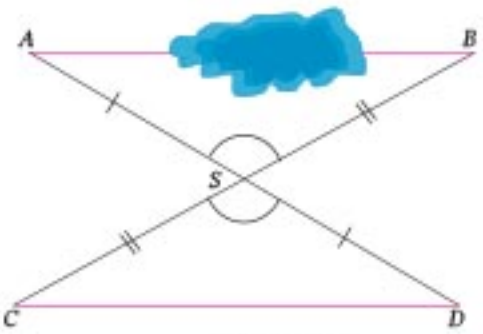
Detyra 2

Gjeodeti në terrenin e dhënë në vizatimin 9, duhet të matë largesën midis pikave A dhe B. Midis tyre ka një moçal që pengon matjen e largesës së kërkuar. Si do të përcaktojë gjeodeti, me ndihmën e kriterit BKB, atë largesë?

Udhëzim: Shqyrtoni vizatimin 10 dhe sqaroni pse gjeodeti mund të matë largesën midis pikave C dhe D në vend të largesës midis pikave A dhe B (vizatimi 10).



Vizatimi 9

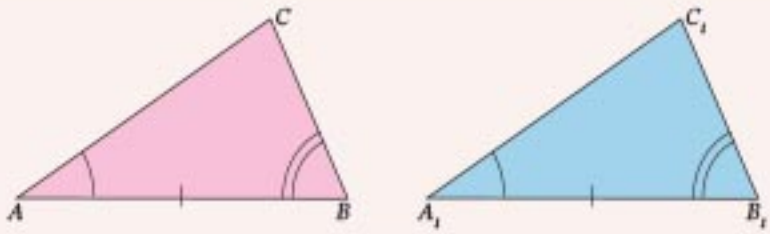


Vizatimi 10

Kriteri i dytë i puthitshmërisë së trekëndëshave KBK

Aktivitet

1. Në vizatimin 11 janë dhënë dy trekëndësha për të cilët dihet se kanë nga një brinjë me gjatësi të njëjtë, dhe këndet përgjegjëse që ndodhen në atë brinjë janë të barabarta. Matni me kujdes dhe krahasoi elementet përgjegjëse të trekëndëshave të dhënë. A janë të puthitshëm trekëndëshat?



Vizatimi 11

2. Vizatoni një trekëndësh me gjatësi të çfarëdoshme të brinjëve dhe madhësi të çfarëdoshme të këndeve. Më pas në letër transparente vizatoni një trekëndësh tjetër për të cilin një brinjë dhe këndet që ndodhen në të do të jenë të barabartë me një brinjë dhe këndet përgjegjëse të trekëndëshit tjetër.

a) *A* përputhen trekëndëshat? b) A janë të puthitshëm trekëndëshat?

Nëse punuat saktë, në dy aktivitetet e mëparshme vërejtët se trekëndëshat janë të puthitshëm.

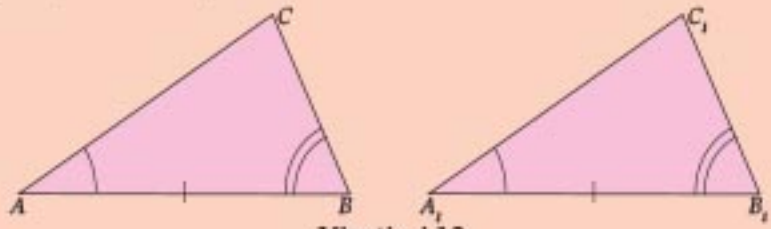
Dy trekëndësha janë të puthitshëm nëse një brinjë dhe këndet që ndodhen në atë brinjë të njërit trekëndësh janë të barabarta me brinjën përgjegjëse dhe këndet që ndodhen në atë brinjë të trekëndëshit tjetër (vizatimi 12).

K: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

B: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

K: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$

KBK: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

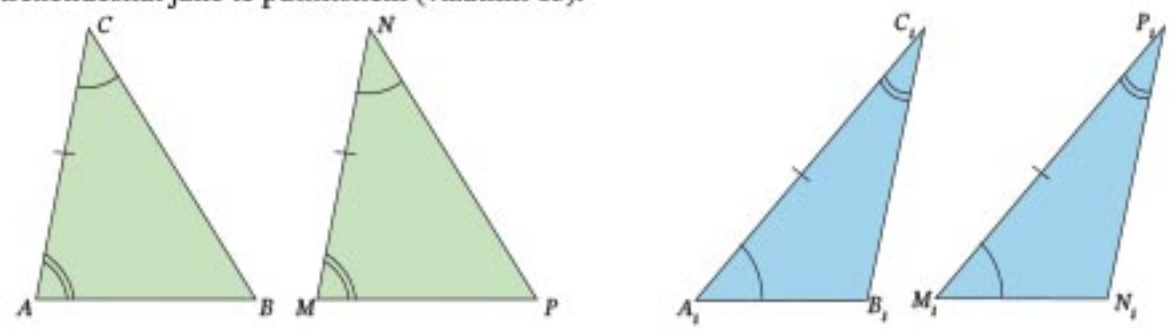


Vizatimi 12

Kriteri quhet **këndi – brinja – këndi** dhe shkurt shënohet me **KBK**, sepse për të vërtetuar puthitshmërinë e dy trekëndëshave bëjmë verifikimin e barazisë së një brinje dhe këndeve që ndodhen në atë brinjë të njërit trekëndësh me elementet përgjegjëse të trekëndëshit tjetër.

Shembulli 6

Me ndihmën e kriterit KBK, shkruani trekëndëshat e puthitshëm dhe vërtetoni se pse trekëndëshat janë të puthitshëm (vizatimi 13):



Vizatimi 13

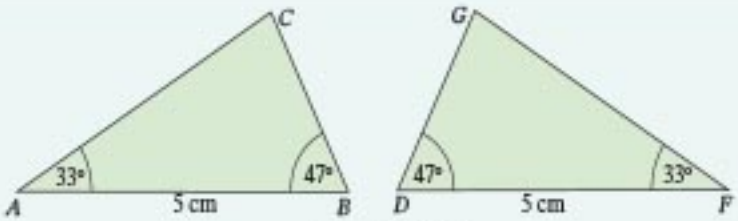
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle PMN$
C: $\overline{AC} = \overline{MN}$
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

A: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
C: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
A: $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1$
ACA: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Shembulli 7

Vërtetoni nëse trekëndëshat në vizatimin 14 janë të puthitshëm.

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 33°$,
C: $\overline{AB} = \overline{DF} = 5\,\text{cm}$,
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDG = 47°$.
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$.



Vizatimi 14

Detyra 3

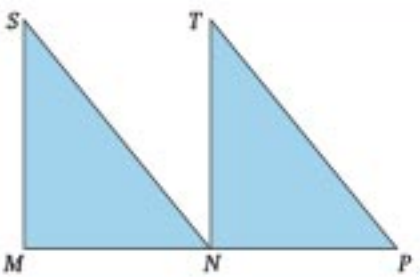
Në vizatimin 15 është dhënë paralelogrami *KLMJ* në të cilin është tërhequr diagonalja *KM*.
A janë të puthitshëm trekëndëshat *KLM* dhe *MJK*?
Arsyetoni përgjigjen.



Vizatimi 15

Shembulli 8

Për formën 2D në vizatimin 16 janë dhënë kushtet në vijim:
$\overline{MN} = \overline{NP}$, $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ dhe $SN \parallel TP$.
Shpjegoni se pse $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.



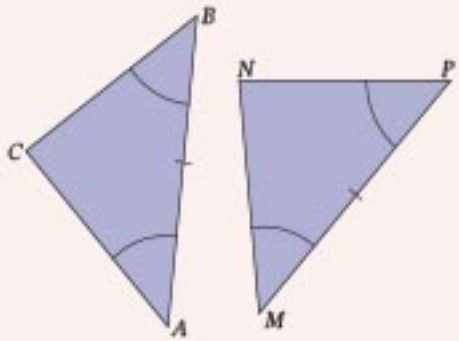
Vizatimi 16

A: $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ — Sipas kushtit në detyrë.
C: $\overline{MN} = \overline{NP}$ — Sipas kushtit në detyrë.
A: $\sphericalangle MNS = \sphericalangle NTP$ — Këndet kanë krahë reciprokisht paralelë për shkak të kushtit $SN \parallel TP$.
ACA: $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.

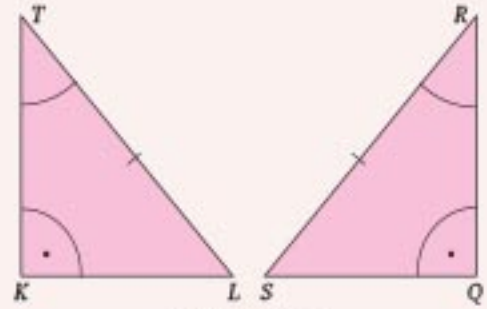
Aktivitet

a) A mund të vërtetohet puthitshmëria e trekëndëshave barakrahës *ABC* dhe *MPN*, nëse u janë të barabartë elementet e shënuara në vizatimin 17?

b) Pse trekëndëshat kënddrejtë *KLT* dhe *QSR* në vizatimin 18 janë të puthitshëm?



Vizatimi 17



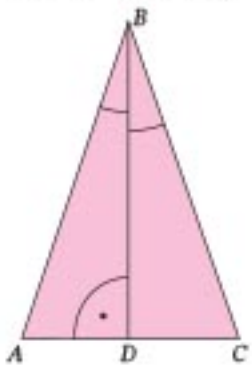
Vizatimi 18

- **Dy trekëndësha kënddrejtë** janë të puthitshëm, nëse njëri katet dhe këndi i ngushtë në të i njërit trekëndësh janë të barabartë me katetin përkatës dhe këndin e ngushtë në të të trekëndëshit tjetër.
- **Dy trekëndësha kënddrejtë** janë të puthitshëm, nëse hipotenuza dhe njëri kënd i ngushtë i njërit trekëndësh janë të barabartë me hipotenuzën dhe këndin e ngushtë përkatës të trekëndëshit tjetër.
- **Dy trekëndësha barakrahës** janë të puthitshëm, nëse baza dhe këndi që shtrihet në të i njërit trekëndësh janë të barabartë me bazën dhe këndin që shtrihet në të të trekëndëshit tjetër.

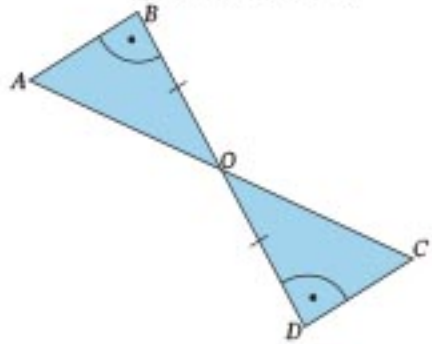
Detyra 4

Shpjegoni puthitshmërinë e trekëndëshave në vizatimin 19:

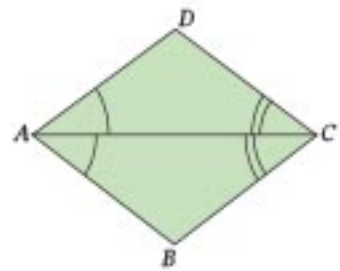
a) *ADB* dhe *CDB*,



b) *ABO* dhe *CDO*,



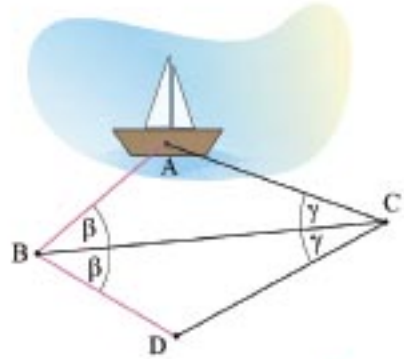
c) *ABC* dhe *ADC*.



Vizatimi 19

Detyra 5

Si do të përcaktojmë largesën midis varkës dhe kasolles në breg që ndodhet në pikën *B*, duke përdorur kriterin e dytë të puthitshmërisë së trekëndëshave? Udhëzim: Shqyrtoni vizatimin 20 dhe shpjegoni pse në vend se të masim largesën nga *A* në *B*, mund të masim largesën nga *B* në *D*.



Vizatimi 20

Kriteri i tretë i puthitshmërisë së trekëndëshave BBB

Aktivitet

Sa trekëndësha mund të vizatoni, nëse gjatësitë e brinjëve të tij janë 4 cm, 6 cm dhe 7 cm, përkatësisht? Vizatoni një trekëndësh të tillë.

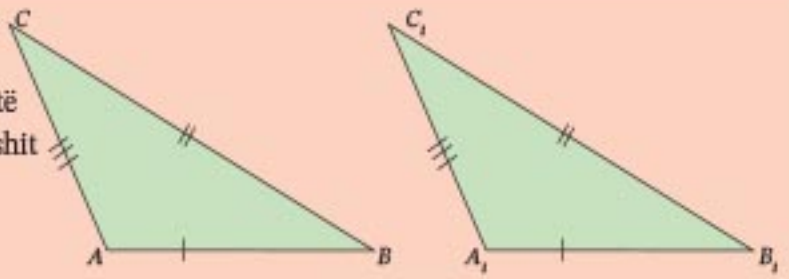
Dy trekëndësha janë të puthitshëm nëse tri brinjët e njërit trekëndësh janë të barabartë me brinjët përkatëse të trekëndëshit tjetër (vizatimi 21).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

C: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$

C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

CCC: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



Vizatimi 21

Kriteri quhet **brinja – brinja – brinja**, shkurt **BBB**, sepse përcakton kushte për puthitshmërinë e dy trekëndëshave përmes verifikimit të gjatësive të tri brinjëve të njërit trekëndësh me brinjët përkatëse të trekëndëshit tjetër.

Shembulli 9

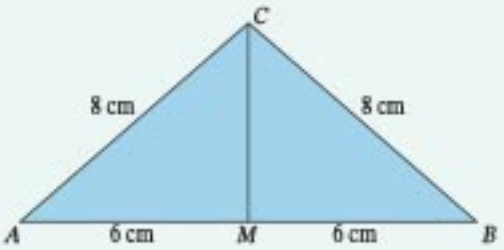
Vërtetoni puthitshmërinë e trekëndëshave AMC dhe BMC në vizatimin 22.

C: $\overline{AM} = \overline{BM}$

C: $\overline{AC} = \overline{BC}$

C: MC është brinjë e përbashkët.

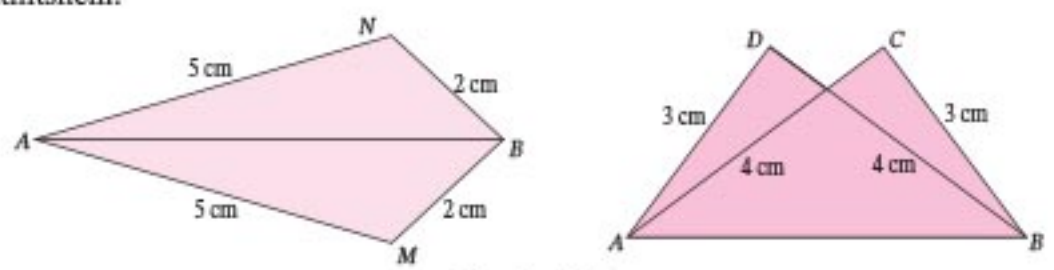
CCC: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$



Vizatimi 22

Detyra 6

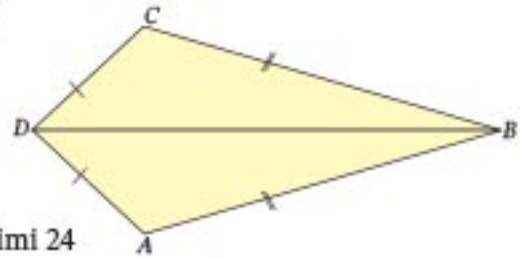
Format 2D në vizatimin 23 përmbajnë nga dy trekëndësha. Shpjegoni pse ato trekëndësha janë të puthitshëm.



Vizatimi 23

Shembulli 10

Sipas brinjëve të shënuara të katërkëndëshit $ABCD$ në vizatimin 24, shpjegoni pse $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB$.



Vizatimi 24

C: $\overline{DA} = \overline{DC}$

C: $\overline{AB} = \overline{CB}$

C: DB është brinjë e përbashkët.

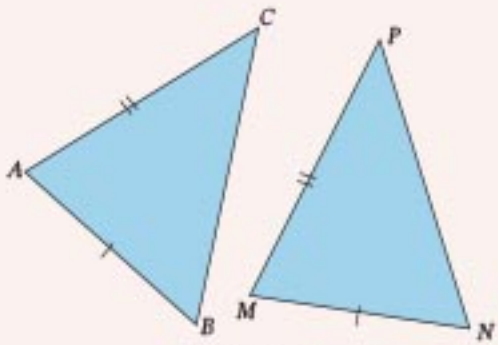
CCC: $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

Meqenëse këndi DAB është përgjegjës me këndin DCB, përfundojmë se $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$.

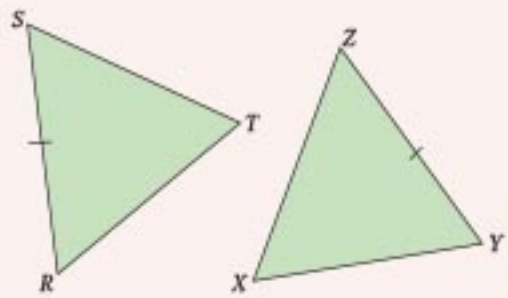
Aktivitet

a) A mund të vërtetohet puthitshmëria e trekëndëshave barakrahës ABC (me bazë AB) me MNP (me bazë MN), nëse u janë të barabartë elementet e shënuara në vizatimin 25?

b) Pse trekëndëshat barabrinjës RST dhe XYZ në vizatimin 26 janë të puthitshëm?



Vizatimi 25



Vizatimi 26

- **Dy trekëndësha barakrahës** janë të puthitshëm, nëse baza dhe krahu i njërit trekëndësh janë të barabartë me bazën dhe krahun e trekëndëshit tjetër.
- **Dy trekëndësha barabrinjës** janë të puthitshëm, nëse ata kanë brinjë të barabarta.

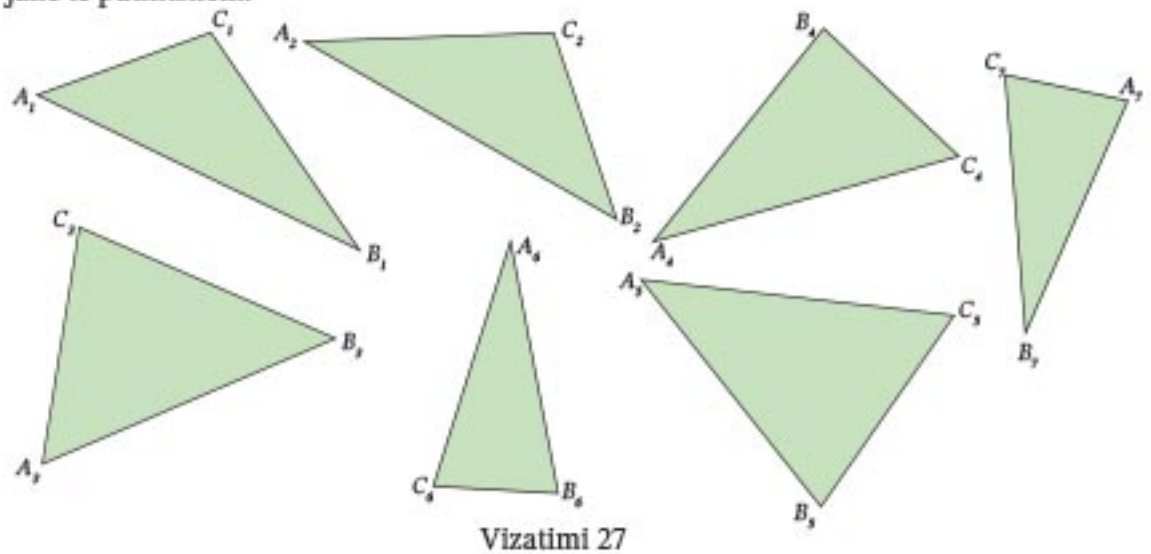
Detyra 7

Në trekëndëshin barakrahës ABC, nga kulmi C është lëshuar mesorja CC_1. Shpjegoni pse $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BC_1C$. Ndërtoni vizatim.

DETYRA PËR USHTRIME

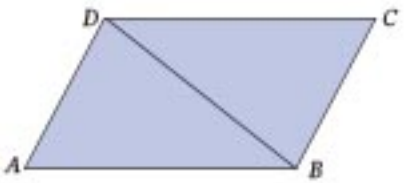
1. Sipas kushteve të dhëna, përcaktoni nëse trekëndëshat janë të puthitshëm, nëse
   a) të dy trekëndëshat kanë brinjë përgjegjëse me gjatësi 3 cm dhe dy kënde përgjegjëse me madhësi 35° dhe 80°,
   b) të dy trekëndëshat kanë brinjë përgjegjëse me gjatësi 3 cm, 9 cm dhe 10 cm.
   c) të dy trekëndëshat kanë kënde përgjegjëse me madhësi 44°, 78° dhe 58°.

2. Shkruani çiftet e trekëndëshave të puthitshëm në vizatimin 27 dhe kriteret sipas të cilëve janë të puthitshëm.



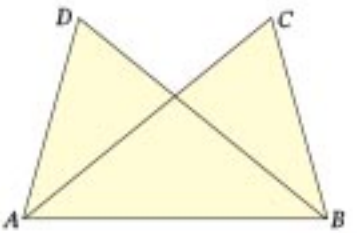
Vizatimi 27

3. Segmenti BD është diagonalja e paralelogramit $ABCD$ (Vizatimi 28).
   Shpjegoni pse $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.



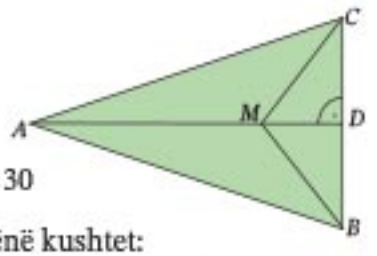
Vizatimi 28

4. Për formën 2D në vizatimin 29 vlen: $\overline{AC} = \overline{BD}$ dhe $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$.
   Shpjegoni pse: a) $\overline{AD} = \overline{BC}$ b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



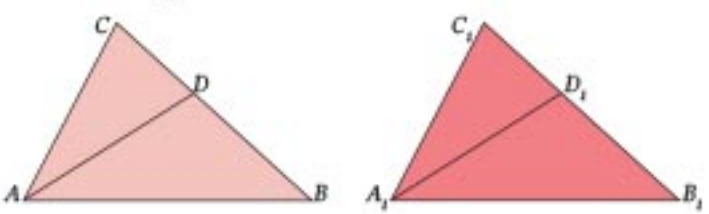
Vizatimi 29

5. Për formën 2D në vizatimin 30 vlen: $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ dhe $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$.
   Shpjegoni pse $\Delta ABM \cong \Delta ACM$.



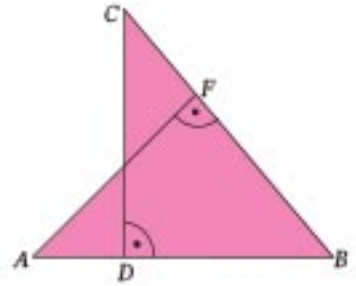
Vizatimi 30

6. Për trekëndëshat ABC dhe $A_1B_1C_1$ në vizatimin 31 janë dhënë kushtet:
   1) $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
   2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
   3) AD dhe A_1D_1 janë përgjysmore (simetrale) të këndeve në kulmet A dhe A_1
   4) $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$
   Shpjegoni pse $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



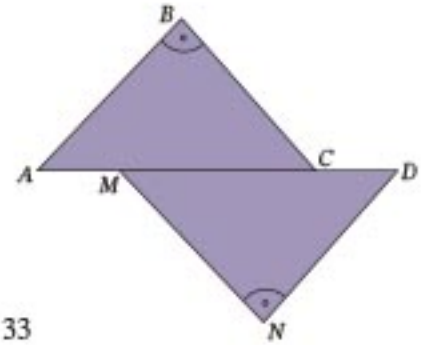
Vizatimi 31

7. Për formën 2D në vizatimin 32 vlen $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Shpjegoni pse $\overline{AF} = \overline{CD}$.



Vizatimi 32

8. Për formën 2D në vizatimin 33 vlen:
$BC \parallel MN$ dhe $\overline{AB} = \overline{ND}$.
Shpjegoni pse $\Delta ABC \cong \Delta DNM$.

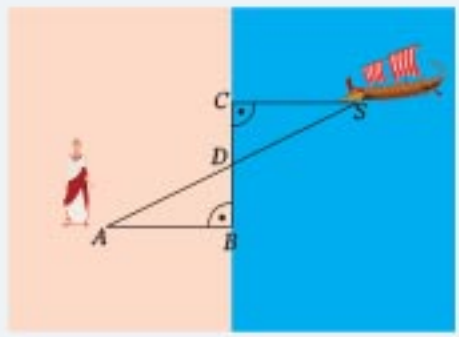


Vizatimi 33

9. Shpjegoni pse në trekëndëshin barakrahës:
a) mesoret e tërhequra në krahët e trekëndëshit janë të barabarta,
b) lartësitë e lëshuara në krahët e trekëndëshit janë të barabarta.
Ndërtoni vizatim.

Hulumtim

Matematikani i lashtë grek Talesi (624 para erës sonë – 547 para erës sonë) arriti të përcaktojë largesën e anijeve të armikut nga bregu gjatë një lufte.
Nga pika *C* në breg, e cila ndodhej përballë anijes, ai ecte (nën kënd të drejtë) përgjatë bregut për një distancë të çfarëdoshme (për shembull, 20 hapa) deri në pikën D, ku vendos një shkop dhe vazhdon në të njëjtën vijë për një distancë të barabartë (20 hapa) deri në pikën B.
Më pas, ai lëvizi nën kënd të drejtë nga bregu në tokë deri në pikën *A*, nga e cila mund të drejtonte vështrimin drejt anijes përmes shkopit.



Sqaroni se si Talesi përcaktoi distancën deri te anija, dhe cilën distancë mati?
Pse distanca e matur është e barabartë me distancën midis anijes dhe bregut?
Metoda, e cila i atribuohet Talesit nga Mileti, përdorej edhe për të përcaktuar gjerësinë e një lumi, gjerësinë e një shkëmbi, etj.

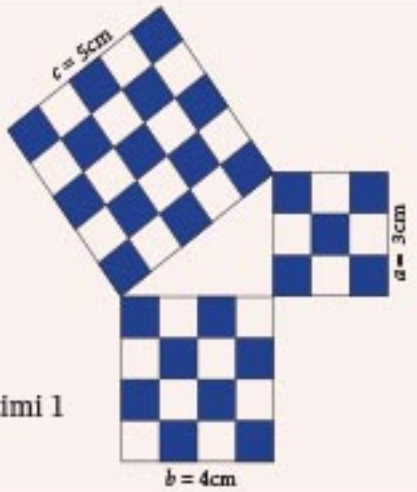
7. TEOREMA E PITAGORËS

Aktivitet

Është dhënë një trekëndësh kënddrejtë me 3 cm dhe 4 cm dhe hipotenuzë 5 cm (vizatimi 1). Secili nga katrorët është i ndarë në katrorë të vegjël me brinjë 1 cm.

a) Sa katrorë të vegjël ka secili katror?

b) A ekziston ndonjë lidhje midis shumës së katrorëve të vegjël mbi katetet dhe numrit të katrorëve të vegjël mbi hipotenuzë?



Vizatimi 1

Me siguri vërejte se ekziston një lidhje midis shumës së katrorëve të vegjël mbi katetet dhe numrit të katrorëve të vegjël mbi hipotenuzë. Përkatësisht, numri i katrorëve të vegjël mbi:

katetin e gjatë 3 cm është $3^2 = 9$,

katetin e gjatë 4 cm është $4^2 = 16$, dhe

hipotenuzën e gjatë 5 cm është $5^2 = 25$.

Kjo do të thotë se shuma e numrit të katrorëve të vegjël mbi katetet është e barabartë me numrin e katrorëve të vegjël mbi hipotenuzë, pra $9 + 16 = 25$.

Vetia që vërejtët vlen për çdo trekëndësh kënddrejtë dhe është e njohur me emrin Teorema e Pitagorës, kushtuar matematikanit të lashtë **Pitagora**.

Teorema e Pitagorës

Në çdo trekëndësh kënddrejtë, katrori i hipotenuzës është i barabartë me shumën e katrorëve të kateve.

Ngo kjo, në një trekëndësh kënddrejtë, lidhja midis kateve a dhe b dhe hipotenuzës c përcaktohet me formulën

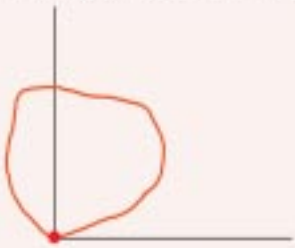
$c^2 = a^2 + b^2$.

Aktivitet

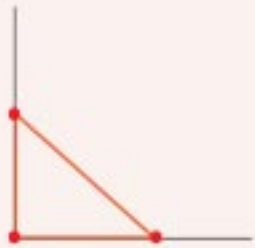
Për aktivitetin do t'ju nevojitet: një fletë, një copë stiropor (katror me brinjë rreth 10 cm), një llastik dhe 3 gjilpëra me toptha për fiksimin e materialeve prej letre në stiropor.

Përgatitja: Në fletën e letrës vizatoni një kënd të drejtë. Fiksojeni fletën në stiropor duke ngulur një nga gjilpërat në kulmin e këndit të drejtë (vizatimi 2a).

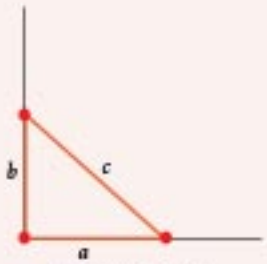
Më pas, fiksoni llastikun në atë gjilpërë. Me dy të tjerët, tërhiqni llastikun dhe fiksojeni në secilin nga krahët e këndit (vizatimi 2b). Matni gjatësitë e kateve a, b dhe hipotenuzës c (Vizatimi 2c) dhe verifikoni nëse për to vlen $a^2 + b^2 = c^2$. Zhvendosni dy gjilpërat përgjatë krahëve, përsëri matni dhe verifikoni.



Vizatimi 2a



Vizatimi 2b



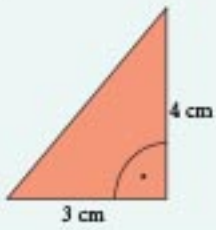
Vizatimi 2c

Shembulli 1

Njehsoni gjatësinë e hipotenuzës në një trekëndësh kënddrejtë, nëse janë dhënë katetet:
a) $a = 3$ cm dhe $b = 4$ cm, b) $a = 8$ cm dhe $b = 10$ cm.

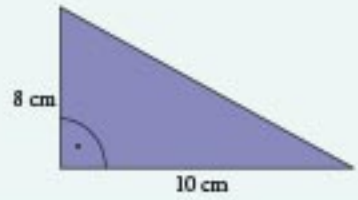
Gjatë njehsimit përdorim kalkulator dhe rezultatin do ta rrumbullakojmë në dy vende dhjetore.
Sipas teoremës së Pitagorës, për hipotenuzën c fitojmë:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 10^2 + 8^2$
$c^2 = 100 + 64$
$c^2 = 164$
$c = \sqrt{164}$
$c = 12{,}81$ cm

Vërejmë se gjatë llogaritjes së hipotenuzës, në vend të formulës $c^2 = a^2 + b^2$, mund të përdorim drejtpërdrejt formulën e nxjerrë

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Detyra 1

Njehsoni gjatësinë e hipotenuzës c të trekëndëshit kënddrejtë, nëse janë dhënë katetet:
a) $a = 24$ cm dhe $b = 7$ cm, b) $a = 12$ cm dhe $b = 13$ cm.

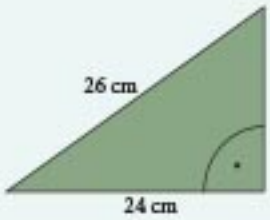
Me ndihmën e teoremës së Pitagorës, mund të përcaktojmë gjatësinë e njërit katet, nëse janë dhënë hipotenuza dhe kateti tjetër.

Shembulli 2

Njehsoni gjatësinë e njërit katet të trekëndëshit kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza dhe kateti tjetër: a) $c = 26$ cm $a = 24$ cm, b) $b = 27$ cm dhe $c = 50$ cm.

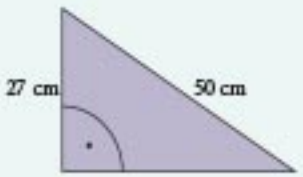
Sipas teoremës së Pitagorës, për katetin e panjohur fitojmë:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$26^2 = 24^2 + b^2$
$676 = 576 + b^2$
$b^2 = 676 - 576$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$50^2 = a^2 + 27^2$
$2500 = a^2 + 729$
$a^2 = 2500 - 729$
$a^2 = 1771$
$a = \sqrt{1771}$
$a = 42{,}08$ cm

Vërejmë se gjatë llogaritjes së katetit të panjohur, në vend të formulës $c^2 = a^2 + b^2$, mund të përdorim drejtpërdrejt formulat e nxjerra:

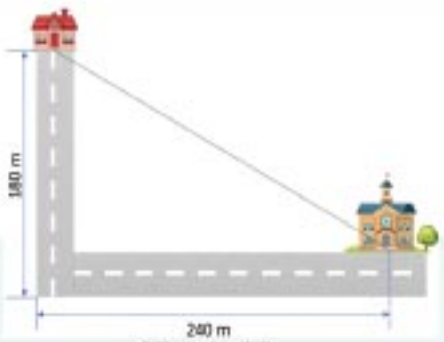
$a^2 = c^2 - b^2$ ose $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ dhe $b^2 = c^2 - a^2$ ose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Detyra 2

Njehsoni gjatësinë e njërit katet të trekëndëshit kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza dhe kateti tjetër: a) $c = 15$ cm dhe $a = 11$ cm, b) $c = 50$ cm dhe $b = 30$ cm.

Shembulli 3

Tanja ecën në këmbë deri në shkollë. Së pari kalon 180 m nga rruga e saj, më pas kthehet në një kënd prej 90° dhe ecën edhe 240 m deri në shkollë (vizatimi 3). Sa është gjatësia e segmentit, skajet e të cilit janë shtëpia e Tanjës dhe shkolla?



Vizatimi 3

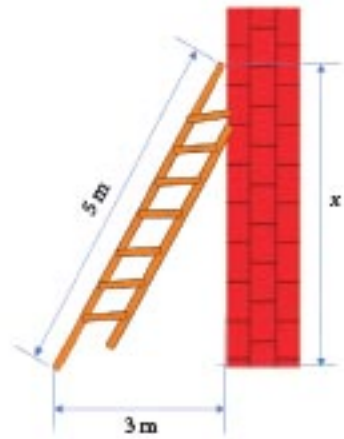
Tanja ecën përgjatë dy kateve $a = 180$ m dhe $b = 240$ m të trekëndëshit kënddrejtë. Distanca nga shtëpia e Tanjës deri në shkollë është hipotenuza c e atij trekëndëshi. Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës, fitojmë

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = c = \sqrt{32\,400 + 57\,600} = \sqrt{90\,000} = 300\,\text{m}.$$

Gjatësia e segmentit, skajet e të cilit janë shtëpia e Tanjës dhe shkolla, është 300 m.

Detyra 3

Një shkallë e gjatë 5 m është e mbështetur në një mur vertikal (vizatimi 4). Këmbëza e shkallës është e larguar 3 m nga muri. Në çfarë lartësie nga toka shkalla e prek murin?



Vizatimi 4

Vlen edhe vetia e anasjelltë e teoremës së Pitagorës.

Teorema e anasjelltë e Pitagorës

Nëse katrori i brinjës më të gjatë të një trekëndëshi është i barabartë me shumën e katrorëve të dy brinjëve të tjera, atëherë ai trekëndësh është kënddrejtë.

Me ndihmën e teoremës së anasjelltë të Pitagorës, mund të tregojmë nëse një trekëndësh është kënddrejtë.

Shembulli 4

Tregoni nëse trekëndëshi me brinjët e dhëna është kënddrejtë:
a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm dhe $c = 5$ cm, b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.

a) Sipas teoremës së anasjelltë të Pitagorës, trekëndëshi është kënddrejtë, sepse:
$5^2 = 3^2 + 4^2$.
Ky trekëndësh ishte i njohur për egjiptianët e lashtë, prandaj mori emrin **trekëndëshi egjiptian**.
b) Sipas teoremës së anasjelltë të Pitagorës, trekëndëshi është kënddrejtë sepse
$13^2 = 5^2 + 12^2$.
Ky trekëndësh ishte i njohur për indianët e lashtë, prandaj mori emrin **trekëndëshi indian**.

Numrat natyrorë a, b dhe c, për të cilët vlen barazimi $a^2 + b^2 = c^2$, pra që mund të jenë brinjë të një trekëndëshi kënddrejtë, quhen **treshe të Pitagorës** (ose **treshe pitagoreane**).
Treshen e Pitagorës e shkruajmë si treshe të renditur numrash (a, b, c).

Treshe pitagoerane janë, për shembull, (3, 4, 5), (12, 5, 13), (20, 21, 29) etj.

Detyra 4

Tregoni nëse janë treshe të Pitagorës treshet e dhëna të numrave:
a) (10, 11, 14), b) (6, 8, 10), c) (9, 12, 15), ç) (10, 24, 26), d) (15, 36, 39).

DETYRA PËR USHTRIME

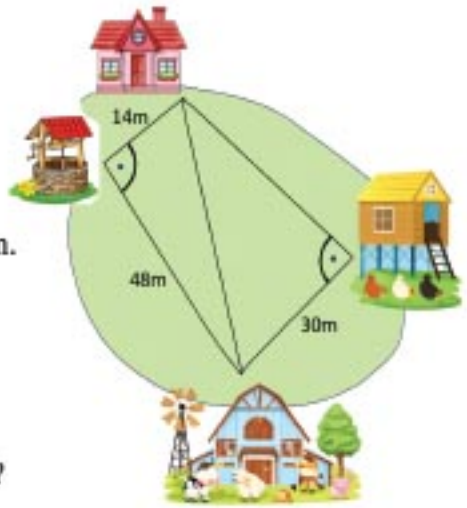
1. Përcaktoni hipotenuzën e trekëndëshit kënddrejtë, nëse dy katetet e tij janë:
   a) $a = 6$ cm dhe $b = 12$ cm, b) $a = 8$ cm dhe $b = 6$ cm,
   c) $a = 12$ cm dhe $b = 16$ cm, ç) $a = 10$ cm dhe $b = 24$ cm.

2. Përcaktoni njërin katet të trekëndëshit kënddrejtë, nëse hipotenuza dhe kateti tjetër kanë gjatësi:
   a) $c = 20$ cm dhe $b = 12$ cm, a) $c = 10$ cm dhe $a = 8$ cm,
   c) $c = 25$ cm dhe $b = 15$ cm, ç) $c = 34$ cm dhe $a = 16$ cm.

3. Nga një port, dy anije lundruan në të njëjtën kohë, njëra në drejtim të perëndimit me shpejtësi 24 km/h, kurse tjetra në drejtim të veriut me shpejtësi 26 km/h. Njehsoni sa larg nga njëra-tjetra do të jenë anijet pas:
   a) 1 ore, b) 2 orësh nga nisja.

4. Njehsoni perimetrin e trekëndëshit kënddrejtë, nëse janë dhënë hipotenuza dhe një katet:
   a) $c = 29$ cm dhe $b = 21$ cm,
   b) $c = 34$ cm dhe $b = 16$ cm, c) $c = 17$ cm dhe $b = 15$ cm.

5. Në një oborr fshati, shtëpia dhe pusi janë në largësi prej 14 m, pusi dhe stalla janë në 48 m distancë, kurse stalla dhe kafazi i pulave në 30 m (Vizatimi 5).
   a) Sa është distanca midis shtëpisë dhe stallës?
   b) Sa është distanca midis shtëpisë dhe kafazit të pulave?



Vizatimi 5

6. Tregoni nëse trekëndëshi është kënddrejtë, nëse:
   a) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm dhe $c = 39$ cm, b) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm dhe $c = 15$ cm,
   c) $a = 20$ cm, $b = 13$ cm dhe $c = 25$ cm, ç) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm dhe $c = 15$ cm.

7. **Aktivitet projektues**

   1. Ndërtojmë treshe të Pitagorës

   Treshet e Pitagorës (a, b, c) i ndërtojmë me ndihmën e formulave euklidiane. Le të jenë m dhe n çfarëdo numrash natyrorë të tillë që $m > n$. Numrat a, b dhe c që formojnë një treshe të Pitagorës i marrim me formulat:

   $$a = (m^2 - n^2)k,\ b = 2mnk \text{ dhe } c = (m^2 + n^2)k.$$

   Për shembull, për $m = 2$, $n = 1$ dhe $k = 1$ fitojmë

   $$a = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3,\ b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{4} \text{ dhe } c = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = \mathbf{5},$$

   për $m = 3$, $n = 1$ dhe $k = 1$, fitojmë

   $$a = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = \mathbf{8},\ b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{6} \text{ dhe } c = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = \mathbf{10}.$$

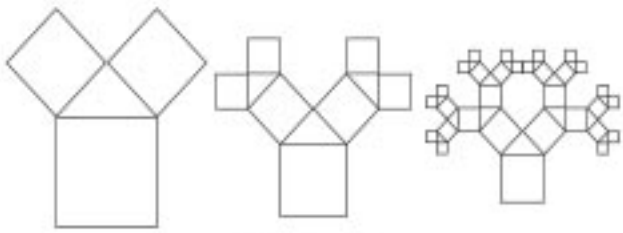
Rishkruani dhe plotësoni tabelat e dhëna.

$m = 2, n = 1$ dhe $k = 1$	a	b	c
$m = 3, n = 1$ dhe $k = 1$			
$m = 4, n = 1$ dhe $k = 1$			
$m = 5, n = 1$ dhe $k = 1$			
$m = 6, n = 1$ dhe $k = 1$			

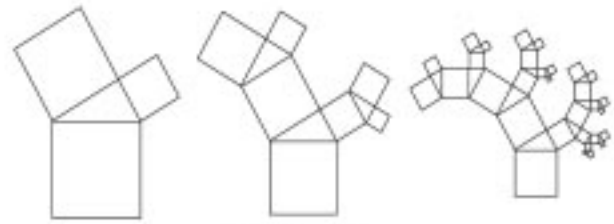
$m = 3, n = 2$ dhe $k = 1$	a	b	c
$m = 4, n = 2$ dhe $k = 1$			
$m = 5, n = 2$ dhe $k = 1$			
$m = 6, n = 2$ dhe $k = 1$			
$m = 7, n = 2$ dhe $k = 1$			

2. Krijojmë pemën e Pitagorës

Te pema e Pitagorës, gjatësitë e brinjëve të degëve dhe gjetheve të saj kanë numra matës që janë treshe të Pitagorës. Pemën e Pitagorës fillojmë ta formojmë nga rrënja, duke vizatuar një katror, mbi të cilin konstruktojmë një trekëndësh kënddrejtë, i cili mund të jetë barakrahës (vizatimi 6a) ose brinjëndryshëm (vizatimi 6b).



Vizatimi 6a



Vizatimi 6b

Vazhdojmë me konstruktimin e katrorëve mbi katetet, më pas mbi katrorët trekëndësha të rinj kënddrejtë, e kështu ndërtojmë krijimin tonë.

Shembuj të pemëve të Pitagorës janë dhënë në vizatimin 7a dhe vizatimin 7b.



Vizatimi 7a



Vizatimi 7b

Detyra juaj është të krijoni pemën tuaj të Pitagorës në një fletë nga fletorja, duke filluar me një katror me brinjë 5 cm dhe mbi të:

a) një trekëndësh kënddrejtë barakrahës, b) një trekëndësh kënddrejtë brinjëndryshëm.

Formën e trungut, degëve dhe gjetheve mund ta planifikoni të çfardoshëm dhe ta përpiloni duke i vendosur trekëndëshat në pozicione të ndryshme.

Hulumtim



1. Teorema e Pitagorës është një nga teoremat më të rëndësishme dhe më të zbatuara në gjeometri. Emrin e ka marrë për nder të matematikanit dhe filozofit të lashtë Pitagora, i cili jetoi në shekullin VI para erës sonë.
Me ndihmën e internetit, kërkoni informacione për jetën e matematikanit të lashtë Pitagora dhe zbulimet e tij.

2. Meteorologët nga një stacion meteorologjik vëzhgojnë një re në atmosferë. Me matje, ata përcaktuan se:

- distanca në tokë nga stacioni meteorologjik deri te pika që ndodhet vertikalisht poshtë resë është $d = 4$ km,
- lartësia e resë mbi tokë është $h = 1{,}5$ km.

Distancën nga stacioni meteorologjik deri te reja e shënuan me L.

a) Paraqiteni situatën me një skicë dhe shënoni katetet dhe hipotenuzën e trekëndëshit këndrejtë.

b) Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës, njehsoni distancën L nga stacioni meteorologjik deri te reja. Rrumbullakoni rezultatin në 0,1 km.

c) Sqaroni se si shkencëtarët mund të verifikojnë saktësinë e matjes duke zbatuar teoremën e anasjelltë të Pitagorës, nëse veçmas i matin tri gjatësitë (dy katetet dhe hipotenuzën).

ç) Hulumtoni në cilat raste gabimi në matje me saktësi 0,1 km mund të jetë kritik në meteorologji (për fluturimet ajrore ose për parashikimin e motit).

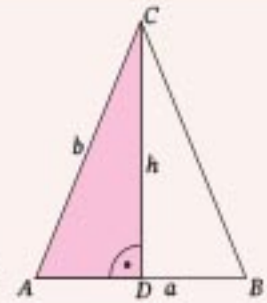
8. ZBATIMI I TEOREMËS SË PITAGORËS NË TREKËNDËSHA

Aktivitet

Në vizatimin 1 është dhënë një trekëndësh barakrahës ABC me bazë a dhe krah b. Nga kulmi C është lëshuar lartësia h në bazë.

a) A janë këndrejtë trekëndëshat ADC dhe BCD?

b) A është $\overline{AD} = \overline{DB}$?

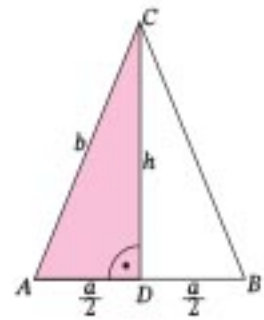


Vizatimi 1

Në trekëndëshin barakrahës ABC, lartësia h e tërhequr në bazën a e ndan trekëndëshin barakrahës ABC në dy trekëndësha këndrejtë të puthitshëm ADC dhe BDC (vizatimi 2). Sipas teoremës së Pitagorës, marrim formulën për njehsimin e krahut b të trekëndëshit barabrinjës

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ku h është lartësia e trekëndëshit dhe a është baza e trekëndëshit.



Vizatimi 2

Shembulli 1

Në trekëndëshin barakrahës, njehsoni:

a) krahun b, nëse $a = 16$ cm dhe $h = 15$ cm, b) lartësinë h, nëse $a = 10$ dhe $b = 13$ cm,

c) bazën a, nëse $b = 25$ m dhe $h = 24$ m.

Sipas teoremës së Pitagorës, duke zëvendësuar në formulat përkatëse, fitojmë

a) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + 8^2$

$b^2 = 289$

$b = \sqrt{289}$

$b = 17$ cm.

b) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2$

$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ cm.

$h = 12$ cm.

c) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 49$

$\frac{a}{2} = 7$

$a = 14$ cm.

Detyra 1

Njehsoni perimetrin e trekëndëshit barakrahës me bazë 18 cm dhe lartësi 12 cm. Ndërtoni vizatimin.

Udhëzim: Perimetri i trekëndëshit barakrahës njehsohet me formulën

$L = a + 2b$, ku a është baza, kurse b është krahu i trekëndëshit barakrahës.

Shembulli 2

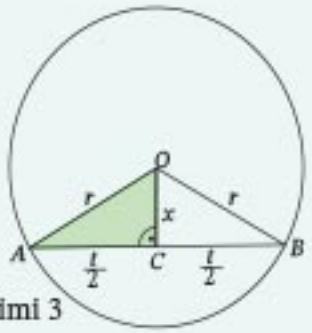
Në vijën rrethore me rreze $r = 8$ cm është tërhequr një kordë $t = 12{,}8$ cm. Njehsoni largesën e kordës nga qendra e vijës rrethore (Vizatimi 3).

Trekëndëshi ABO është trekëndësh barakrahës me krahë $\overline{AO} = \overline{BO} = r$.

Largesa $\overline{OC} = x$ është lartësia e trekëndëshit kënddrejtë ABO.

Me ndihmën e teoremës së Pitagorës fitojmë

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 8^2 - \left(\frac{12{,}8}{2}\right)^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04,\ x = 4{,}8 \text{ cm}.$$



Vizatimi 3

Shembulli 3

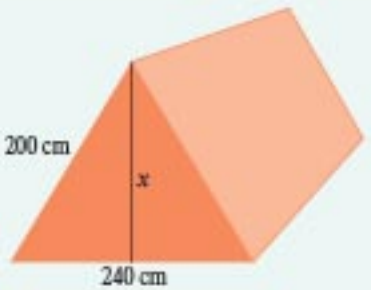
Dragani duhet të blejë një tub me të cilin do të mbështesë tendën, hyrja e së cilës është në formë trekëndëshi barakrahës me krah 200 cm dhe bazë 240 cm (figura 1). Sa është gjatësia e tubit që duhet të blejë Dragani?

Gjatësia e tubit x është lartësia e trekëndëshit barakrahës me bazë 240 cm dhe krah 200 cm.

Me ndihmën e teoremës së Pitagorës fitojmë se

$$x^2 = 200^2 - \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 200^2 - 120^2 = 25600,\ x = 160 \text{ cm}.$$

Gjatësia e tubit që duhet të blejë Dragani është 160 cm.

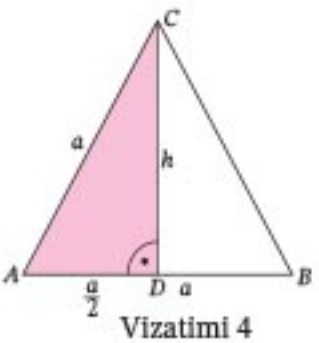


Vizatimi 1

Me tërheqjen e cilësdo lartësi h, trekëndëshi barabrinjës ABC ndahet në dy trekëndësha kënddrejtë të puthitshëm (vizatimi 4). Sipas teoremës së Pitagorës, fitojmë formulën për llogaritjen e brinjës a të trekëndëshit barabrinjës

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ku h është lartësia e trekëndëshit barabrinjës..



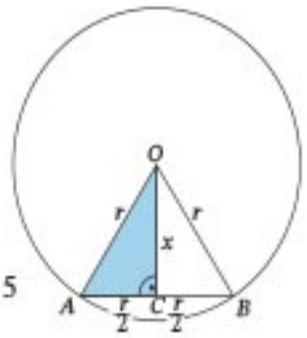
Vizatimi 4

Detyra 2

Në trekëndëshin barabrinjës, njehsoni lartësinë h, nëse është dhënë brinja $a = 10$ cm.

Detyra 3

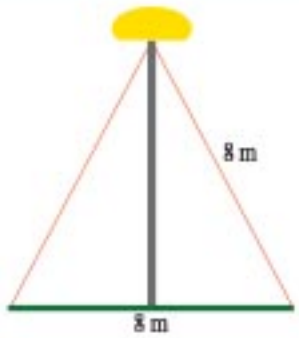
Në vijën rrethore me rreze $r = 8$ cm është tërhequr një kordë me gjatësi të barabartë me rrezen e vijës rrethore. Njehsoni largesën x të kordës nga qendra e vijës rrethore (vizatimi 5).



Vizatimi 5

Detyra 4

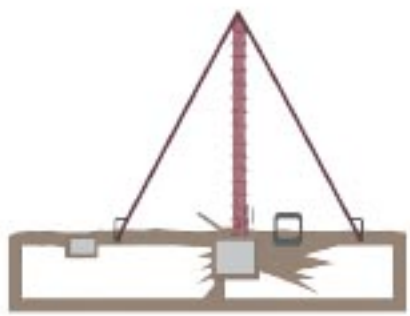
Në oborin e shkollës është vendosur një llambë në një shtyllë e cila është e mbështetur me dy mbajtëse simetrike të gjata nga 8 m (figura 2). Sa është lartësia e shtyllës, nëse largesa ndërmjet dy mbajtëseve e matur në tokë është 8 m??



Vizatimi 2

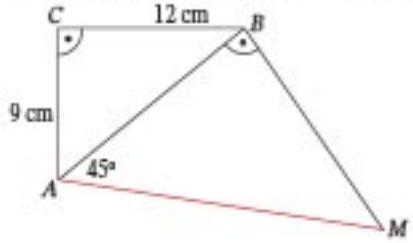
DETYRA PËR USHTRIME

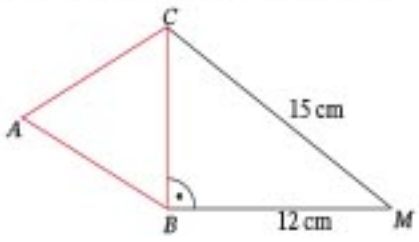
1. Njehsoni lartësinë e trekëndëshit barakrahës, nëse janë të njohura baza dhe krahu i tij:
   a) $a = 7$ cm dhe $b = 5{,}5$ cm, b) $a = 18$ cm dhe $b = 15$ cm.
2. Njehsoni krahun e trekëndëshit barakrahës me bazë të dhënë a dhe lartësi të bazës h:
   a) $a = 14$ cm dhe $h = 24$ cm, b) $a = 24$ dm dhe $h = 16$ dm.
3. Njehsoni lartësinë e trekëndëshit barabrinjës me brinjë: a) $a = 8$ cm, b) $a = 10$ cm.
4. Njehsoni gjatësinë e katetit të trekëndëshit kënddrejtë barakrahës, nëse gjatësia e hipotenuzës është 10 cm.
5. Një shtyllë e lartë 40 m është lidhur me kabllo çeliku për kunjat e ngulur në tokë në distancë 9 m nga këmbëza e saj (figura 3). Sa është gjatësia e kabllove të çelikut?



Vizatimi 3

6. Sipas të dhënave të paraqitura në vizatimin 6, llogaritni:
a) gjatësinë e segmentit AM, b) perimetrin e trekëndëshit barabrinjës ABC.





Vizatimi 6

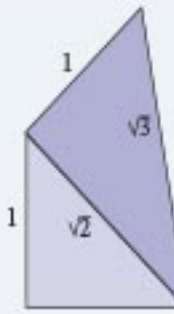
7. Në qendër të një pellgu rrethor me diametër 60 metra është vendosur një skulpturë. Mbi pellgun është vendosur një urë me gjatësi 48 metra (figura 4). Nga mesi i urës duhet të vendoset një urë e vogël montuese që do të dërgojë te skulptura. Sa do të jetë gjatësia e saj??



Vizatimi 4

Hulumtim

Për të konstruktuar një segment me gjatësi $\sqrt{2}$ në një njësi matëse të zgjedhur, duhet të konstruktojmë një trekëndësh kënddrejtë me katet 1.
Nëse në vizatimin ku kemi konstruktuar segmentin me gjatësi $\sqrt{2}$, konstruktojmë një trekëndësh kënddrejtë me katete me gjatësi $\sqrt{2}$ dhe 1, gjatësia e hipotenuzës do të jetë e barabartë me $\sqrt{3}$ $((\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2)$ (Vizatimi 7).
Shpjegoni procedurën, me të cilën, në të njëjtin vizatim, do të mund të konstruktoni segmentet me gjatësi: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$.



Vizatimi 7

9. KATËRKËNDËSHI. PARALELOGRAMI. DREJTKËNDËSHI, ROMBI DHE KATRORI

Aktivitet

a) Emërtoni katërkëndëshat në vizatimin 1.

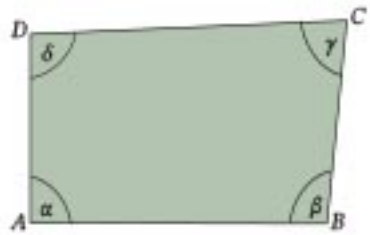


Vizatimi 1

b) Radhitni disa veti që i njihni për paralelogramet, drejtkëndëshat, rombet dhe katrorët.

Katërkëndëshi

Shqyrtoni katërkëndëshin $ABCD$ në vizatimin 2.



Rikujtojmë se pikat A, B, C dhe D janë **kulme** të katërkëndëshit, kurse segmentet AB, BC, CD dhe DA janë **brinjë** të katërkëndëshit.

Këndet α, β, γ dhe δ janë kënde të brendshme (shkurt kënde) të katërkëndëshit.

Dy kulme që shtrihen në të njëjtën brinjë quhen **kulme fqinje**, ndërsa dy kulme që nuk ndodhen në të njëjtën brinjë quhen **kulme të kundërta**. Për shembull, kulmet A dhe B janë fqinje, kurse kulmet A dhe C janë të kundërta.

Dy brinjë me kulm të përbashkët quhen **brinjë fqinje**, ndërsa dy brinjë që nuk kanë kulm të përbashkët quhen **brinjë të kundërt**. Në këtë kuptim, brinjët AB dhe BC janë fqinje, kurse brinjët AB dhe CD janë brinjë të kundërt.

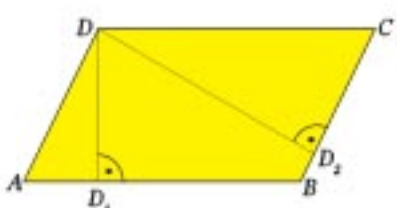
Këndet që shtrihen në të njëjtën brinjë quhen **kënde fqinje**, ndërsa këndet që nuk shtrihen në të njëjtën brinjë quhen **kënde të kundërta**.

Shuma e këndeve në një katërkëndësh është 360°, pra $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

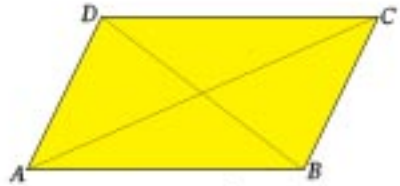
Paralelogrami

Rikujtoni se katërkëndëshi me dy palë brinjë paralele quhet **paralelogram**.

Largesa midis brinjëve paralele në paralelogram quhet **lartësi e paralelogramit**. Gjithashtu, e keni të ditur se segmenti, skajet e të cilit janë dy kulme të kundërta, quhet **diagonale e paralelogramit**



Vizatimi 3a



Vizatimi 3b

Në vizatimin 3a është dhënë paralelogrami $ABCD$. Segmentet DD_1 dhe DD_2 janë lartësitë e lëshuara nga kulmi D në brinjët AB dhe BC, përkatësisht. Vëreni se çdo paralelogram ka dy lartësi.
Në vizatimin 3b është dhënë paralelogrami $ABCD$. Segmentet AC dhe BD janë diagonale të paralelogramit. Çdo paralelogram ka dy diagonale.

Detyra 1

Vizatoni një paralelogram të çfardoshëm, e më pas shënoni kulmet dhe këndet e tij.
Shkruani çiftet: kulmet fqinje, kulmet e kundërta, këndet fqinje dhe këndet e kundërta. Vizato:
a) lartësitë e tij, b) diagonalet e tij.

Duke zbatuar kriteret e puthitshmërisë së trekëndëshave, mund të shpjegojmë disa veti të paralelogrameve që i keni mësuar më parë.

Shqyrtoni paralelogramin $ABCD$ në vizatimin 4a. Për trekëndëshat ABD dhe CDB vlen:

A: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ Si kënde të anëshkruara (ndërruese ose alternative) të transversales BD me drejtëzat paralele AB dhe CD.

C: BD është brinjë e përbashkët,

A: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ Si kënde të anëshkruara të transversales BD me drejtëzat paralele AD dhe BC.

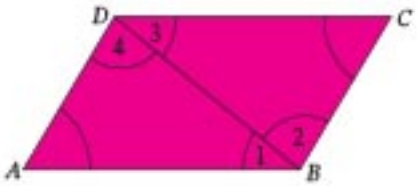
ACA: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Nga puthitshmëria e trekëndëshave ABD dhe CDB, fitojmë se brinjët dhe këndet përgjegjëse janë të barabarta. Përkatësisht, të barabarta janë::

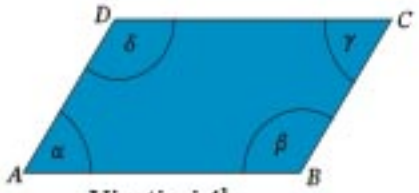
brinjët e kundërta $\overline{AB} = \overline{CD}$ dhe $\overline{AD} = \overline{CB}$, dhe

këndet e kundërta $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ dhe $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle ADC$.

Këndet α dhe δ janë kënde suplementarë, si kënde të njëanshme të transversalës AD me drejtëzat paralele AB dhe CD (vizatimi 4b), pra $\alpha + \delta = 180°$.



Vizatimi 4a

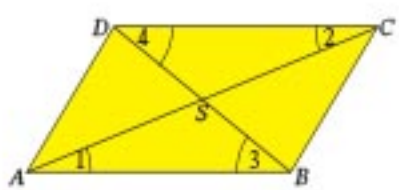


Vizatimi 4b

- Çdo diagonale e ndan paralelogramin në dy trekëndësha të puthitshëm.
- Në çdo paralelogram, brinjët e kundërta janë të barabarta ndërmjet tyre.
- Në çdo paralelogram, këndet e kundërta janë të barabarta ndërmjet tyre.
- Në çdo paralelogram, këndet fqinje janë suplementarë.

Detyra 2

Me ndihmën e kritereve të puthitshmërisë së trekëndëshave, shpjegoni pse në çdo paralelogram diagonalet përgjysmohen në pikën e prerjes.
Udhëzim: Vërtetoni se $\Delta ABS \cong \Delta CDS$ (Vizatimi 5).



Vizatimi 5

Shembulli 1

Njehsoni këndet tjera të paralelogramit, nëse njëri nga këndet e tij është 70°.

$\alpha = 70°$.

$\gamma = 70°$ Këndet e kundërta në një paralelogram janë të barabarta.

$\alpha + \beta = 180°$ Këndet fqinje në një paralelogram janë suplementarë.

$70° + \beta = 180°$

$\beta = 110°$

$\delta = \beta = 110°$ Këndet fqinje në një paralelogram janë suplementarë.

Detyra 3

Në një park botanik po ndërtohet një serë e re. Baza e serës duhet të jetë në formë paralelogrami $ABCD$. Arkitekti ka shënuar pikat A, B, C dhe D në terren dhe ka matur se këndi në kulmin A është 72°. Njehsoni këndet në paralelogram.

Detyra 4

Shuma e dy këndeve të kundërt në një paralelogram të dhënë është 142°. Njehsoni këndet në paralelogram.

Drejtkëndëshat, rombet dhe katrorët janë paralelogramë, prandaj vetitë e përgjithshme të paralelogrameve vlejnë edhe për ta. Në vijim do të parashtrojmë disa veti të veçanta të drejtkëndëshave, rombeve dhe katrorëve, të cilat do të mund t'i zbatoni në zgjidhjen e problemeve.

Drejtkëndëshi

Rikujtoni se paralelogrami në të cilin të gjithë këndet janë kënde të drejta quhet **drejtkëndësh**.

Në vizatimin 6 është dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ me diagonale AC dhe BD.



Vizatimi 6

Për trekëndëshat ABC dhe BAD kemi:

C: AB është brinjë e përbashkët,

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$ Paralelogrami $ABCD$ është drejtkëndësh.

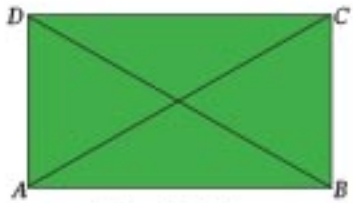
C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Si brinjë të kundërta të paralelogramit.

CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\overline{AC} = \overline{BD}$ Si brinjë përgjegjëse të trekëndëshave të puthitshëm ABC dhe BAD.

Diagonalet në çdo drejtkëndësh janë të barabartë ndërmjet tyre.

Në vizatimin 7 është dhënë paralelogrami $ABCD$ me diagonale të barabarta.



Vizatimi 7

Për trekëndëshat ABC dhe BAD kemi:

C: AB është brinjë e përbashkët,

C: $\overline{AC} = \overline{BD}$, Sipas kushtit për diagonalet e paralelogramit.

C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Si brinjë të kundërta të paralelogramit.

CCC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ Si kënde përgjegjëse në trekëndëshat e puthitshëm ABC dhe BAD.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$ Si kënde fqinje në paralelogram.

Од $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ dhe $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, fitojmë se $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$.

Nëse diagonalet e një paralelogrami janë të barabarta, atëherë ai paralelogram është drejtkëndësh.

Shembulli 2

Diagonalet në drejtkëndëshin $ABCD$ priten në pikën S.

a) Shkruani të gjitha çiftet e trekëndëshave të puthitshëm, kulmet e të cilëve janë A, B, C, D ose S.

b) Cilët prej tyre janë barakrahës, e cilët janë kënddrejtë?

a) $\Delta ABS \cong \Delta DCS$, $\Delta BSC \cong \Delta ASD$, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ dhe $\Delta DCB \cong \Delta CDA$.

b) Barakrahës janë: ΔABS, ΔDSC, ΔBSC dhe ΔASD.
Kënddrejtë janë: ΔABC, ΔBAD, ΔBCD dhe ΔCDA.

Shembulli 3

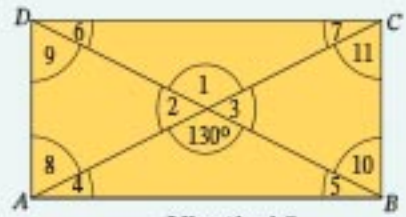
Këndi më i madh që formojnë diagonalet AC dhe BD të drejtkëndëshit $ABCD$ është 130°. Sa janë këndet që formojnë diagonalet me brinjët e drejtkëndëshit?

Le të shënojmë me S pikën e prerjes së diagonaleve AC dhe BD. Nga vizatimi 8 vërejmë se:

$\sphericalangle 1 = 130°$ Si kënde të kundërta.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 180° - 130° = 50°$ Si kënde suplementare.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 25°$ Si kënde në bazën e trekëndëshit barakrahës ABS.



Vizatimi 8

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 7 = 25°$ Si kënde në bazën e trekëndëshit barakrahës DSC.

$\sphericalangle 8 = \sphericalangle 9 = 65°$ Si kënde në bazën e trekëndëshit barakrahës ASD.

$\sphericalangle 10 = \sphericalangle 11 = 65°$ Si kënde në bazën e trekëndëshit barakrahës BSC.

Detyra 5

Në drejtkëndëshin $ABCD$, këndi midis diagonales AC dhe brinjës AD është 32°.

a) Njehsoni këndin midis diagonales AC dhe brinjës BC.

b) Gjeni këndet tjera që formon diagonalja AC me brinjët.

c) Sa është këndi midis diagonaleve AC dhe BD?

Detyra 6

Në një dhomë drejtkëndore $ABCD$, nga pika A deri te kulmi i kundërt C, është vendosur një shirit LED përgjatë tavanit. Shiriti formon një kënd prej 52° me brinjën AB.

a) Vizatoni drejtkëndëshin $ABCD$.

b) Sa është këndi që formon shiriti me brinjën AD?

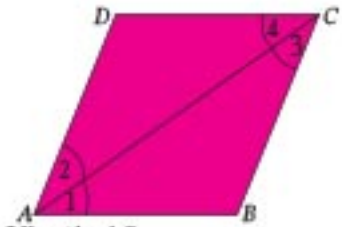
c) Sa është këndi midis shiritit dhe brinjës BC?

Rombi

Rikujtoni se paralelogrami në të cilin të gjitha brinjët janë të barabarta quhet **romb**.

Për rombin $ABCD$ në vizatimin 9 vlen:

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ dhe $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ Si kënde të kundërta në paralelogram.



Vizatimi 9

Për trekëndëshat barakrahës ABC dhe ADC kemi:

C: AC është brinjë e përbashkët,

C: $\overline{AB} = \overline{AD}$, Të gjitha brinjët e rombit janë të barabarta.

C: $\overline{BC} = \overline{CD}$,

CCC: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ dhe $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ Si kënde përkatëse të trekëndëshave të puthitshëm ABC dhe ADC.

Vërejmë se AC është përgjysmorja (simetralja) e këndit në kulmin A dhe e këndit në kulmin C.

Në mënyrë të ngjashme, mund të shpjegojmë se BD është përgjysmorja (simetralja) e këndit në kulmin B dhe e këndit në kulmin D.

Diagonalet në çdo romb janë përgjysmore (simetrale) të këndeve të kundërta.

Në vizatimin 10 është dhënë rombi $ABCD$ me diagonale AC dhe BD që priten në pikën S.

Për trekëndëshat ΔABS dhe ΔCBS vlen:

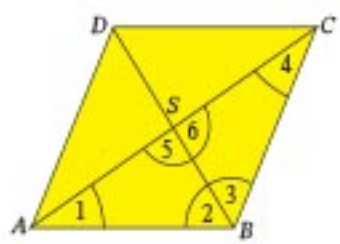
C: BS është brinjë e përbashkët,

C: $\overline{AB} = \overline{BC}$, Të gjitha brinjët e rombit janë të barabarta.

C: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Diagonalet në romb përgjysmohen.

CCC: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ Si kënde përgjegjëse të trekëndëshave të puthitshëm ΔABS dhe ΔCBS.



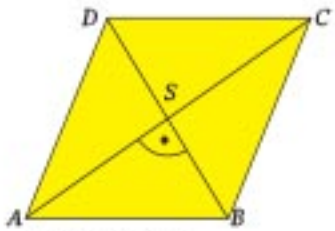
Vizatimi 10

Nga $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ dhe $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180°$, fitojmë se $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = 90°$.

Diagonalet AC dhe BD janë reciprokisht normale ($AC \perp BD$).

Diagonalet në çdo romb janë reciprokisht normale.

Në vizatimin 11 është dhënë paralelogrami $ABCD$ me diagonale AC dhe BD reciprokisht normale. Për trekëndëshat ΔABS dhe ΔCBS vlen:



Vizatimi 11

C: BS është brinjë e përbashkët,

A: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90°$, Sipas kushtit të normales së diagonaleve të paralelogramit.

C: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Diagonalet në paralelogram përgjysmohen.

CAC: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ Si brinjë përgjegjëse të trekëndëshave të puthitshëm ΔABS dhe ΔCBS.

Nëse në një paralelogram diagonalet janë reciprokisht normale, atëherë ai është romb.

Detyra 7

Në rombin $ABCD$ pikat A_1, B_1, C_1 dhe D_1 janë pikat e mesme të brinjëve AB, BC, CD dhe DA, përkatësisht. Çfarë paralelogrami fitohet duke i lidhur këto pika? Arsyetoni përgjigjen.

Shembulli 4

Njehsoni gjatësinë e diagonales më të shkurtër të rombit, nëse gjatësia e brinjës është 5 cm dhe njëri kënd i tij është 120°?

Rombi $ABCD$ që i plotëson kushtet e detyrës është dhënë në vizatimin 12. Kemi:

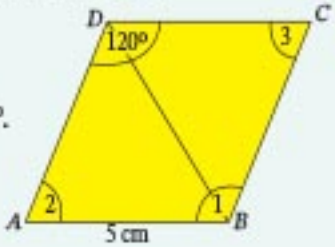
$\sphericalangle 1 = 120°$ Si kënde të kundërta në romb.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ Si kënde të kundërta në romb.

$120° + 120° + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 360°$ Shuma e këndeve në romb është 360°.

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120°$

Од $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ dhe $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120°$ gjejmë se $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 60°$.



Vizatimi 12

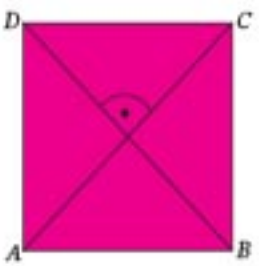
TrekëndëshiABD është barabrinjës, si trekëndësh barakrahës me kënd në kulm 60°. ga kjo, diagonalja më e shkurtër është $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

Katrori

Meqenëse çdo katror është drejtkëndësh me brinjë të barabarta dhe është romb me kënde të drejta, të gjitha vetitë që vlejnë për drejtkëndëshat dhe rombet vlejnë edhe për katrorët. Përveç tyre, katrorët kanë edhe vetitë në vijim.

Diagonalet e katror janë të barabarta, sepse ai është drejtkëndësh.

Gjithashtu, ato janë edhe normale, sepse ai është edhe romb (vizatimi 13).



Vizatimi 13

- Diagonalet në çdo katror janë të barabarta dhe reciprokisht normale.
- Nëse në një paralelogram diagonalet janë të barabarta dhe reciprokisht normale, atëherë ai është katror.

Shembulli 5

Në një muze ka ekspozitë interaktive në një sallë katrore $ABCD$. Në kulmet A, B, C dhe D janë vendosur pajisje që emetojnë rreze lazer.
Kur ekspozita ndizet, nga kulmi A emetohet një rreze drejt kulmit C (përgjatë diagonales AC), dhe nga kulmi B emetohet një rreze drejt kulmit D (përgjatë diagonales BD).
Pajisjet janë programuar ashtu që sa herë që dy rrezet priten, aktivizohet një efekt drite.
a) Nën cilin kënd priten rrezet AC dhe BD?
b) A janë diagonalet AC dhe BD të barabarta? Shpjegoni pse.
c) Çfarë këndi formon diagonalja AC me brinjën AB?

Salla është në formë katrori. Prandaj:
a) rrezet AC dhe BD priten në kënd të drejtë, b) diagonalet AC dhe BD janë të barabarta,
c) diagonalja AC me brinjën AB formon një kënd prej 45°.

Detyra 8

Në katrorin $ABCD$ pikat A_1, B_1, C_1 dhe D_1 janë pikat e mesme të brinjëve AB, BC, CD dhe DA, përkatësisht. Çfarë paralelogrami fitohet duke i lidhur këto pika?

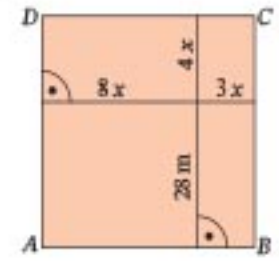
DETYRA PËR USHTRIME

1. Shuma e dy këndeve të kundërta të paralelogramit është 94°. Gjeni madhësinë e secilit kënd të paralelogramit.
2. Njehsoni këndet e paralelogramit, nëse dihet se njëri nga këndet e tij është 2 herë më i madh se tjetri.
3. Diagonalja më e madhe e rombit formon një kënd prej 35° me brinjën. Gjeni këndet e rombit.
4. Gjeni këndet e rombit, nëse njëra diagonale e tij është e barabartë me brinjën.
5. Brinja e drejtkëndëshit, e gjatë 6 cm, formon një kënd prej 60° me diagonalen. Gjeni gjatësinë e diagonales.
6. Diagonalet e një drejtkëndëshi priten në kënd prej 132°. Gjeni këndet midis diagonaleve dhe brinjëve të drejtkëndëshit.
7. Këndi midis lartësisë dhe brinjës së rombit është 34°. Gjeni këndet e rombit.
8. Gjeni këndet ndërmjet diagonaleve dhe brinjëve të rombit, nëse njëri kënd i rombit është 46°.

9. Gjeni këndet e rombit, nëse këndi midis lartësisë dhe diagonales më të vogël është 35°.

10. Në drejtkëndëshin *ABCD*, pika *M* është pika e mesme e brinjës *AB*. Nëpër pikën *M* është tërhequr një drejtëz që pret brinjën *CD* në pikën *N*, ashtu që $\sphericalangle BMN = 75°$.
Ndërtoni vizatimin, e më pas njehsoni këndin: a) *MNC*, b) *AMN*?

11. Një parcelë në formë katrori është e ndarë në pjesë si në vizatimin 14.
Gjeni dimensionet (brinjët) e parcelës.



Vizatimi 14

Hulumtim

Në stiropor vendosni letër në të cilën është vizatuar një rrjetë katrore. Më pas vendosni 4 gjilpëra si kulme të një katërkëndëshi dhe rreth tyre shtrëngo një shirit të zgjatshëm (llastik). Hulumtoni vetitë e paralelogrameve duke ndryshuar pozicionet e gjilpërave. Shqyrtoni kur një katërkëndësh është paralelogram në varësi të pozicionit të prerjes së diagonaleve. Kur ai paralelogram është romb? Çfarë ndryshimi në diagonalet e paralelogramit duhet bërë për të fituar një drejtkëndësh?

10. TRAPEZI DHE DELTOIDI

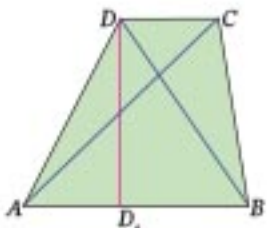
Aktivitet

Cili nga katërkëndëshat e dhënë në vizatimin 1 ka vetëm një çift brinjësh paralele?



Vizatimi 1

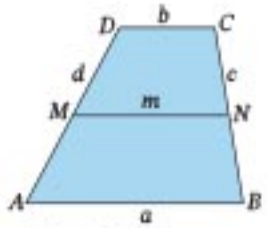
Rikujtoni se katërkëndëshi që ka vetëm një çift brinjësh paralele quhet **trapez**.
Në vizatimin 2 është paraqitur trapezi *ABCD*. Brinjët *AB* dhe *CD* janë paralele dhe quhen **baza** (baza e sipërme dhe e poshtme), ndërsa brinjët *AD* dhe *BC* nuk janë paralele dhe quhen **krahë** të trapezit.



Vizatimi 2

Largesa midis brinjëve paralele quhet **lartësi e trapezit**. Segmenti që lidh dy kulme të kundërta quhet **diagonale e trapezit**.Segmenti DD_1 është lartësia e trapezit, ndërsa segmentet *AC* dhe *BD* janë diagonale të trapezit.

Nëse me M shënojmë pikën e mesme të krahut AD, dhe me N pikën e mesme të krahut BC, atëherë segmenti MN është vija e mesme e trapezit $ABCD$ (vizatimi 3). Gjatësitë e bazave shënohen me $a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$, gjatësitë e krahëve me $c = \overline{BC}$ dhe $d = \overline{AD}$, kurse gjatësia e vijës së mesme me $m = \overline{MN}$.



Vizatimi 3

Segmenti që lidh pikat e mesme të krahëve të trapezit quhet **vija e mesme** e trapezit.

Detyra 1

Vizatoni një trapez të çfardoshëm, e më pas vizatoni:
a) lartësitë e tij, b) diagonalet, c) vijën e mesme.

Vija e mesme e trapezit është paralele me bazat dhe gjatësia e saj është e barabartë me gjysmën e shumës së gjatësive të bazave.

Sipas kësaj, gjatësia e vijës së mesme m të trapezit llogaritet me formulën

$$m = \frac{a+b}{2},$$

ku a dhe b janë bazat e trapezit.

Shembulli 1

Njehsoni vijën e mesme të një trapezi, nëse bazat e tij kanë gjatësi 8 cm dhe 5 cm.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+5}{2} = 6{,}5\,\text{cm}$ Zëvendësojmë në formulën për vijën e mesme të trapezit.

Detyra 2

Njehsoni gjatësinë e vijës së mesme të një trapezi me baza:
a) $a = 17$ cm dhe $b = 11$ cm, b) $a = 4{,}2$ dm dhe $b = 28$ cm.

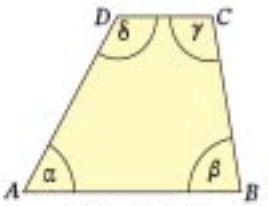
Detyra 3

Bazat e një trapezi kanë dallim për 10 cm. Njehsoni gjatësinë e tyre, nëse gjatësia e vijës së mesme është $m = 15$ cm.

Këndet α, β, γ dhe δ janë këndet e brendshme të trapezit *ABCD* në vizatimin 4.
Nëse i vazhdojmë brinjët e trapezit në drejtëza, marrim

$\alpha + \delta = 180°$ Si këndet të njëanshme të transversales *AD* me drejtëzat paralele *AB* dhe *DC*.

$\beta + \gamma = 180°$ Si këndet të njëanshme të transversales *BC* me drejtëzat paralele *AB* dhe *DC*.



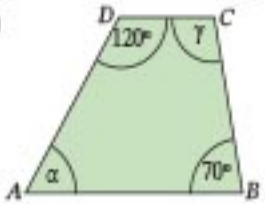
Vizatimi 4

Këndet që ndodhen mbi të njëjtin krah të trapezit janë suplementarë.

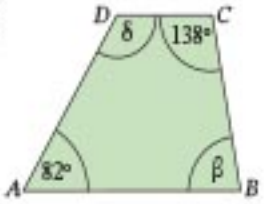
Shembulli 2

Njehsoni këndet e trapezit të dhënë në vizatimin 5:

a)



b)



Vizatimi 5

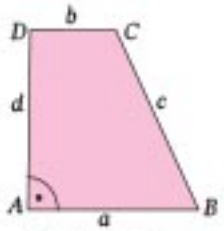
Meqenëse këndet që ndodhen mbi të njëjtin krah janë suplementarë, kemi:

a) $\alpha + 120° = 180°$, $\alpha = 60°$; $70° + \gamma = 180°$, $\gamma = 110°$.

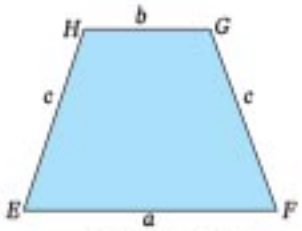
b) $\delta + 82° = 180°$, $\delta = 98°$; $\beta + 138° = 180°$, $\beta = 42°$.

Trapezi në të cilin njëri nga krahët është normal ndaj bazave quhet **trapez kënddrejtë**.
Trapezi me krahë të barabartë quhet **trapez barakrahës**.

Në vizatimin 6a është dhënë një trapez kënddrejtë, ndërsa në vizatimin 6b është dhënë një trapez barakrahës.



Vizatimi 6a



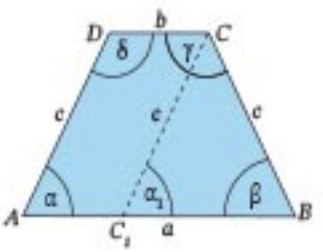
Vizatimi 6b

Detyra 4

Vizatoni një trapez barabrinjës të çfardoshëm, e më pas vizatoni::

a) lartësinë b) diagonalet c) vijën e mesme

Në vizatimin 7 është dhënë trapezi barakrahës *ABCD*.
Me segmentin CC_1 paralel me a *AD* trapezi ndahet në një trekëndësh barakrahës C_1BC dhe një paralelogram AC_1CD.



Vizatimi 7

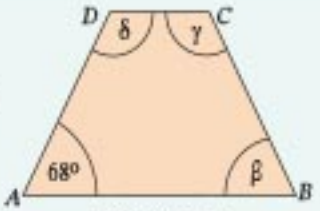
$\alpha_1 = \beta$ Si kënde mbi bazën e trekëndëshit barakrahës C_1BC.
$\alpha_1 = \alpha$ Si kënde përgjegjëse të transversales AB me drejtëzat paralele C_1C dhe AD.
$\beta = \alpha$ Rrjedh nga dy barazimet e mësipërme.

Në çdo trapez barabrinjës, këndet që ndodhen mbi të njëjtën bazë janë të barabarta.

Shembulli 3

Llogarit këndet në trapezin barakrahës $ABCD$, nëse njëri prej tyre është e $\alpha = 68°$ (Vizatimi 8).

$\beta = \alpha = 68°$ Këndet janë të barabartë si kënde që ndodhen mbi të njëjtën bazë AB.
$\alpha + \delta = 180°$ Këndet janë suplementarë si kënde që ndodhen mbi të njëjtin krah AD.
$68° + \delta = 180°$ Zëvendësojmë dhe llogarisim.
$\delta = 180° - 68°$
$\delta = 112°$.
$\gamma = \delta = 112°$ Këndet janë të barabartë si kënde që ndodhen mbi të njëjtën bazë CD.

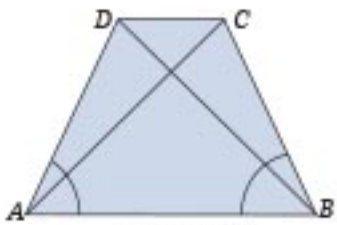


Vizatimi 8

Detyra 5

Shuma e këndeve që ndodhen mbi njërën nga bazat e një trapezi barakrahës është 150° 20′. Njehsoni këndet tjera të trapezit.

Në vizatimin 9 është dhënë trapezi barakrahës $ABCD$. Për trekëndëshat ABC dhe BAD kemi:
C: AB është brinjë e përbashkët,
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$, Si kënde mbi bazën AB të trapezit barakrahës.
C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Trapezi $ABCD$ është barakrahës sipas kushtit.
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
$\overline{AC} = \overline{BD}$ Si brinjë përgjegjëse në trekëndësha të puthitshëm.



Vizatimi 9

Diagonalet në një trapez barabrinjës janë të barabarta.

Shembulli 4

Një sipërfaqe lulesh në oborrin e shkollës ka formën e një trapezi barakrahës (figura 1). Baza e sipërme është e barabartë me krahët dhe ka gjatësi prej 5 m, kurse baza e poshtme është e gjatë 11 m.
Shkolla planifikon të zgjerojë lëndinën ashtu që do t'i dyfishojë krahët, e më pas do ta rrethojë. Sa metra gardh nevojiten për të gjithë lëndinën?

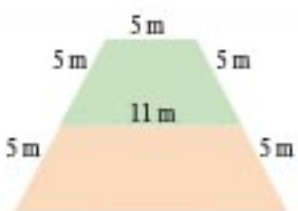


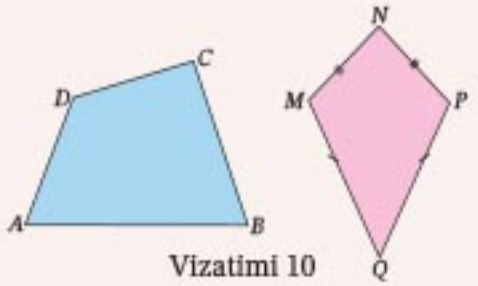
Figura 1

Me dyfishimin e krahëve, fitojmë një trapez barabrinjës me vijë të mesme 11 m. Prandaj,
$11 = \frac{a+5}{2}$, $a = 2 \cdot 11 - 5 = 17$ m.
Perimetri i lëndinës do të jetë $P = 5 + 10 + 10 + 17 = 42$ m.

Deltoidi

Aktivitet

Në vizatimin 10 janë dhënë dy trapezoidë *ABCD* dhe *MNPQ*.
Ata nuk kanë asnjë çift brinjësh paralele.
Cili prej tyre ka dy nga dy brinjë fqinje të barabarta?

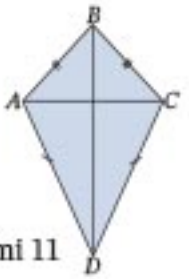


Vizatimi 10

Me siguri vërejte se trapezoidi *MNPQ* ka dy nga dy brinjë fqinje të barabarta, pra
$\overline{MN} = \overline{PN}$ dhe $\overline{MQ} = \overline{PQ}$.

Trapezoidi që ka dy çifte brinjësh fqinje të barabarta quhet **deltoid.**

Për deltoidin *ABCD* në vizatimin 11 kemi:
C: *BD* është brinjë e përbashkët,
C: $\overline{AB} = \overline{CB}$,
C: $\overline{AD} = \overline{CD}$,
CCC: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

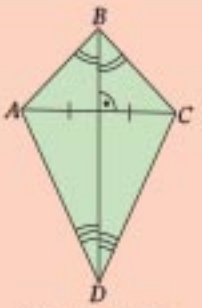


Vizatimi 11

Diagonalja, skajet e së cilës janë kulmet që lidhin brinjët e barabarta, e ndan deltoidin në dy trekëndësha të puthitshëm.

Nga puthitshmëria e këtyre dy trekëndëshave, marrim vetitë e mëposhtme (vizatimi 12)..

- Këndet në kulmet që lidhin brinjët e pabarabarta janë të barabartë.
- Diagonalja, skajet e së cilës janë kulmet që lidhin brinjët e barabarta, është përgjysmore (simetrale) e diagonales tjetër.
- Diagonalja, skajet e së cilës janë kulmet që lidhin brinjët e pabarabarta, e ndan deltoidin në dy trekëndësha barakrahës.
- Diagonalet e deltoidit janë reciprokisht normale.



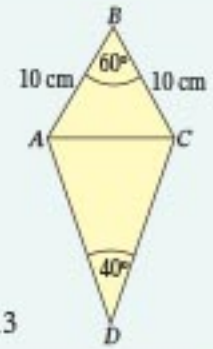
Vizatimi 12

Shembulli 5

Brinjët më të shkurtra të deltoidit janë 10 cm. Dy kënde të tij të kundërta janë 60° dhe 40°. Sa është gjatësia e diagonales më të shkurtër? Ndërtoni vizatimin.

Deltoidi *ABCD* që i plotëson kushtet e detyrës është dhënë në vizatimin 13.
Trekëndëshi *ACB* është barabrinjës, si trekëndësh barakrahës me kënd në kulm 60.

Prandaj, diagonalja më e shkurtër është $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$.



Vizatimi 13

Detyra 7

Dy kënde jo fqinje në deltoid janë 115° dhe 46°. Llogaritni këndet tjera.

Detyra 8

Njëri nga këndet e brendshme të deltoidit është 51°, ndërsa shuma e këndeve të barabartë është 144°. Njehsoni këndet e deltoidit.

Detyra 9

Në një park, në një lëndinë në formë trapezi kënddrejtë, janë vendosur llamba në pikat *A* dhe *C* (figura 2). Llamba në *A* emeton dritë nën këndin $\alpha = 38°$, kurse llamba në *C* nën këndin $\beta = 132°$. Sa janë këndet nën të cilët priten krahët e këndeve α dhe β, nëse nga prerja formohet deltoidi *ABCD*?

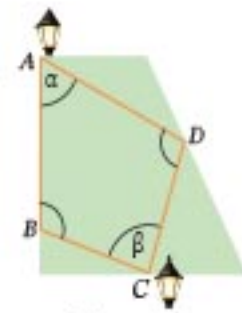


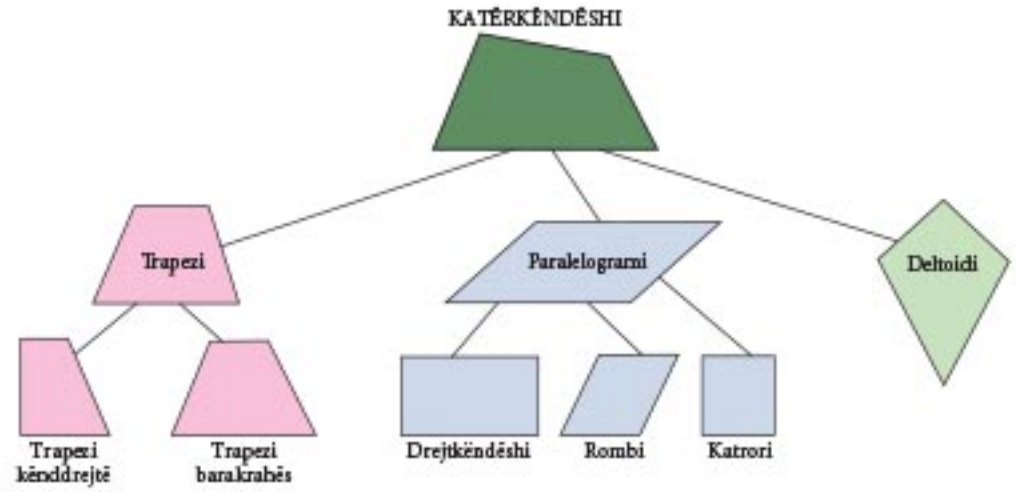
Figura 2

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni vijën e mesme të trapezit me baza $a = 18{,}6$ cm dhe $b = 13{,}8$ cm.
2. Vija e mesme e trapezit është 7,3 cm, ndërsa njëra bazë është 8,7 cm. Njehsoni bazën tjetër.
3. Vija e mesme e një trapezi barakrahës është e gjatë 7 cm, ndërsa bazat dallojnë për 5 cm. Njehsoni gjatësitë e bazave.
4. Perimetri i një trapezi me krahë me gjatësi 3 cm dhe 4 cm është 20 cm. Njehsoni gjatësinë e vijës së mesme të trapezit.
5. Shuma e këndeve që shtrihen në njërën nga bazat e trapezit kënddrejtë është 235°. Njehsoni këndet e tjera të trapezit.

6. Njëri nga këndet mbi bazën e poshtme të trapezit barakrahës është 45°, lartësia është 8 cm, ndërsa baza më e vogël është 6 cm e gjatë. Njehsoni gjatësinë e bazës më të madhe të trapezit.
7. Njehsoni këndet e një trapezi barakrahës, nëse dihet se këndi mbi bazën më të vogël është dy herë më i madh se këndi mbi bazën më të madhe.
8. Njehsoni lartësinë e një trapezi barakrahës, nëse njëri nga këndet e tij të brendshëm është 45°, dhe bazat kanë gjatësi 9 cm dhe 5 cm.
9. Në trapezin barakrahës *ABCD*, trekëndëshi *ABC* i formuar nga baza më e gjatë, krahu dhe njëra nga diagonalet e trapezit është barakrahës. Nëse këndi $BAC = 40°$, njehsoni këndin *DAC*.
10. Dy kënde të kundërta të deltoidit janë 51° dhe 86°. Njehsoni këndet tjera të deltoidit.
11. Njëri nga këndet e brendshme të deltoidit është 47°, ndërsa shuma e këndeve të barabarta është 236°. Gjeni këndet e deltoidit.
12. **Detyrë projektuese**
    Vizatoni në letër hartën e dhënë mendore. Plotësoni atë në mënyrë që përgjigjet e pyetjeve t'i shkruani në katërkëndëshin përkatës.

KATËRKËNDËSHI Çfarë quajmë katërkëndësh? Cilët dy brinjë janë fqinje, e cilët të kundërt? Cilat dy kulme janë fqinje, e cilat të kundërta? Sa është shuma e këndeve të tij të brendshme?	TRAPEZI Çfarë quajmë trapez? Si quhen brinjët joparalele? Çfarë quajmë vijë të mesme e trapezit? Si janë kënde që ndodhen mbi të njëjtin krah?	DELTOIDI Si janë brinjët e tij? Në çfarë marrëdhënie reciproke janë diagonalet e deltoidit?
TRAPEZI BARAKRAHËS Si janë krahët ndërmjet tyre? Si janë kënde që ndodhen mbi të njëjtën bazë? Si janë diagonalet ndërmjet tyre?	TRAPEZI KËNDDREJTË Cili trapez quhet kënddrejtë?	PARALELOGRAMI Çfarë quajmë paralelogram? Si janë brinjët e kundërta ndërmjet tyre? Si janë kënde të tij të kundërta? Si janë kënde të tij fqinje? Si janë diagonalet në lidhje me pikën e tyre të prerjes?
DREJTKËNDËSHI Si janë gjatësitë e diagonaleve të tij? Si janë këndet e tij?	KATRORI Si janë gjatësitë e diagonaleve të tij? Si janë për nga gjatësia brinjët e tij? Si janë kënde të tij? Çfarë paraqet diagonalja për këndet e kundërta?	ROMBI Si janë gjatësitë e brinjëve të tij? Nën cilin kënd priten diagonalet e tij? Çfarë paraqet diagonalja për këndet e kundërta?



11. ZBATIMI I TEOREMËS SË PITAGORËS NË KATËRKËNDËSHA

Aktivitet

a) Emërtoni katërkëndëshat në vizatimin 1.
b) Shkruani çfarë dini për secilin lloj katërkëndëshi.

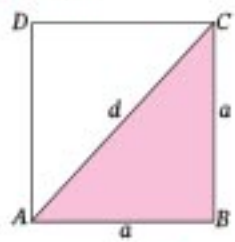


Vizatimi 1

Teorema e Pitagorës gjen zbatim edhe në detyrat për katërkëndësha (katrorë, drejtkëndësha, trapeze, rombe, deltoidë, etj.). Duke tërhequr disa segmente, ata mund të ndahen në pjesë të tilla, midis të cilave do të ketë trekëndësha kënddrejtë. Këtë do ta ilustrojmë me detyrat e mëposhtme. Për llogaritjet, do të përdorim kalkulator dhe rezultatin do ta rrumbullakojmë në dy vende dhjetore.

Zbatimi i teoremës së Pitagorës në katror, drejtkëndësh dhe romb

Në vizatimin 2 është dhënë katrori $ABCD$ me brinjë a. Diagonalja d e ndanë katrorin në dy trekëndësha barakrahës të puthitshëm. Ajo është hipotenuzë e secilit prej tyre.



Vizatimi 2

Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës në secilin prej tyre, fitojmë formulën për llogaritjen e diagonales d të katrorit

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

ku a është brinja e katrorit.

Shembulli 1

Njehsoni diagonalen d të katrorit me brinjë $a = 9$ cm.

$d^2 = 2a^2,\ d^2 = 2 \cdot 9^2$ — Zëvendësojmë në formulën për llogaritjen e diagonales së katrorit.

$d = 12{,}73$ cm — Rrumbullakojmë në dy vende dhjetore.

Shembulli 2

Sa është brinja e katrorit me diagonale $d = 8$ cm?

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32,\ a = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

Detyra 1

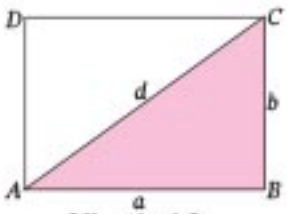
Njehsoni

a) diagonalen d të katrorit, nëse $a = 6$ cm, b) brinjën a të katrorit, nëse $d = 10$ cm.

Në vizatimin 3 është dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ me brinjë a dhe b. Diagonalja d e ndan drejtkëndëshin në dy trekëndësha kënddrejtë të puthitshëm. Ajo është hipotenuzë e secilit prej tyre.
Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës në secilin prej tyre, fitojmë formulën për njehsimin e diagonales d të drejtkëndëshit,

$$d^2 = a^2 + b^2$$

ku a dhe b janë brinjët e drejtkëndëshit.



Vizatimi 3

Shembulli 3

Njehsoni diagonalen d të drejtkëndëshit me brinjë $a = 20$ cm dhe $b = 40$ cm.

Zëvendësojmë në formulën për njehsimin e diagonales së drejtkëndëshit.

$$d^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 40^2 = 400 + 1600 = 2000,$$

$$d = \sqrt{2000} = 44{,}72 \text{ cm}.$$

Shembulli 4

Njehsoni brinjën a të drejtkëndëshit, nëse $d = 16$ cm dhe $b = 7$ cm.

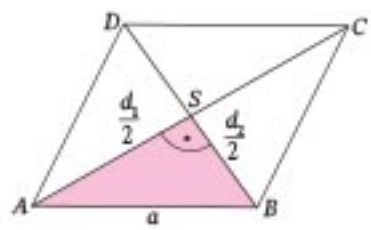
$d^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = d^2 - b^2 = 16^2 - 7^2 = 256 - 49 = 207$, $a = 14{,}39$ cm.

Shembulli 5

Një basketbollist i gjatë 2,1 m mori një shtrat hoteli të gjatë 2 m dhe të gjerë 1 m. A mund të shtrihet basketbollisti në shtrat?

Diagonalja e shtratit hotel është $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5^2} = 2{,}24\,\text{m}$.
Meqenëse 2,1 m < 2,24 m, basketbollisti do të mund të shtrihet në shtrat.

Në vizatimin 4 është dhënë rombi $ABCD$ me brinjë a dhe diagonale d_1 dhe d_2. Rikujtoni se diagonalet e rombit përgjysmohen dhe janë normale me njëra-tjetrën. Prandaj, ato e ndajnë rombin në katër trekëndësha kënddrejtë. Me zbatimin e teoremës së Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë ASB, fitojmë formulën për llogaritjen e brinjës a të rombi,



Vizatimi 4

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

ku d_1 dhe d_2 janë diagonalet e rombit.

Shembulli 6

Të llogaritet perimetri i rombit, diagonalet e të cilit janë 24 cm dhe 10 cm.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad a = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}.$$

Perimetri është $L = 4a = 52$ cm.

Detyra 2

Njehsoni diagonalen më të madhe të rombit me brinjë a = 5 cm, nëse diagonalja më e vogël është $d_2 = 6$ cm.

Shembulli 7

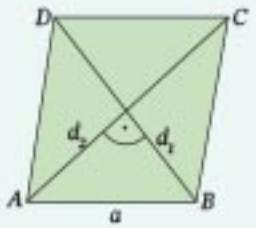
Mile me gardh duhet të ndajë përgjysmë lëndinën në formë rombi, përgjatë diagonales më të vogël d_1 (Vizatimi 5).
Sa metra gardh duhet të blejë, nëse dihet se diagonalja tjetër është $d_2 = 80$ m, dhe brinja është $a = 41$ m?

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 41^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2 = 1681 - 1600 = 81$$

$$\frac{d_1}{2} = 9$$

$d_1 = 18$ m.

Mile duhet të blejë $2 \cdot 41 + 18 = 100$ m gardh.



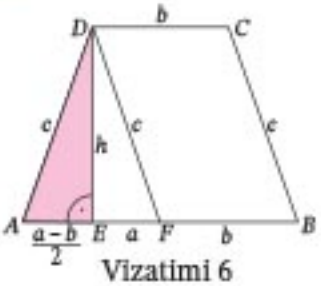
Vizatimi 5

Zbatimi i teoremës së Pitagorës në trapez dhe deltoid

Me segmentin *DF* paralel me krahun *BC*, trapezi barakrahës është ndarë në paralelogramin *BCDF* dhe trekëndëshin barakrahës *AFD*, me bazë $a - b$ dhe lartësi h (vizatimi 6).
Lartësia *DE* e ndan trekëndëshin barakrahës *AFD* në dy trekëndësha kënddrejtë të puthitshëm. Duke zbatuar teoremën e Pitagorës në secilin prej tyre, marrim formulën për krahun c të trapezit barakrahës,

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

ku h është lartësia, ndërsa a dhe b janë bazat e trapezit.



Vizatimi 6

Shembulli 8

Njehsoni lartësinë e një trapezi barakrahës, nëse janë dhënë baza $a = 10$ cm dhe $b = 4$ cm dhe gjatësia e krahut $c = 5$ cm.

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$h = 4$ cm.

Detyra 3

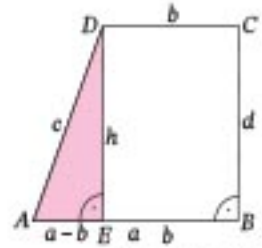
Njehsoni perimetrin e trapezit barakrahës me baza $a = 18$ cm dhe $b = 8$ cm dhe lartësi $h = 12$ cm.

Udhëzim: Perimetri i trapezit barakrahës llogaritet me formulën $P = a + b + 2c$, ku a dhe b janë bazat, ndërsa c është krahu i trapezit barakrahës.

Në vizatimin 7 është dhënë trapezi këndrejtë $ABCD$ me baza a dhe b dhe lartësi h. Me zbatimin e teoremës së Pitagorës në trekëndëshin këndrejtë AED, fitojmë formulën për njehsimin e krahut c të trapezit këndrejtë,

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2$$

ku h është lartësia, ndërsa a dhe b janë bazat e trapezit.



Vizatimi 7

Shembulli 9

Njehsoni lartësinë e trapezit këndrejtë me baza $a = 10$ cm dhe $b = 6$ cm, dhe krah $c = 12$ cm.

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2,\ h^2 = c^2 - (a-b)^2 = 12^2 - (10-6)^2 = 128$$

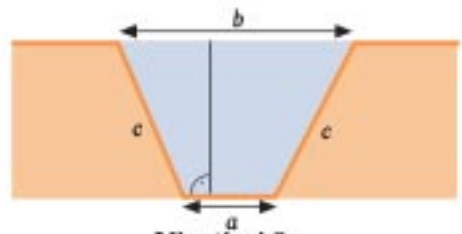
$$h = \sqrt{128} = 11{,}31\,\text{cm}.$$

Detyra 4

Njehsoni perimetrin e trapezit këndrejtë me baza $a = 12$ cm dhe $b = 9$ cm, dhe lartësi $h = 4$ cm.
Udhëzim: Perimetri i trapezit këndrejtë njehsohet me formulën $L = a + b + c + d$, ku a dhe b janë bazat, ndërsa c dhe d janë krahët e trapezit këndrejtë.

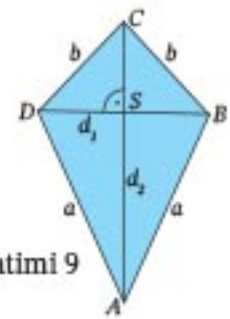
Detyra 5

Një kanal ka thellësi 2,4 m, dhe gjerësi $b = 3{,}2$ m (Vizatimi 8). Sa metra është gjerësia e fundit të kanalit a, nëse muret anësore kanë gjatësi prej $c = 25$ dm?



Vizatimi 8

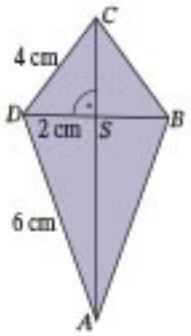
Në vizatimin 9 është dhënë deltoidi $ABCD$ me brinjë a dhe b, dhe diagonale d_1 dhe d_2. Rikujtoni se diagonalet te deltoidi janë reciprokisht normale. Ato e ndajnë deltoidin në katër trekëndësha këndrejtë.



Vizatimi 9

Shembulli 10

Njehsoni diagonalet e deltoidit $ABCD$ sipas të dhënave në vizatimin 10.



Vizatimi 10

Nga të dhënat e vizatimit:

$d_1 = \overline{BD} = 2 \cdot 2 = 4\text{cm}$

$\overline{CS}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\overline{CS} = \sqrt{12} = 3{,}46\text{cm}$

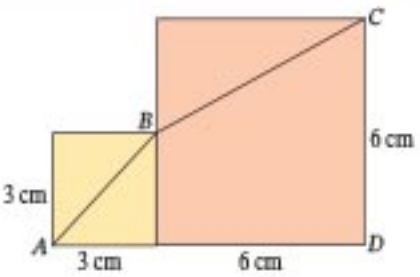
$\overline{AS}^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$\overline{AS} = \sqrt{32} = 5{,}66\text{cm}$

$d_2 = \overline{AS} + \overline{CS} = 5{,}66 + 3{,}46 = 9{,}12\text{ cm}.$

Detyra 6

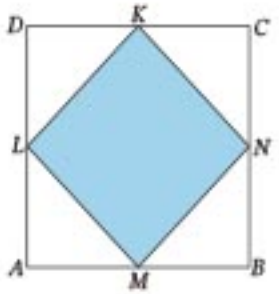
Dy katrorë me brinjë 3 cm dhe 6 cm janë vendosur njëri pranë tjetrit si në vizatimin 11. Njehsoni perimetrin e katërkëndëshit $ABCD$.



Vizatimi 11

DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni gjatësinë e diagonales së drejtkëndëshit, brinjët e të cilit janë
   a) $a = 2{,}4$ cm dhe $b = 3{,}2$ cm, b) $a = 14$ cm dhe $b = 48$ cm.
2. Gjeni gjatësinë e diagonales së katrorit, brinja e të cilit është $a = 7{,}5$ cm e gjatë.
3. Gjeni perimetrin e rombit me diagonale: a) 48 cm dhe 64 cm, b) 66 cm dhe 88 cm.
4. Gjeni diagonalen d_2 të rombit, nëse brinja dhe diagonalja tjetër janë:
   a) $a = 26$ cm dhe $d_1 = 48$ cm, b) $a = 30$ cm dhe $d_1 = 36$ cm.
5. Katrori $ABCD$ ka brinjë 8 cm. Në të është brendashkruar një katror tjetër $MNKL$, kulmet e të cilit ndodhen në meset e brinjëve të katrorit të dhënë. Gjeni perimetrin e katrorit $MNKL$ (Vizatimi 12).



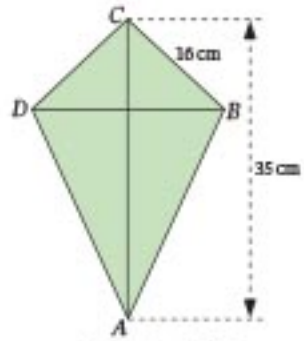
Vizatimi 12

6. Ivani bleu një tavolinë rrethore me diametër 230 cm. A do të mund ta fusë në shtëpi përmes derës së hyrjes të lartë 2 m dhe të gjerë 90 cm?
7. Lartësia e rombit është 3 cm, dhe këndi i ngushtë është 45°. Gjeni perimetrin e rombit.
8. Bazat e një trapezi barakrahës janë $a = 42$ cm dhe $b = 24$ cm, dhe krahu i tij ka gjatësi 41 cm. Njehsoni lartësinë e trapezit.
9. Të dy bazat e një trapezi këndrejtë janë të gjata 5 cm dhe 10 cm, ndërsa krahu i tij më i gjatë ka gjatësi 13 cm. Njehsoni lartësinë e trapezit.

10. Njehsoni perimetrin e trapezit barakrahës me baza $a = 23$ cm dhe $b = 11$ cm dhe lartësi $h = 8$ cm.

11. Diagonalja më e vogël e ndan deltoidin në një trekëndësh barabrinjës me brinjë 10 cm dhe një trekëndësh barakrahës me lartësi 12 cm. Njehsoni brinjët e deltoidit.

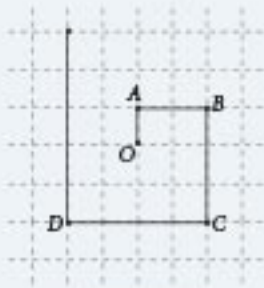
12. Emrani ndërton një fluturuese në formë deltoidi si në vizatimin 13. Përgjatë skajeve dëshiron t'i ngjisë një shirit të kuq. Sa centimetra shirit do t'i nevojiten?



Vizatimi 13

Hulumtim

Për shkak të një defekti në aeroplanin e tij, piloti Lluka u detyrua të ulet në një shkretëtirë. Ai e dinte se afër kishte një fshat, por nuk e dinte se në cilin drejtim ishte fshati dhe sa larg ishte. Meqenëse dukshmëria ishte deri në $\sqrt{2} \approx 1{,}41$km, ai mund të shihte fshatin në largësi prej më së shumti 1,41 km.
Lluka, me ndihmën e një busulle, eci në këmbë për të kërkuar fshatin në mënyrën në vijim. Nga aeroplani, i shënuar me O, eci 1 km në veri (deri te pika A), 2 km në lindje (deri te pika B), 3 km në jug (deri te pika C), 4 km në perëndim (deri te pika D), 5 km në veri (deri te pika F), 6 km në lindje, etj.. (Vizatimi 14).



Vizatimi 14

a) Pse në këtë mënyrë Lluka me siguri do ta gjejë fshatin?
b) Nëse dukshmëria do të ishte deri në 1 km, dhe Lluka do të ecte sipas të njëjtit model, a është e sigurt se do ta gjejë fshatin?

12. DETYRA KONSTRUKTUESE

Aktivitet

1. Konstruktoni një trekëndësh, nëse janë dhënë:
a) brinjët $b = 5$ cm dhe $c = 3$ cm dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 55°$,
b) brinja $a = 5$ cm dhe këndet $\beta = 55°$ dhe $\gamma = 60°$ që shtrihen mbi të,
c) brinjët $a = 6$, $b = 5$ cm dhe $c = 4$ cm.

2. a) Sa elemente të pavarur nevojiten për konstruktimin e një trekëndëshi? Midis elementeve a ka të paktën një gjatësi? Sa elemente të pavarur, midis të cilëve të paktën një gjatësi, nevojiten për konstruktimin e një trekëndëshi barakrahës ose këndrejtë, e sa për konstruktimin e një trekëndëshi barabrinjës?

b) Paralelogrami, duke tërhequr një nga diagonalet e tij, ndahet në dy trekëndësha të puthitshëm. Sa elemente të pavarur, midis të cilëve të paktën një gjatësi, do të nevojiteshin për konstruktimin e një paralelogrami? Sa elemente të pavarur, midis të cilëve të paktën një gjatësi, do të nevojiteshin për konstruktimin e një rombi, drejtkëndëshi ose katrori?

Konstruktime të paralelogrameve

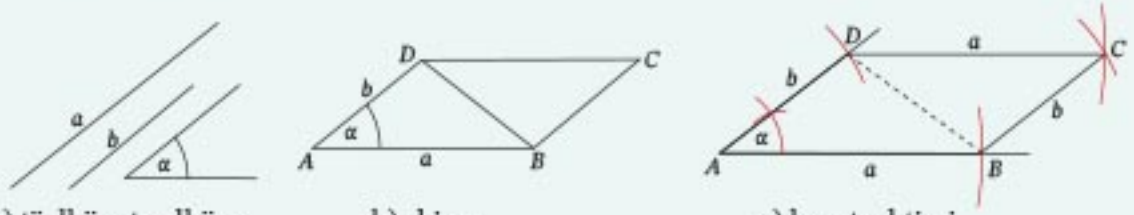
Nëse iu përgjigjët saktë pyetjeve të parashtruara, me siguri vërejtët se për **konstruktimin e një paralelogrami** nevojiten më së shumti tre elemente të pavarur, midis të cilëve të paktën një gjatësi e dhënë.

Duke përdorur konstruktimet themelore të trekëndëshit dhe vetitë e paralelogrameve që rrjedhin nga kriteret e puthitshmërisë së trekëndëshave BKB, KBK dhe BBB, shumë lehtë dhe thjeshtë do t'i kryejmë edhe konstruktimet e mëposhtme të paralelogrameve.

Shembulli 1

Konstruktoni paralelogramin *ABCD*, nëse janë dhënë dy brinjë fqinje a dhe b dhe këndi α midis tyre.

Konstruktimi kryhet ashtu që fillimisht konstruktohet trekëndëshi *ABD* me brinjët e dhëna *a* dhe *b* dhe këndin α midis tyre. Më pas, mbi diagonalen *BD* konstruktohet trekëndëshi *BDC* me tri brinjë të dhëna. Kështu fitojmë paralelogramin *ABCD* (vizatimi 1). Ekziston vetëm një paralelogram i tillë.



a) të dhënat e dhëna b) skica c) konstruktimi

Vizatimi 1

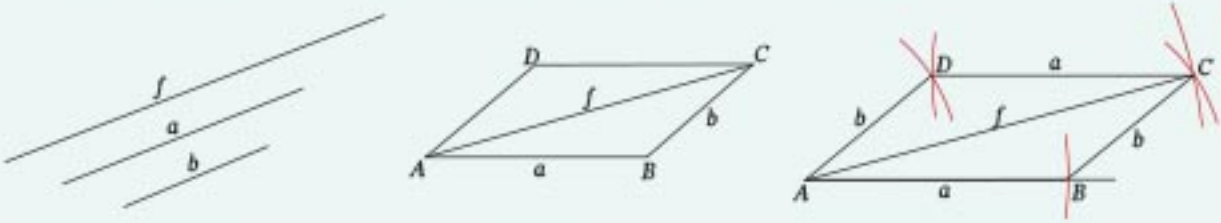
Detyra 1

Konstruktoni paralelogramin *ABCD*, nëse janë dhënë dy brinjë fqinje $a = 5$ cm dhe $b = 3$ cm dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 60^\circ$.

Shembulli 2

Konstruktoni paralelogramin *ABCD*, nëse janë dhënë dy brinjë fqinje *a* dhe *b* dhe një diagonale e tij *f*.

Konstruktimi kryhet ashtu që fillimisht konstruktohet trekëndëshi *ABC*. Më pas, mbi diagonalen *AC* konstruktohet trekëndëshi *ACD* me tri brinjë të dhëna. Kështu fitojmë paralelogramin *ABCD* (vizatimi 2). Ekziston vetëm një paralelogram i tillë.



a) të dhënat e dhëna b) skica c) konstruktimi

Vizatimi 2

Detyra 2

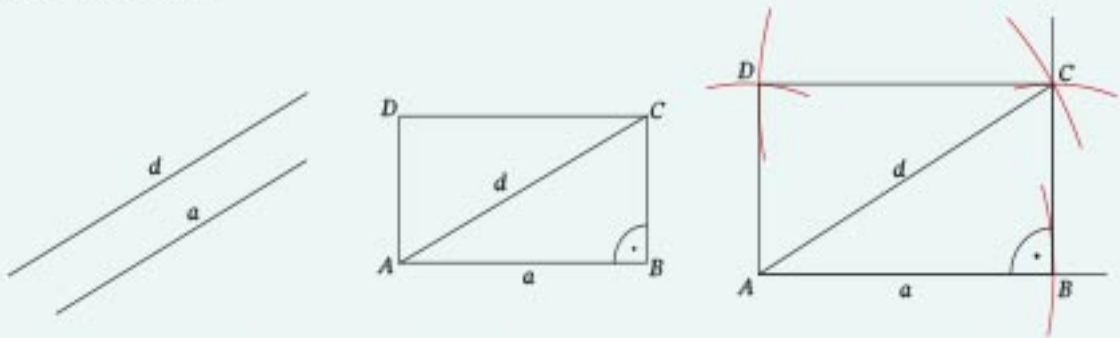
Konstruktoni një paralelogram me brinjë të dhëna $a = 4$ cm dhe $b = 3$ cm dhe diagonale $f = 6$ cm.

Për konstruktimin e një drejtkëndëshi ose rombi nevojiten dhe mjaftojnë dy elemente, midis të cilëve të paktën një të jetë gjatësi e dhënë, ndërsa për konstruktimin e një katrori nevojitet vetëm një gjatësi e dhënë.

Shembulli 3

Konstruktoni drejtkëndëshin *ABCD*, nëse janë dhënë një brinjë *a* dhe diagonalja *d*.

Konstruktimi kryhet në atë mënyrë që fillimisht konstruktohet trekëndëshi kënddrejtë *ABC* me katin *a* dhe hipotenuzë *d*. Më pas, mbi diagonalen *AC* konstruktohet trekëndëshi *ACD* me tri brinjë të dhëna. Kështu fitojmë drejtkëndëshin *ABCD* (vizatimi 3). Ekziston vetëm një drejtkëndësh i tillë.



a) të dhënat e dhëna b) skica c) konstruktimi

Vizatimi 3

Detyra 3

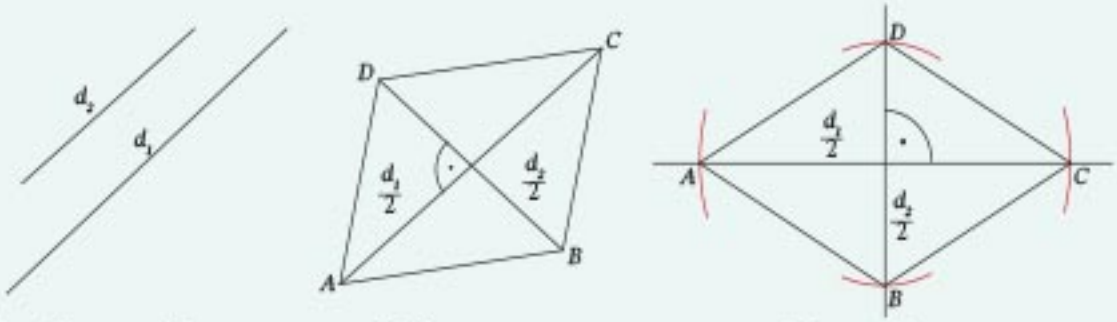
Konstruktoni drejtkëndëshin *ABCD*, nëse janë dhënë:
a) brinja $b = 3$ cm dhe diagonalja $d = 5$ cm,
b) diagonalja $d = 5$ cm dhe këndi midis diagonaleve $\alpha = 40^{\circ}$.

Udhëzim: Vizatoni një skicë të drejtkëndëshit të kërkuar. Më pas vizatoni këndin α dhe vazhdoni krahët e tij në drejtëza. Përdorni vetinë se diagonalet e drejtkëndëshit janë të barabarta ndërmjet tyre dhe përgjysmohen.

Shembulli 4

Konstruktoni rombin $ABCD$, nëse janë dhënë të dy diagonalet d_1 dhe d_2.

Fillimisht konstruktojmë dy drejtëza reciprokisht normale. Nga pika e prerjes, përgjatë njërës drejtëz, bartim gjysmat e njërës diagonale, dhe përgjatë drejtëzës tjetër, gjysmat e diagonales tjetër. Kështu fitohen pikat A, B, C dhe D në vizatimin 4. Duke i lidhur ato, fitohet rombi $ABCD$. Ekziston vetëm një romb i tillë.



a) të dhënat e dhëna b) skica c) konstruktimi

Vizatimi 4

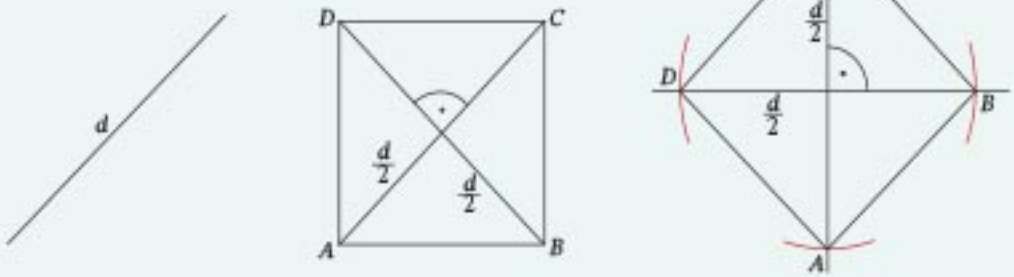
Detyra 4

Konstruktoni rombin $ABCD$, nëse janë dhënë:
a) brinja $a = 3$ cm dhe një diagonale $d_2 = 5$ cm,
b) dy diagonalet $d_1 = 10$ cm dhe $d_2 = 64$ mm.

Shembulli 5

Konstruktoni katrorin $ABCD$ me diagonale të dhënëa d.

Fillimisht konstruktojmë dy drejtëza reciprokisht normale. Nga pika e prerjes, batrim nga një gjysmë të diagonales përgjatë dy drejtëzave. Kështu fitohen pikat A, B, C dhe D në vizatimin 5. Duke i lidhur ato, fitohet katrori $ABCD$. Ekziston vetëm një katror i tillë.



Vizatimi 5

Detyra 5

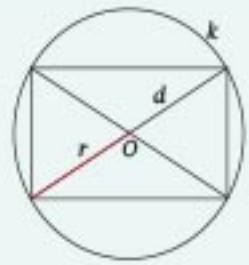
Konstruktoni katrorin me brinjë $a = 3{,}5$ cm.

Konstruktime të vijës rrethore të jashtashkruar dhe të brendashkruar

Shembulli 6

Jashtashkruani vijën rrethore k përreth drejtkëndëshit të dhënë me diagonale d.

a) Në vizatimin 6 është dhënë drejtkëndëshi me diagonale d.
Sipas vetive të drejtkëndëshit, pika e prerjes së diagonaleve të tij O është në distancë të barabartë nga të gjitha kulmet e tij. Prandaj, konstruktojmë vijën rrethore k me qendër në O dhe rreze r të barabartë me gjysmën e diagonales, pra $r = \frac{d}{2}$.
Vija rrethore $k(O, r)$ kalon nëpër çdo kulm të drejtkëndëshit, pra është vija rrethore e jashtashkruar përreth drejtkëndëshit. Ekziston vetëm një vijë rrethore e tillë.



Vizatimi 6

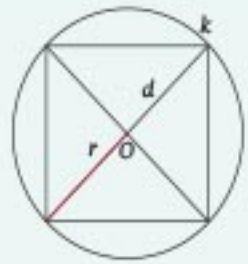
Detyra 6

Jashtashkruani vijën rrethore k përreth drejtkëndëshit të dhënë me brinjë $a = 5$ cm dhe $b = 3$ cm. Udhëzim: Konstruktoni drejtkëndëshin dhe tërhiqni diagonalet e tij.

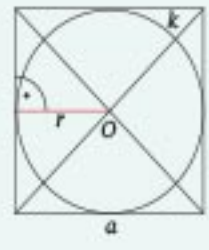
Shembulli 7

a) Jashtashkruani vijën rrethore k përreth katrorit me diagonale d.
b) Brendashkruani vijën rrethore k në katrorin me brinjë a.

a) Në vizatimin 7a është dhënë katrori me diagonale d.
Sipas vetive të katrorit, pika e prerjes së diagonaleve të tij O është në largësi të barabartë nga të gjitha kulmet e tij. Prandaj, konstruktojmë vijën rrethore k me qendër në O dhe rreze r të barabartë me gjysmën e diagonales, pra $r = \frac{d}{2}$.
Vija rrethore $k(O, r)$ kalon nëpër çdo kulm të katrorit, pra është vija rrethore e jashtashkruar përreth katrorit. Ekziston vetëm një vijë rrethore e tillë.



Vizatimi 7a



Vizatimi 7b

b) Në vizatimin 7b është dhënë katrori me brinjë a. Prerja së diagonaleve të tij O është në largësi të barabartë edhe me brinjët e tij. Prandaj, rrezja r e vijës rrethore të brendashkruar k është gjysma e brinjës së tij, pra $r = \frac{a}{2}$. Vija rrethore $k(O, r)$ i prek të gjitha brinjët e tij, pra është vija rrethore e brendashkruar në katror. Ekziston vetëm një vijë rrethore e tillë.

Detyra 7

a) Jashtashkruani vijën rrethore k përreth katrorit me brinjë $a = 4$ cm.
b) Brendashkruani vijën rrethore k në katrorin me brinjë $a = 5$ cm.

Detyra 8

Arkitektët po dizajnojnë një pjesë të re në parkun e qytetit. Ajo përbëhet nga dy pjesë që i kanë përshkruar vetëm me fjalë. Pjesa e parë është një lulishte në formë drejtkëndëshi me një vijë rrethore të ndritshme e cila kalon nëpër çdo kulm të drejtkëndëshit. Pjesa e dytë ka formën e katrorit dhe në të ka një shatërvan që prek secilën brinjë të katrorit dhe një vijë rrethore të ndritshme e cila kalon nëpër çdo kulm të katrorit. Konstruktoni pjesët që përshkruan arkitektët.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Konstruktoni paralelogramin $ABCD$ nëse janë dhënë:
   a) brinjët $a = 3$ cm, $b = 6$ cm dhe diagonalja $f = 4$ cm,
   b) diagonalet $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm dhe këndi midis tyre $\alpha = 75°$.
2. Konstruktoni rombin $ABCD$, nëse janë dhënë:
   a) diagonalet $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$cm, b) brinja $a = 5$ cm dhe këndi i ngushtë 45°,
   c) brinja $a = 4$ cm dhe lartësia $h = 3$ cm,
   ç) diagonalja $d_1 = 7$ cm dhe lartësia $h = 4$ cm.
3. Konstruktoni drejtkëndëshin $ABCD$, nëse janë dhënë:
   a) brinjët $a = 4{,}5$ cm dhe $b = 3$ cm, b) страна $b = 3{,}5$ cm dhe diagonalja $d = 5{,}5$ cm.
4. Komuna vendosi të ndërtojë një park të vogël botanik të përbërë nga katër parcela fqinje me forma të ndryshme: paralelogram, romb, drejtkëndësh dhe katror.
   Arkitekti la vetëm shënimet e mëposhtme përshkruese:
   - Parcela A ka dy çifte brinjësh paralele me gjatësi 8 m dhe 6 m. Brinjët fqinje nuk janë të barabarta. Në këtë pjesë planifikohet mbjellja e bimëve aromatike.
   - Parcela B ka katër brinjë të barabarta nga 7 m, dhe njëra diagonale është më e gjatë se tjetra. Në këtë pjesë planifikohet mbjellja e trëndafilave në renditje rrethore.
   - Parcela C ka kënde prej 90°, ndërsa brinjët fqinje janë 5 m dhe 9 m të gjata. Kjo pjesë do të përdoret për vendosjen e stolave.
   - Parcela Ç ka katër brinjë nga 6 m dhe të gjithë këndet janë të drejtë. Kjo do të jetë këndi me rërë i fëmijëve.
   Dalloni ato, e më pas, duke përdorur përpjesëtimin, konstruktoni format që përshkroi arkitekti.
5. Jashtashkruani vijën rrethore k përreth drejtkëndëshit me brinjë $a = 3$ cm dhe diagonale $d = 5$ cm.
6. Brendashkruani vijën rrethore k në katrorin me brinjë të dhënë $a = 4$ cm.
7. Jashtashkruani vijën rrethore k përreth katrorit me diagonale të dhënë $d = 6$ cm.

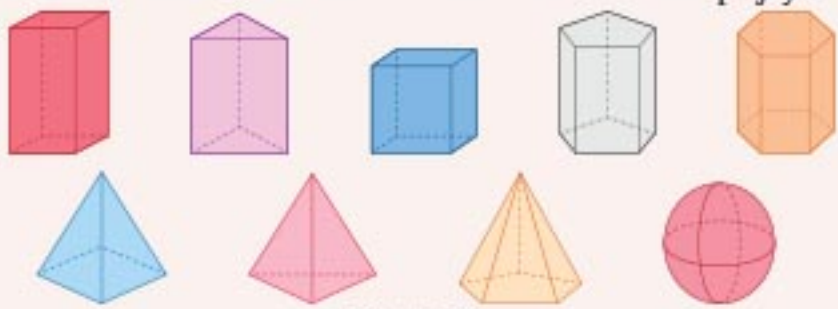
Hulumtim

1. Andrei vizatoi një vijë rrethore, por nuk shënoi qendrën e vijës rrethore, dhe nuk e dinte as rrezen e saj. Ndihmoni Andreit të gjejë qendrën dhe rrezen e vijës rrethore. Nëse keni mundësi, përdorni një softuer edukativ për ta ndihmuar Andrein.
2. Arifi po përpiqet të brendashkruajë një vijë rrethore në një drejtkëndësh që nuk është katror. Shpjegoni pse Arifi e ka gabim.

13. POLIEDRI, TOPI DHE SFERA

Aktivitet

Emërtoni format 3D në vizatimin 1. Cilat prej tyre janë me tehe, e cilat janë forma 3D të rrumbullakëta? Përshkruani me cilat forma 2D është e kufizuar secila prej tyre.



Vizatimi 1

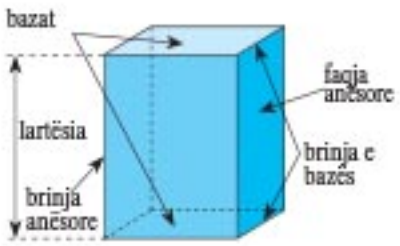
Format tredimensionale (3D) janë pjesë e hapësirës dhe ato i studion pjesa e gjeometrisë e quajtur **stereometri**, ndryshe nga format 2D të rrafshit që studiohen nga **planimetria**. Një nga format 3D më të përdorura janë poliedrat.

Poliedri është pjesë e hapësirës e kufizuar me shumëkëndësha (trekëndësha, katërkëndësha, pesëkëndësha, etj.).

Gjatë skicimit të poliedrave, brinjët (tehet) e dukshme vizatohen me vijë të plotë, ndërsa brinjët e padukshme vizatohen me vijë të ndërprerë.
Deri tani jemi njohur me dy lloje poliedrash: **prizmat** dhe **piramidat**.

Prizmat kanë dy baza të puthitshme paralele, të cilat janë shumëkëndësha (vizatimi 2).
Segmentet që lidhin kulmet përkatëse të bazave janë reciprokisht paralele dhe quhen **brinjë anësore**.
Brinjët që janë pjesë të bazave, pra brinjët e bazave, quhen **brinjë të bazës**.

Çiftet e brinjëve të bazës, së bashku me brinjët anësore përkatëse formojnë paralelogramë, të cilët quhen **faqe anësore** të prizmit.
Për një prizëm do të themi se është **prizëm i drejtë**, nëse brinjët anësore janë normale me të dy bazat.
Ne do të shqyrtojmë vetëm prizmat e drejtë. Në varësi të asaj se çfarë shumëkëndëshi përfaqësojnë bazat, prizmi mund të jetë trekëndor, katërkëndor, etj.

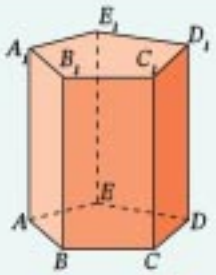


Vizatimi 2

Shembulli 1

Për prizmin pesëkëndor në vizatimin 3, shkruani të gjitha:
a) kulmet, b) brinjët anësore, c) brinjët e bazës, ç) faqet anësore, d) bazat.

a) Kulmet janë pikat: $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1$ dhe E_1,
b) Brinjët anësore janë segmentet: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 dhe EE_1,
c) Brinjët e bazës janë segmentet:
$AB, BC, CD, ED, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ dhe E_1A_1,
ç) Faqet anësore janë drejtkëndëshat:
ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1 dhe EAA_1E_1,
d) Bazat janë pesëkëndëshat: $ABCDE$ dhe $A_1B_1C_1D_1E_1$.



Vizatimi 3

Nëse bazat e një prizmi të drejtë janë shumëkëndësha të rregullt, ai prizëm quhet **prizëm i rregullt**.
Largesa midis bazave të prizmit quhet **lartësi** e prizmit dhe zakonisht shënohet me H.

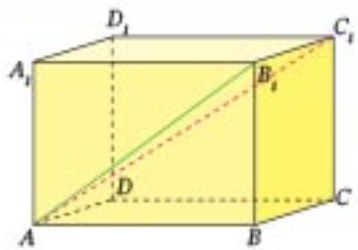
Detyra 1

Sa brinjë anësore ka: a) një prizëm tetëkëndor, b) një prizëm njëzetedykëndor?

Për një diagonale në poliedër themi se është **hapësinore**, nëse ajo lidh dy kulme të poliedrit dhe nuk i përket ndonjë faqeje të poliedrit.

Shembulli 1

Kuboidët (kuadrat) janë prizma që janë të kufizuar me tre palë drejtkëndësha paralelë. Në vizatimin 4 është dhënë kuboidi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brinjët e të cilit kanë gjatësi a, b dhe c. Një diagonale hapësinore është segmenti AC_1. Segmenti AB_1 nuk është diagonale hapësinore, sepse është pjesë e faqes ABB_1A_1.



Vizatimi 4

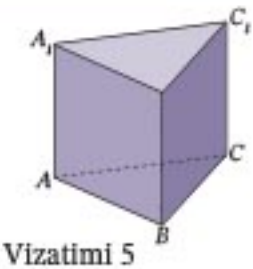
Detyra 2

Emërtoni të gjitha diagonalet e kuboidit në vizatimin 4. Cilët prej tyre janë hapësinorë, e cilët nuk janë hapësinorë?

Shembulli 3

Në vizatimin 5 është dhënë një prizëm trekëndor $ABCA_1B_1C_1$.
Shpjegoni pse ky prizëm nuk ka diagonale hapësinore.

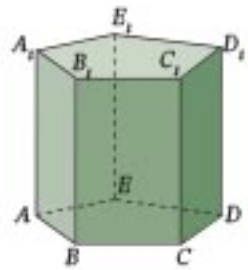
Në prizmin e dhënë, çdo segment, skajet e të cilit janë dy kulme të prizmit, shtrihet në ndonjë faqe të prizmit ose përfaqëson një brinjë.



Vizatimi 5

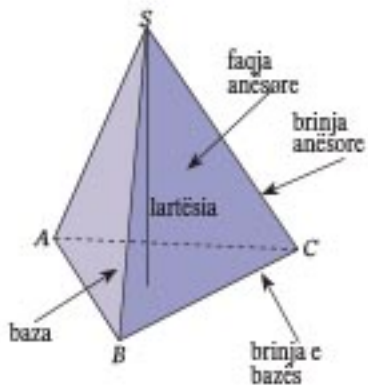
Detyra 3

Shkruani të gjitha diagonalet hapësinore të prizmit në vizatimin 6.



Vizatimi 6

Piramida ka për bazë një shumëkëndësh dhe ka një kulm të quajtur **majë** që nuk ndodhet në rrafshin e bazës (vizatimi 7).
Segmentet që lidhin majën dhe kulmet e bazës quhen **brinjë anësore**.
Brinjët që janë brinjë të bazës quhen **brinjë të bazës**.
Secilia brinjë e bazës, së bashku me dy brinjë anësore përkatëse, formojnë trekëndësha, të cilët quhen **faqe anësore** të piramidës.
Piramidat mund të jenë trekëndore, katërkëndore, etj., në varësi të asaj se çfarë shumëkëndëshi përfaqëson baza e tyre.



Vizatimi 7

Shembulli 4

Për piramidën trekëndore në vizatimin 7:
a) shkruani të gjitha: kulmet, brinjët anësore, brinjët e bazës, faqet anësore,
b) shkruani majën dhe bazën.

a) Kulmet janë pikat A, B, C dhe S; brinjët anësore janë segmentet AS, BS dhe CS; brinjët e bazës janë segmentet AB, BC dhe CA; faqet anësore janë trekëndëshat ABS, BCS dhe CAS.
b) Maja është kulmi S, kurse baza është trekëndëshi ABC.

Nëse baza e piramidës është një shumëkëndësh i rregullt dhe të gjitha brinjët anësore të saj kanë të njëjtën gjatësi, ajo piramidë quhet **piramidë e rregullt**.
Largesa nga maja e piramidës deri te baza quhet **lartësi** e piramidës dhe zakonisht shënohet me *H*.
Piramida trekëndore quhet tetraedër, sepse ka 4 kulme. Por, shpesh me tetraedër nënkuptohet një piramidë trekëndore e rregullt, faqet e së cilës janë trekëndësha barabrinjës.

.

Detyra 4

Sa brinjë të bazës ka: a) një piramidë pesëmbëdhjetëkëndore, b) një piramidë njëzetkëndore.

Shembulli 3

A ka diagonale hapësinore në piramidë?

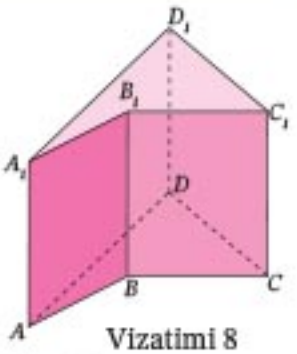
Segmenti që lidh majën e një piramide me ndonjë nga kulmet e bazës paraqet brinjë të piramidës, dhe ai nuk mund të jetë diagonale. Segmenti që lidh dy kulme të bazës, sipas përkufizimit, nuk është diagonale hapësinore. Prandaj, piramidat nuk kanë diagonale hapësinore.

Shembulli 4

Dimë se një prizëm trekëndor nuk ka diagonale hapësinore. Gjithashtu, dimë se piramidat nuk kanë diagonale hapësinore. Por, nëse mbi një prizëm të rregullt trekëndor $ABCA_1B_1C_1$ vendosim një piramidë të rregullt trekëndore $A_1B_1C_1S$, fitojmë një poliedër që nuk është as prizëm e as piramidë. Ai ka tre diagonale hapësinore AS, BS dhe CS.

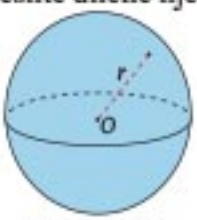
Për një poliedër themi se është **konveks**, nëse segmenti që lidh çfarëdo dy pika të poliedrit i përket poliedrit.

Poliedra konvekse janë, për shembull, prizmat trekëndorë dhe piramidat trekëndore.
Në vizatimin 8 është dhënë një poliedër që nuk është konveks.
Për shembull, segmenti AC nuk është pjesë e poliedrit..

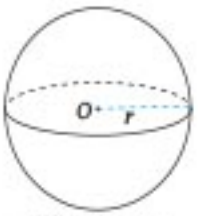


Vizatimi 8

Topi është bashkësia e të gjitha pikave në hapësirë që ndodhen në largësi të barabartë ose më të vogël se r nga një pikë e dhënë O.
Sfera është bashkësia e pikave në hapësirë që ndodhen në largësi r nga një pikë e dhënë O. Në vizatimin 9 është dhënë një top me rreze *r*, ndërsa në vizatimin 10 është dhënë një sferë me rreze *r*.



Vizatimi 9



Vizatimi 10

DETYRA PËR USHTRIME

1. Çfarë quajmë poliedër, e çfarë poliedër konveks? Vizatoni një poliedër konveks.
2. Vizatoni një poliedër që nuk është as prizëm as piramidë.
3. Vizatoni një prizëm gjashtëkëndor dhe shënojani kulmet. Shkruani të gjitha:
   a) kulmet, b) brinjët anësore, c) brinjët e bazës, ç) faqet anësore, d) bazat.
4. Vizatoni një prizëm trekëndor dhe në të dy bazat e tij vizatoni dy piramida trekëndore të rregullta. Më pas, vizatoni me ngjyrë të gjitha diagonalet hapësinore të poliedrit të fituar.
5. Vizatoni një piramidë shtatëkëndore dhe shënojani kulmet.
   a) shkruani të gjitha: kulmet, brinjët anësore, brinjët e bazës, faqet anësore,
   b) shkruani majën dhe bazën.
6. Sa brinjë të bazës ka: a) një prizëm dhjetëkëndor, b) një piramidë njëzetkëndore?
7. Sa kulme ka: a) një piramidë njëqindkëndore, b) një prizëm njëqindkëndor?
8. Sa brinjë anësore ka:
   a) një prizëm nëntëkëndor, b) një piramidë dhjetëkëndore?
9. Nga cilat forma 3D është përbërë shtëpia në vizatimin 11?



Vizatimi 11

10. Çfarë quajmë top, e çfarë quajmë sferë? Nga mjedisi juaj radhitni shembuj të topit dhe të sferës.

Hulumtim

Çfarë piramide është piramida e Keopsit në Egjipt? A është trekëndore, katërkëndore, etj.? A është piramidë e rregullt?
Kërkoni në internet informacione për dimensionet (brinjët) e piramidës së Keopsit. Bëni një model nga kartoni të piramidës së Keopsit në përpjesëtim 1 : 1000.

14. POLIEDRAT E RREGULLT

Aktivitet

1. Si quhet shumëkëndëshi me brinjë të barabarta dhe kënde të barabarta?

2. Cilët nga shumëkëndëshat në vizatimin 1 janë të rregullt, e cilët nuk janë të rregullt?



Vizatimi 1

3. Çfarë shumëkëndëshash janë faqet e kubit, e çfarë faqet e tetraedrit në vizatimin 2?



Vizatimi 2

Nëse keni vërejtur mirë, faqet e tetraedrit dhe kubit janë shumëkëndësha të rregullt. Më saktë, faqet e tetraedrit janë trekëndësha barabrinjës, kurse faqet e kubit janë katrorë.

Për një poliedër themi se është **i rregullt**, nëse faqet e tij janë shumëkëndësha të rregullt dhe të puthitshëm.

Ekzistojnë vetëm pesë lloje poliedrash të rregullt dhe ato ishin të njohur që nga kohët e lashta nga matematikanët antikë. Poliedrat e rregullt quhen edhe trupat e Platonit, sipas emrit të filozofit të lashtë Platon.

Në tabelën në vijim janë dhënë të gjitha llojet e poliedrave të rregullt. Janë shënuar numrat e kulmeve, brinjëve dhe faqeve, si dhe lloji i shumëkëndëshave të rregullt që i mbulojnë.

	emri	kulme	brinjë	faqe	lloji i snhumëkëndëshit të rregullt	numri i brinjëve për kulm
	tetraedër	4	6	4	trekëndësh barabrinjës	3
	kub	8	12	6	katror	3
	oktaedër	6	12	8	trekëndësh barabrinjës	4
	dodekaedër	20	30	12	peskëndësh i rregullt	3
	ikozaedër	12	30	20	trekëndësh barabrinjës	5

Është interesant shfaqja e poliedrave të rregullt në natyrë. Për shembull, adenovirusi ka mbështjellës në formë ikozaedri, izomerët e borit formojnë forma tetraedrike, oktaedrike ose ikozaedrike, ndërsa molekulat shpesh kanë gjeometri tetraedrike ose oktaedrike.
Diamantët shpesh kristalizohen në formë oktaedri, ndërsa minerali pirit kristalizohet në formë kubi, oktaedri ose dodekaedri (figura 1).



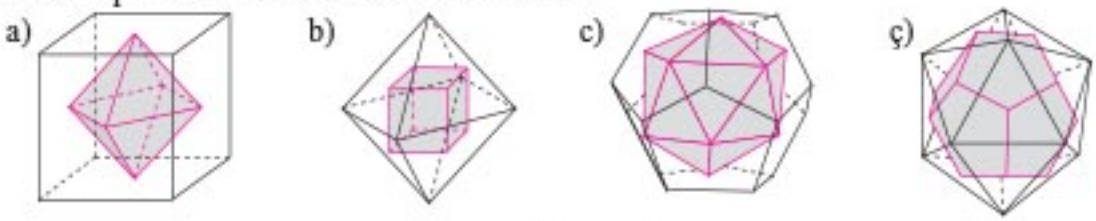
Adenovirusi Diamanti Izomeri i borit Molekula Piriti

Figura 1

DETYRA PËR USHTRIME

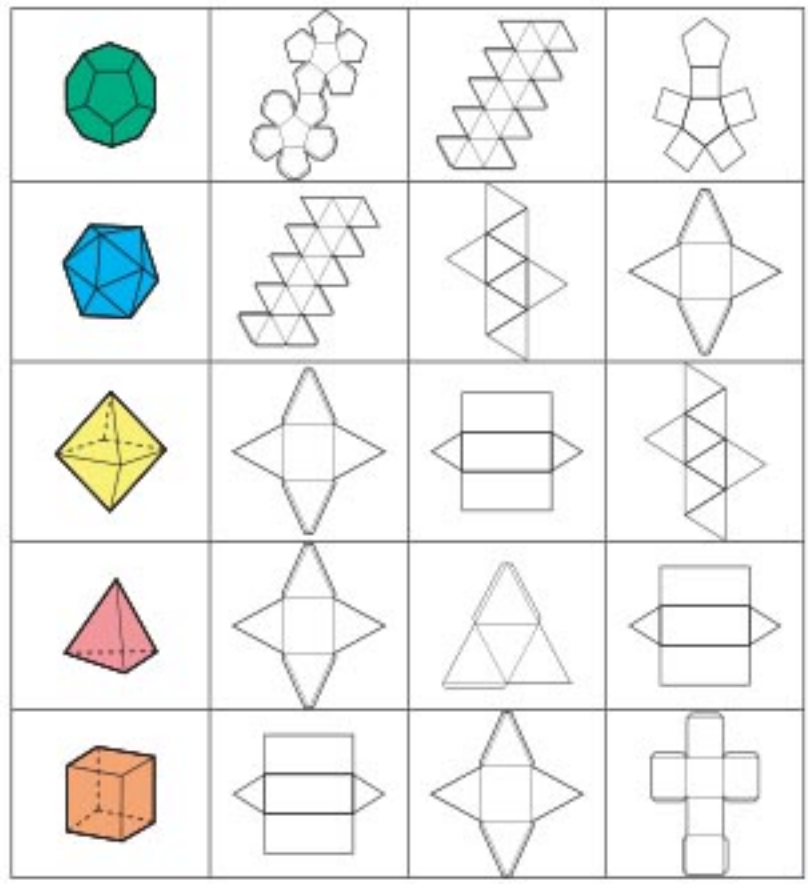
1. a) Numëroni të gjitha pesë llojet e poliedrave të rregullt.
   b) Me cilët shumëkëndësha të rregullt është i mbuluar secili prej tyre?
   c) Nga sa brinjë dalin nga secili kulm te secili prej tyre?

2. Cilat trupa të Platonit i shikoni në vizatimin 3:



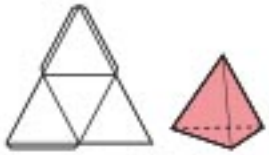
Vizatimi 3

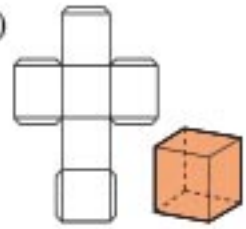
3. Cila nga tre rrjetat i përgjigjet secilit trup të dhënë?

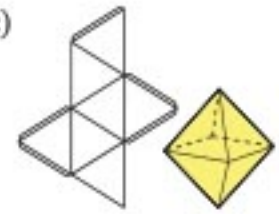


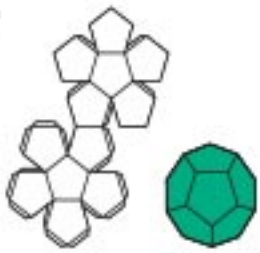
4. Aktivitet projektues

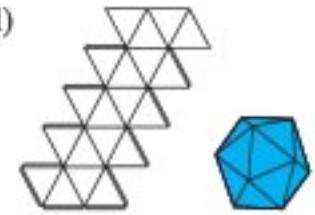
1) Sipas rrjetës dhe dimensioneve të dhëna, bëni një model të trupit, nëse
a) brinja e trekëndëshit është 7 cm, b) brinja e katrorit është 5 cm,
c) brinja e trekëndëshit është 4 cm, ç) brinja e pesëkëndëshit është 3 cm,
d) brinja e trekëndëshit është 2 cm.

a) 

b) 

c) 

ç) 

d) 

2) Në letër vizatoni tabelën, shkruani të dhënat për secilën figurë, dhe modelin ngjiteni në rreshtin e fundit.

					
emri					
faqet					
brinjët					
kulmet					
modeli					

Hulumtim

Zbulimi i trupave të Platonit filloi me përkufizimin e tre prej trupave nga grupi i matematikanëve të lashtë grekë të quajtur pitagoreanë, ndërsa matematikani i lashtë grek Platoni përcaktoi edhe dy të fundit. Platoni i përshkruante pesë trupat si simbole të pesë elementeve themelore të botës: zjarri, ajri, uji, toka dhe eteri (universi).
Hulumto në internet:
a) Cilin element cilit trup ia përcaktoi Platoni?
b) Si e shpjegonte simbolikën atëherë?

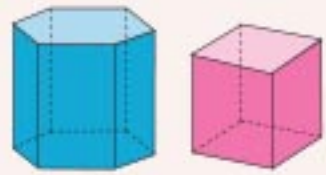
c) Si i zbatoi Johannes Kepler trupat e Platonit në hulumtimet e tij?



15. LIDHJA MES NUMRIT TË KULMEVE, BRINJËVE DHE FAQEVE TE POLIEDRAT

Aktivitet

Në vizatimin 1 janë dhënë dy poliedra konveksë.
Për secilin prej tyre, numëroni kulmet, zbritni numrin e brinjëve dhe shtoni numrin e faqeve. Çfarë vëreni?
A ekziston ndonjë lidhje midis numrit të kulmeve, brinjëve dhe faqeve të poliedrave të dhënë?



Vizatimi 1

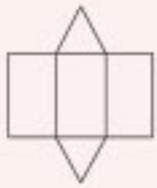
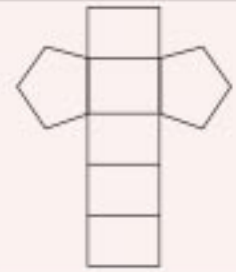
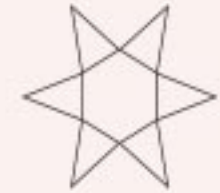
Për çdo poliedër konveks vlen **formula e Eulerit (Ojlerit)**

$$V - E + F = 2$$

ku V është numri i kulmeve, E është numri i brinjëve dhe F është numri i faqeve të poliedrit.

Aktivitet

Kopjoni rrjetat e poliedrave të dhëna në tabelë në karton, pritni dhe formoni poliedrat.
a) Përcaktoni numrin e kulmeve, brinjëve dhe faqeve të secilit poliedër.
b) Verifikoni formulën e Euler-it për secilin poliedër.

prizmi trekëndor	piramida katërkëndore	prizmi pesëkëndor	piramida gjashtëkëndore
			

Shembulli 1

Verifikoni formulën e Eulerit për:
a) piramidën trekëndore , b) prizmin katërkëndor, c) piramidën pesëkëndore.

a) piramidën trekëndore
$V = 4, E = 6$ dhe $F = 4$
$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$

b) prizmin katërkëndor
$V = 8, E = 12$ dhe $F = 6$
$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

c) piramidën pesëkëndore
$V = 6, E = 10$ dhe $F = 6$
$V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$

Detyra 1

Verifikoni formulën e Eulerit për secilin trup platonik:
a) tetraedrin, b) kubin, c) oktaedrin, ç) dodekaedrin, d) ikozaedrin..

Shembulli 2

Me ndihmën e formulës së Eulerit, verifikoni nëse ekziston një poliedër konveks me 6 kulme, 12 brinjë dhe 5 faqe.

$V = 6, E = 12$, dhe $F = 5$
$V - E + F = 6 - 12 + 5 \neq 2$ Nuk ekziston asnjë poliedër konveks me kushtet e dhëna.

Detyra 2

A ekziston një poliedër konveks me 20 kulme, 40 brinjë dhe 20 faqe?

Formula e Eulerit zbatohet gjatë llogaritjes së numrit të panjohur të kulmeve, brinjëve ose faqeve.

Shembulli 3

Sa faqe ka një poliedër konveks me 15 kulme dhe 28 brinjë?

Sipas kushtit të detyrës $V = 15$ dhe $E = 28$. Me zëvendësimin e vlerave të njohura në formulën e Eulerit, fitojmë
$V - E + F = 2$, $15 - 28 + F = 2, F = 15$.
Poliedri konveks i dhënë ka 15 faqe.

Detyra 3

Sa kulme ka një poliedër konveks me 40 brinjë dhe 21 faqe?

Detyra 4

Nxënësit krijojnë një dron me trup në formë poliedri me 22 faqe dhe 36 brinjë.
Sa kulme ka trupi i dronit?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Me ndihmën e formulës së Eulerit, verifikoni nëse ekziston një poliedër konveks me 7 kulme, 18 brinjë dhe 12 faqe.
2. Një poliedër konveks ka 16 kulme dhe 10 faqe. Sa brinjë ka ai poliedër?
3. Sa kulme ka një poliedër me 36 brinjë dhe 14 faqe?
4. Vizatoni një poliedër të përbërë nga një kub dhe një piramidë katërkëndore të rregullt që kanë një faqe të përbashkët. Më pas, për poliedrin verifikoni barazinë $V - E + F = 2$.
5. Vizatoni një poliedër të përbërë nga dy piramida katërkëndore që kanë një bazë të përbashkët. Më pas, për poliedrin verifikoni barazinë $V - E + F = 2$.

Hulumtim

1. A janë poliedrat e dhënë në vizatimin 2 jokonveksë? Sa "vrima" ka secili prej tyre?
   a) Për secilin poliedër, numëroni kulmet, brinjët dhe faqet e tij.
   b) Njehsoni vlerën e shprehjes $V - E + F$ për secilin poliedër..
   c) A vlen formula $V - E + F = 2 - 2 \cdot d$, ku d është numri i "vrimave" te poliedri?
   ç) A zvogëlohet vlera e shprehjes $V - E + F$ për 2 me secilën vrimë të re?



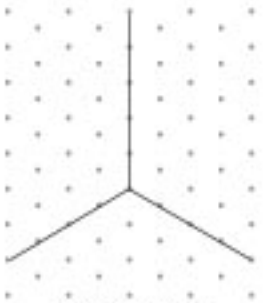
Vizatimi 2

16. VIZATIMI I FORMAVE 3D TË PËRBËRA

Për vizatimin e formave 3D të përbëra në rrafsh, mund të përdorim **letër izometrike**. Në të është vizatuar një rrjetë e formuar nga vargje paralele pikash, të tilla që çdo dy pika fqinje nga rreshti janë në largësi të barabartë, dhe me pikën më të afërt nga rreshti fqinj formojnë një trekëndësh barabrinjës. Është e rëndësishme të vendosim saktë letrën, ashtu që vargjet e përmendura të pikave të jenë të vendosura vertikalisht (vizatimi 1a), e jo horizontalisht (vizatimi 1b). Kjo na mundëson të vendosim një sistem koordinativ me tre boshte, nën kënd 120°, si në vizatimin 1c.
Gjatë vizatimit në letër izometrike, raportet midis dimensioneve të formës 3D të vizatuar janë të njëjta me raportet midis dimensioneve të formës 3D të dhënë.


Vizatimi 1a

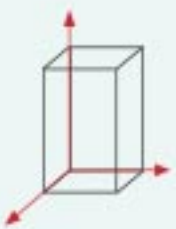

Vizatimi 1b


Vizatimi 1c

Shembulli 1

Vizatoni, në letër izometrike, një kuboid me dimensione 3, 4 dhe 5 njësi.

Në vizatimin 2a është dhënë skica e kuboidit. Në letrën izometrike vizatojmë një sistem koordinativ me boshte nën kënd 120°. Në boshtet koordinative vendosim gjatësitë e brinjëve: 3, 4 dhe 5 njësi, përkatësisht (Vizatimi 2b).


Vizatimi 2a


Vizatimi 2b

Sipas skicës, vizatojmë tre brinjët vertikale të dukshme (vizatimi 2c). Më pas vizatojmë të gjitha brinjët tjera të dukshme që janë paralele me dy boshtet tjera (vizatimi 2ç). Në fund, vizatojmë brinjët e padukshme me vija të ndërprera ose më të holla (vizatimi 2d).


Vizatimi 2c


Vizatimi 2ç


Vizatimi 2d

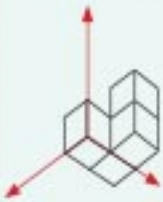
Shembulli 2

Nga sa kube është e përbërë forma 3D në vizatimin 3?
Vizatoni formën 3D në letër izometrike.



Vizatimi 3

Forma 3D në vizatimin 3 përbëhet nga 4 kube.
Në vizatimin 4a është dhënë skica e formës 3D.
Në letrën izometrike vizatojmë sistemin koordinativ me boshte nën kënd 120°.
Më tej, sipas skicës, vizatojmë tri brinjët e para përgjatë boshteve (vizatimi 4b).
Vazhdojmë me vizatimin e brinjëve vertikale, sipas skicës (vizatimi 4c).
Më pas vizatojmë të gjitha brinjët tjera që janë paralele me dy boshtet tjera (vizatimi 4ç).
Në vizatimin 4d është dhënë vizatimi izometrik i formës 3D të dhënë.



Vizatimi 4a



Vizatimi 4b



Vizatimi 4c



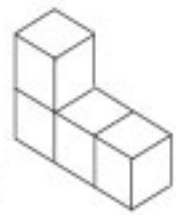
Vizatimi 4ç



Vizatimi 4d

Detyra 1

Nga sa kube është e përbërë forma 3D në vizatimin 5?
Vizatojeni formën 3D në letër izometrike.



Vizatimi 5

Detyra 2

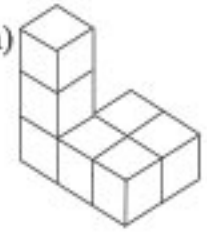
Vizatoni saksitë, të paraqitura në vizatimin 6, në letër izometrike:

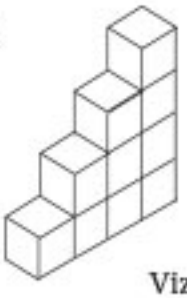


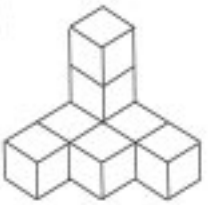
Vizatimi 8

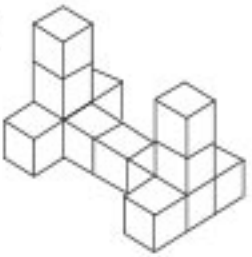
DETYRA PËR USHTRIME

1. Vizatoni në letër izometrike formën 3D në vizatimin 9:

a) 

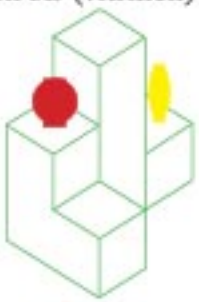
b) 

c) 

ç) 

Vizatimi 9

2. Vizatoni, në letër izometrike, formën 3D (vitrinën) në vizatimin 10:

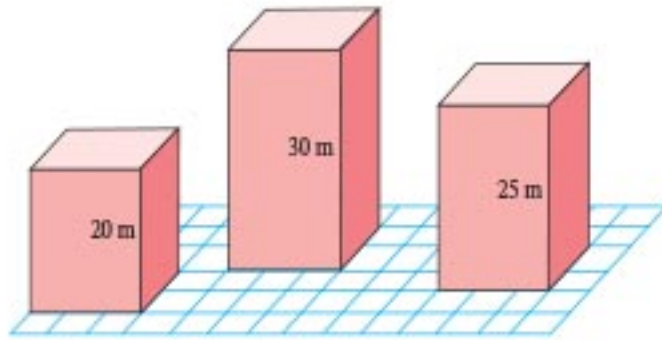


Vizatimi 10

3. **Detyrë projektuese**

Është dhënë skica e një kompleksi banesor dhe afarist që përbëhet nga tre ndërtesa të vendosura mbi një qendër tregtare që ndodhet në katin përdhes. Në hapësirën përreth ndërtesave është parashikuar rregullim hortikulturor dhe një shesh lojërash për fëmijë. Çdo katror i skicës në terren është katror me brinjë 5 m.

1) Sipas skicës në vizatimin 9, vizatoni në letër izometrike një vizatim të kompleksit, duke llogaritur që 5 m në terren janë paraqitur me një segment njësi në letrën izometrike.
2) Ndërtoni një maket të kompleksit sipas udhëzimeve të mëposhtme:
   - gjatësia e segmentit njësi, që në terren është 5 m, në maket do të jetë 5 cm,
   - katin përdhes ndërtojeni nga stiropori me trashësi 5 cm,
   - modelet e ndërtesave ndërtoni nga kartoni,
   - vizato dyer dhe dritare, duke i kushtuar vëmendje dimensioneve (në çdo rreth 3 m lartësi të ndërtesës ka nga një kat),
   - ngjitni ndërtesat në stiropor sipas planit,
   - rregullojeni hapësirën përreth ndërtesave sipas dëshirës tuaj.



Vizatimi 11

17. KOMBINACIONE TË TRANSLACIONEVE, ROTACIONEVE DHE SIMETRIVE BOSHTORE

Aktivitet

Në një sistem koordinativ drejtkëndor, shënoni pikën $A(2, 1)$.

a) Zbatoni translacionin (zhvendosjen) e pikës A për 5 njësi majtas dhe 3 njësi poshtë. Shënoni pasqyrën e saj me A_1.

b) Gjeni pasqyrën A_2 të pikës A_1 në simetrinë boshtore me bosht $y = -2$.

c) Shënoni me A_3 pasqyrën e pikës A_2 gjatë rotacionit (rrotullimit) me qendër në pikën (0,1) dhe kënd rrotullimi 90° në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës.

Detyra jonë do të jetë të bëjmë kombinime të dy lëvizjeve (translacione, simetri boshtore ose rotacione) dhe të gjejmë pasqyrën e një origjinali të dhënë, në lidhje me një sistem koordinativ të zgjedhur.

Shembulli 1

Është dhënë trekëndëshi ABC me kulme në pikat $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ dhe $C(4, 3)$. Janë dhënë simetria boshtore me bosht simetrie $y = 0$ dhe rotacioni me qendër në pikën $(0, 0)$ për kënd 90°, në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës.

Andrej fillimisht zbatoi simetrinë boshtore, e më pas rotacionin (vizatimi 1a), ndërsa Admiri fillimisht zbatoi rotacionin, e më pas simetrinë boshtore (vizatimi 1b).

A fituan ata të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Andrej i fiton rradhazi trekëndëshat:

$A(1, 1) \to D(1, -1) \to G(1, 1)$

$B(3, 1) \to E(3, -1) \to H(1, 3)$

$C(4, 3) \to F(4, -3) \to J(3, 4)$

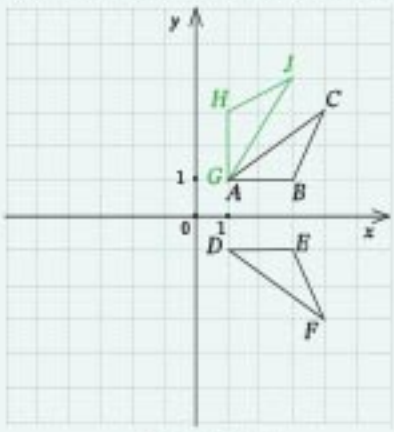
Admir i fiton rradhazi trekëndëshat:

$A(1, 1) \to K(-1, 1) \to N(-1, -1)$

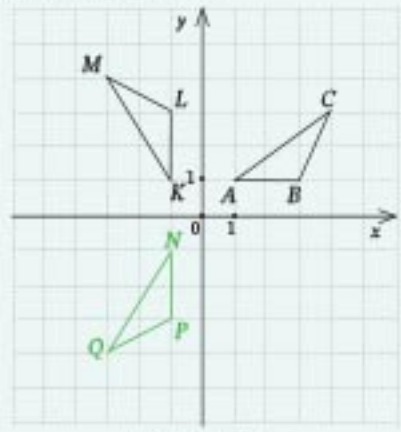
$B(3, 1) \to L(-1, 3) \to P(-1, -3)$

$C(4, 3) \to M(-3, 4) \to Q(-3, -4)$

Andrej dhe Admiri nuk fituan të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC.



Vizatimi 1a



Vizatimi 1b

Detyra 1

Është dhënë trekëndëshi ABC me kulmet $A(-2, 3)$, $B(1, 0)$ dhe $C(3, 2)$.

a) Zbatoni rotacionin e trekëndëshit ABC rreth kulmit B për 90° në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës.

b) Më pas zbatoni simetrinë boshtore të pasqyrës së fituar të trekëndëshit ABC në lidhje me drejtëzën $y = x$.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt. A fituat të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Shembulli 2

Është dhënë trekëndëshi ABC me kulme në pikat $A(-2, 1)$, $B(-2, 0)$ dhe $C(0, 0)$. Janë dhënë simetria boshtore në lidhje me boshtin y dhe translacioni për 3 njësi djathtas dhe 1 njësi lart. Arta fillimisht zbaton simetrinë boshtore, e më pas translacionin (vizatimi 2a), ndërsa Ana fillimisht zbaton translacionin, e më pas simetrinë boshtore (vizatimi 2b). A fituan ata të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Arta i fiton rradhaz trekëndëshat:

$A(-2, 1) \to D(2, 1) \to G(5, 2)$

$B(-2, 0) \to E(2, 0) \to H(5, 1)$

$C(0, 0) \to F(0, 0) \to J(3, 1)$

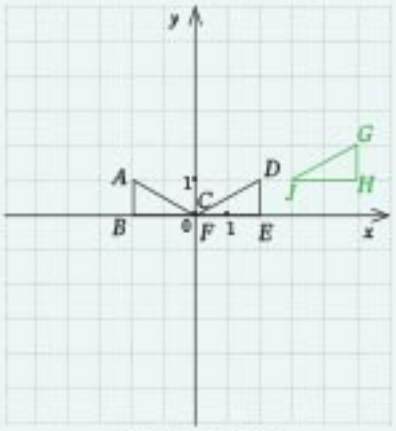
Ana i fiton rradhazi trekëndëshat:

$A(-2, 1) \to K(1, 2) \to N(-1, 2)$

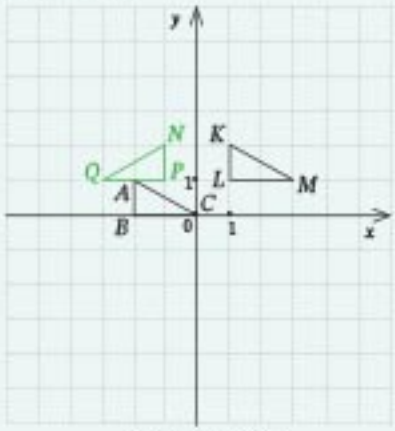
$B(-2, 0) \to L(1, 1) \to P(-1, 1)$

$C(0, 0) \to M(3, 1) \to Q(-3, 1)$

Arta dhe Ana nuk fituan të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC.



Vizatimi 2a



Vizatimi 2b

Detyra 2

Vizatoni trekëndëshin ABC me kulmet $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ dhe $C(2, 5)$.

a) Gjeni pasqyrën e trekëndëshit ABC në simetrinë boshtore në lidhje me boshtin x.

b) Zbatoni translacionin e pasqyrës së fituar të trekëndëshit ABC për 4 njësi majtas dhe 5 njësi lart.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt. A fituat të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Shembulli 3

Është dhënë trekëndëshi me kulme në pikat $A(-1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Janë dhënë rotacioni për kënd 90° në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës dhe qendër në origjinën e sistemit koordinativ, dhe translacioni për 1 njësi majtas dhe 3 njësi poshtë. Mila fillimisht kryen rotacionin, e më pas translacionin (vizatimi 3a), ndërsa Merlinda fillimisht kryen translacionin, e më pas rotacionin (vizatimi 3b). A do të marrin ata të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Mila i fiton rradhazi trekëndëshat:

$A(-1, -1) \to D(1, -1) \to G(0, -4)$

$B(-1, -2) \to E(2, -1) \to H(1, -4)$

$C(1, -2) \to F(2, 1) \to J(1, -2)$

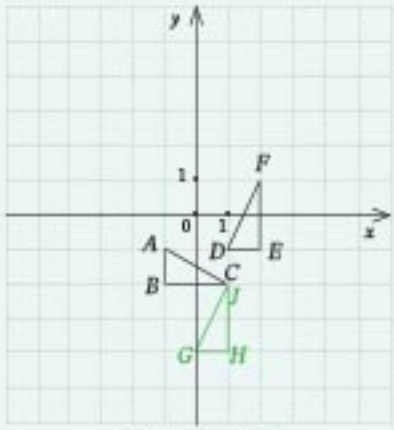
Merlinda i fiton rradhazi trekëndëshat:

$A(-1, -1) \to K(-2, -4) \to N(4, -2)$

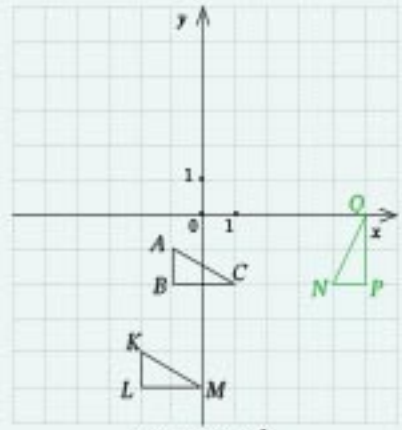
$B(-1, -2) \to L(-2, -5) \to P(5, -2)$

$C(1, -2) \to M(0, -5) \to Q(5, 0)$

Mila dhe Merlinda nuk fituan të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC.



Vizatimi 3a



Vizatimi 3b

Detyra 3

Në sistemin koordinativ drejtkëndor, vizatoni trekëndëshin ABC me koordinata të kulmeve $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ dhe $C(1, 4)$.

a) Zbatoni rotacionin rreth kulmit A për 90° në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës.

b) Zbatoni translacionin e pasqyrës majtas për 2 njësi dhe poshtë për 5 njësi.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt. A fituat të njëjtën pasqyrë të trekëndëshit ABC?

Aktivitet

Është dhënë trekëndëshi me kulme në pikat $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 3)$. Janë dhënë rotacioni për 180° rreth origjinës së koordinatave dhe simetria boshtore në lidhje me boshtin x. A është rendtja e kryerjes së transformimeve e rëndësishme?

Detyra 4

Është dhënë drejtkëndëshi me kulme në pikat $P(2, 1)$, $Q(6, 1)$, $R(6, 4)$ dhe $S(2, 4)$. Janë kryer dy transformime të njëpasnjëshme: rotacioni për 180°, në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës rreth origjinës së sistemit koordinativ, dhe simetria boshtore në lidhje me boshtin y.

a) Gjeni koordinatat e pikave P, Q dhe R pas rotacionit. Shënoni me P_1, Q_1 dhe R_1.

b) Gjeni koordinatat e pikave P_1, Q_1 dhe R_1 pas simetrisë boshtore.
Shënoni me P_2, Q_2 dhe R_2.

c) Shpjegoni nëse do të fitoni të njëjtat pika nëse ndryshon rendtja e dy transformimeve.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Mbi formën e dhënë në vizatimin 4, zbatoni transformimet e mëposhtme:

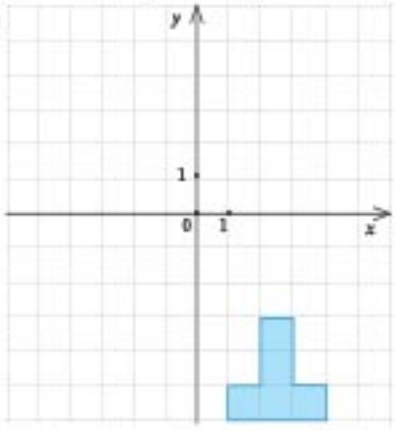
a) simetri boshtore në lidhje me boshtin x, më pas translacion për 3 majtas dhe për 4 lart,

b) rotacion për 180° me qendër në (−1,0), më pas simetri boshtore në lidhje me drejtëzën $y = 1$,

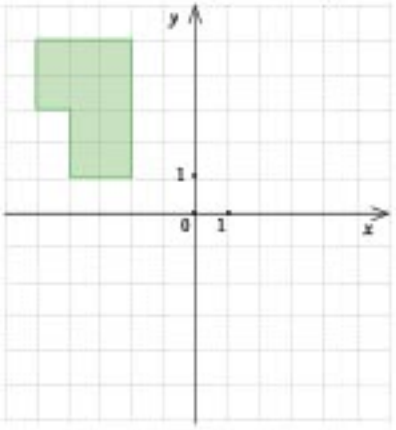
c) simetri boshtore në lidhje me drejtëzën $y = -1$, më pas rotacion për 90° me qendër (0, −3) në kah të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës,

ç) translacion për 3 majtas dhe 5 poshtë, më pas simetri boshtore në lidhje me drejtëzën $x = -1$.

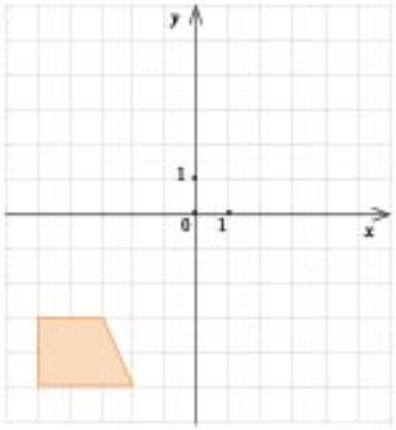
a)



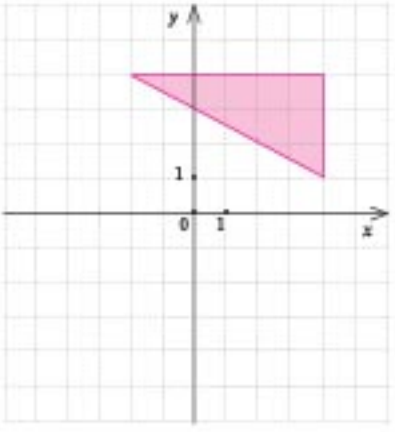
b)



c)



ç)



Vizatimi 4

2. Në sistemin koordinativ drejtkëndor, vizatoni trekëndëshin ABC me koordinata të kulmeve $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ dhe $C(2, 5)$.

a) Gjeni pasqyrën e trekëndëshit ABC në simetrinë boshtore në lidhje me boshtin x dhe shënojeni me MNP.

b) Zbatoni translacionin e trekëndëshit MNP për 4 njësi majtas dhe 5 njësi lart.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt: fillimisht translacionin e trekëndëshit ABC për 4 njësi majtas dhe 5 njësi lart, e më pas simetrinë boshtore të trekëndëshit të fituar në lidhje me boshtin x. A fituat të njëjtën pasqyrë? Çfarë përfundoni?

3. Në sistemin koordinativ drejtkëndor, vizatoni katërkëndëshin $ABCD$ me koordinata të kulmeve $A(1, -3)$, $B(3, -2)$, $C(4, 0)$ dhe $D(3,1)$.

a) Përcaktoni pasqyrën e katërkëndëshit $ABCD$ në simetrinë boshtore në lidhje me drejtëzën $y = 1$ dhe shënojeni me $MNPR$.

b) Zbatoni rotacionin e katërkëndëshit $MNPR$ me qendër në pikën $(0, -1)$ për kënd prej $90°$ në kah të lëvizjes së akrepave të orës.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt: fillimisht rotacionin e dhënë të $ABCD$, e më pas simetrinë boshtore të katërkëndëshit të fituar në lidhje me drejtëzën $y = 1$. A fituat të njëjtën pasqyrë? Çfarë përfundoni?

4. Në një sallë sportive po vendosen reflektorë të rinj LED. Tekniku fillimisht shënoi vendet e parashikuara për tre reflektorë në planin e sallës me pikat $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ dhe $C(4, 5)$. Më pas shefi i thotë se plani duhet të përshtatet për murin tjetër të sallës. Për të zhvendosur reflektorët në pozicionin e ri, duhet të kryhen dy lëvizje: simetria boshtore në lidhje me boshtin x dhe translacioni për 3 njësi majtas dhe 1 njësi poshtë.

a) Gjeni koordinatat e pikave A, B, dhe C pas secilit prej dy transformimeve.

b) Verifikoni nëse do të fitoni të njëjtin rezultat nëse fillimisht zbatoni translacionin, e më pas simetrinë?

5. Është dhënë trekëndëshi me kulme në pikat $A(1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Janë dhënë dy translacione: T_1 me të cilin lëvizim 3 njësi djathtas dhe 4 njësi lart, dhe T_2 me të cilin lëvizim 1 njësi djathtas dhe 3 njësi poshtë. A është renditja e kryerjes së transformimeve e rëndësishme?

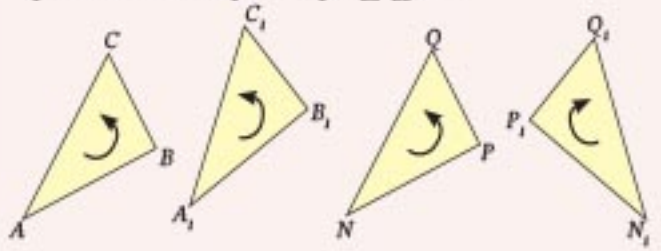
Hulumtim

Vizatoni dy segmente AB dhe CD, të cilët kanë të njëjtën gjatësi dhe nuk janë paralelë. Gjithashtu A dhe C, si dhe B dhe D, janë pika të ndryshme. Gjeni një rotacion (këndin dhe qendërën) me të cilin pikat C dhe D janë pasqyra të pikave A dhe B, përkatësisht.
Udhëzim: Qendra e rotacionit është në largesë të njëjtë nga pikat A dhe C, prandaj do të shtrihet në përgjysmoren (simetralen) e segmentit AC. Për të njëjtën arsye, qendra e rotacionit do të shtrihet edhe në përgjysmoren (simetralen) e segmentit BD.

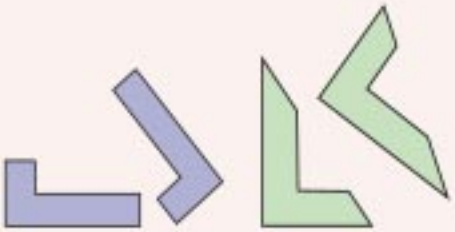
18. IDENTIFIKIMI I KOMBINACIONEVE TË SIMETRISË BOSHTORE, ROTACIONIT DHE TRANSLACIONIT

Aktivitet

a) Për trekëndëshat në vizatimin 1 vlen $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ dhe $\Delta NPQ \cong \Delta N_1P_1Q_1$. Cili çift trekëndëshash kanë orjentim të njëjtë, e cilët kanë orjentim të kundërt? Si arritët në atë përfundim? Arsyetoni përgjigjen.



Vizatimi 1



Vizatimi 2

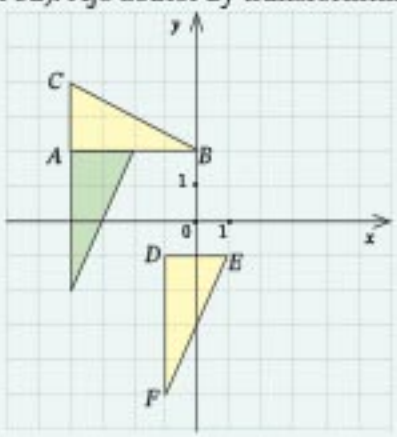
b) Format 2D në vizatimin 2 janë në çifte të puthitshme. Cili çift i formave 2D kanë orjentim të njëjtë, e cilët orjentim të kundërt? Si arritët në atë përfundim? Arsyetoni përgjigjen.

Në këtë njësi mësimore, do të përpiqemi të identifikojmë kombinime të simetrisë boshtore, rotacionit dhe translacionit që janë përdorur për të ndryshuar pozicionin e një forme 2D të dhënë.

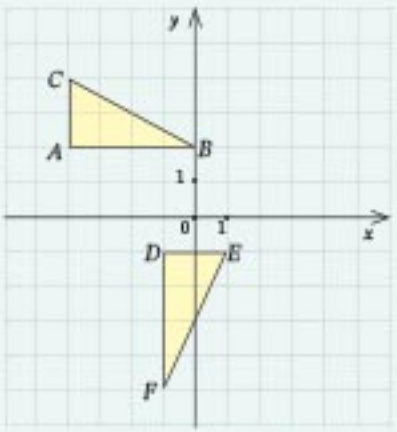
Shembulli 1

Maria dhe Martini kërkojnë një kombinim të translacioneve, rotacioneve dhe simetrive boshtore me të cilat nga origjinali – trekëndëshi ABC me kulme $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$ dhe $C(-4, 4)$, është fituar pasqyra – trekëndëshi DEF me kulme $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$ dhe $F(-1, -5)$.

Të dy vunë re se të dy trekëndëshat kanë orjentim të njëjtë. Kjo do të thotë se në kombinim nuk duhet të ketë simetri boshtore.
Maria zbatoi rotacionin me qendër në pikën $(-4, 2)$ dhe këndë $90°$ në kah të lëvizjes së akrepave të orës, e më pas zbatoi translacionin për 3 njësi djathtas dhe 3 njësi poshtë (vizatimi 3a). Ajo zbatoi dy transformime.



Vizatimi 3a

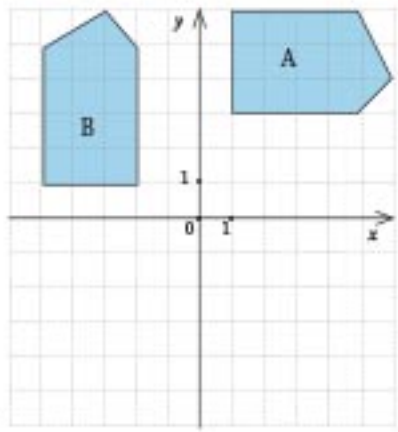


Vizatimi 3b

Martini vuri re se, nëse zbaton rotacionin me qendër në pikën $(-4, -1)$ dhe kënd 90° në kah të lëvizjes së akrepave të orës, do të marrë menjëherë trekëndëshin DEF si pasqyrë (vizatimi 3b). Ai zbatoi një transformim të vetëm.
Pra, Maria zbatoi dy transformime, ndërsa Martini një transformim.
Mënyra e tij është më e thjeshtë.

Detyra 1

Gjeni një kombinim të transformimeve me të cilat nga origjinali A, është marrë figura B (vizatimi 4).

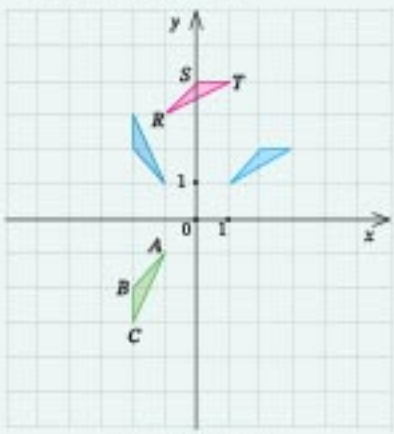


Vizatimi 4

Shembulli 2

Mësuesi u dha detyrë Pavelit, Stefanisë dhe Petarit të gjenin një kombinim të translacioneve, rotacioneve dhe simetrive boshtore me të cilat nga origjinali – trekëndëshi ABC me kulme $A(-1, -1)$, $B(-2, -2)$ dhe $C(-2, -3)$, është fituar pasqyra – trekëndëshi RST me kulme $R(-1,3)$, $S(0,4)$ dhe $T(1,4)$.

Paveli, Stefania dhe Petari dhanë zgjidhjet e mëposhtme. Të tre vunë re se të dy trekëndëshat kanë orjentim të kundërt. Kjo do të thotë se në kombinim është e nevojshme të ketë simetri boshtore. Paveli fillimisht zbatoi simetrinë boshtore në lidhje me boshtin x (vizatimi 5a), më pas zbatoi rotacionin me qendër në origjinën e koordinatave për kënd 90° në kah të lëvizjes së akrepave të orës, dhe në fund zbatoi translacionin për 2 njësi majtas dhe 2 njësi lart. Ai zbatoi tre transformime.



Vizatimi 5a



Vizatimi 5b



Vizatimi 5c

Stefania fillimisht zbatoi simetrinë boshtore në lidhje me drejtëzën $y = 1$ (vizatimi 5b).

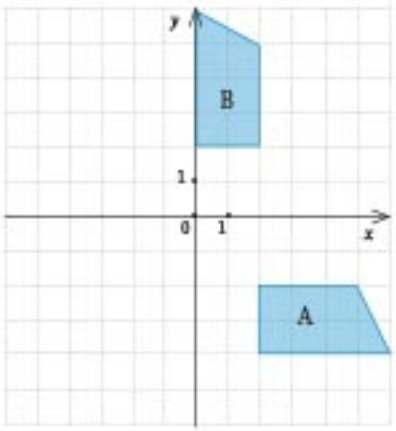
Më pas vuri re se nëse zbaton rotacionin me qendër në pikën R dhe kënd 90° në kah të lëvizjes së akrepave të orës, do të fitojë menjëherë trekëndëshin RST si pasqyrë. Ajo zbatoi dy transformime.
Petari fillimisht zbatoi simetrinë boshtore në lidhje me drejtëzën $y = x$ (vizatimi 5c). Më pas vuri re se nëse zbaton rotacionin me qendër në pikën (−1, 1) dhe kënd 180°, do të fitojë menjëherë trekëndëshin RST si pasqyrë. Ai zbatoi dy transformime.
Pra, Paveli zbatoi tre transformime, ndërsa Stefania dhe Petari nga dy transformime.
Kombinimi që identifikuan Stefania dhe Petari është më i thjeshtë se kombinimi i Pavelit.

Detyra 2

Zgjidhni detyrën nga shembulli i mëparshëm, duke shqyrtuar një variant të katërt tëndin. Krahaso numrin tënd të transformimeve me numrin e transformimeve të Pavelit, Stefanisë dhe Petarit.

Detyra 3

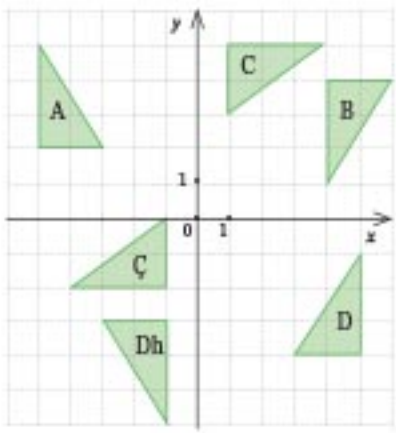
Gjeni një kombinim të transformimeve me të cilat nga origjinali – katërkëndëshi A, është fituar pasqyra – katërkëndëshi B (vizatimi 6).



Vizatimi 6

DETYRA PËR USHTRIME

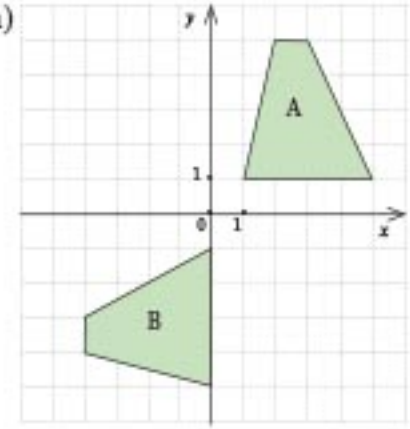
1. Gjeni kombinime të mundshme të translacioneve, rotacioneve dhe simetrive boshtore, ashtu që origjinali të ketë koordinata $A(3,2)$, $B(4,2)$, $C(5,1)$, dhe pasqyra të ketë koordinata $M(3,4)$, $N(3,5)$, $P(4,6)$.
2. Janë dhënë dy katrorë $ABCD$ dhe $MNPQ$ me kulme në pikat $A(3,2)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(4,2)$ dhe $M(5,0)$, $N(4,0)$, $P(4,1)$, Q(5,1). Gjeni një kombinim të më së shumti tre transformimeve (translacione, rotacione dhe simetri boshtore) për të cilat $ABCD$ është origjinal, dhe $MNPQ$ është pasqyra e tij.
3. Gjeni një kombinim të mundshëm të translacioneve, rotacioneve dhe simetrive boshtore me të cilin transformohet figura:
   a) A në B, b) Ç në A, c) Dh në C,
   ç) D në Ç, d) B në Dh (vizatimi 7)



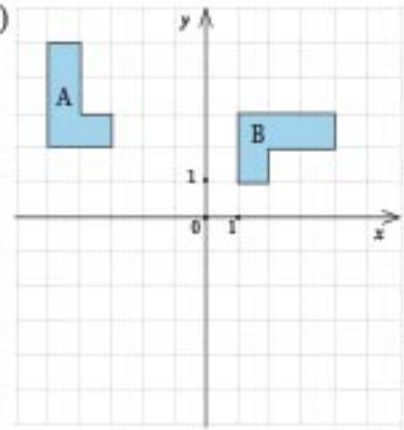
Vizatimi 7

4. Gjej një kombinim të mundshëm të translacioneve, rotacioneve dhe simetrive boshtore me të cilin figura A transformohet në figurën B (vizatimi 8):

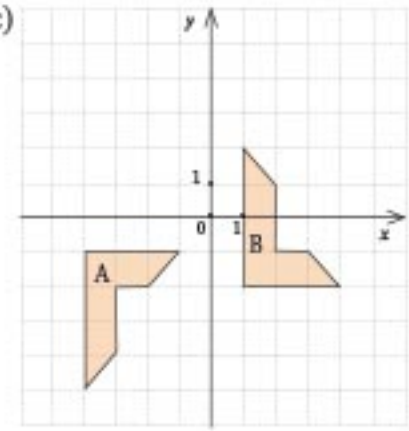
a)



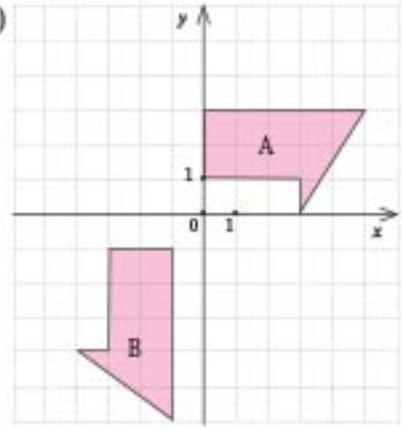
b)



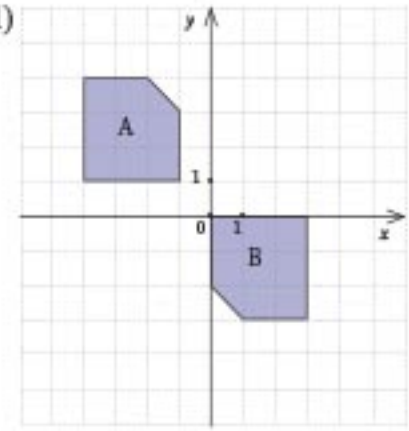
c)



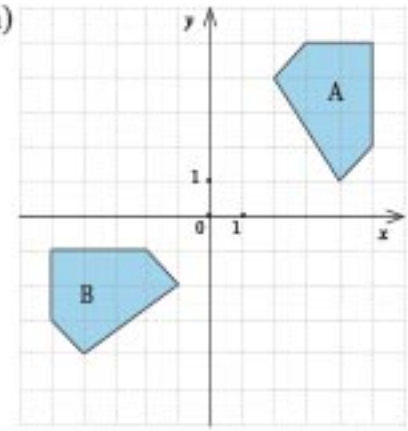
ç)



d)



dh)



Vizatimi 8

Hulumtim

Ivani dëshiron të verifikojë nëse një lëvizje e çfarëdoshme, e përcaktuar me origjinalin ABC dhe pasqyrën e tij $A_1B_1C_1$, mund të paraqitet si një kombinim i më së shumti tre simetrive boshtore. Ai mendon në mënyrën në vijim: Me simetrinë e parë boshtore, pika A do të puthitet me pikën A_1. Më pas, me simetrinë tjetër boshtore (nëse ka nevojë), pika e dytë (B) do të puthitet me B_1, dhe gjatë kësaj pika A_1 do të mbetet e palëvizshme. Në fund, nëse ka nevojë për një simetri të tretë boshtore, pika e tretë (C) do të puthitet me C_1, dhe pikat A_1 dhe B_1 do të mbeten të palëvizshme. Zgjidhni dy trekëndësha të puthitshëm dhe verifikoni nëse Ivani ka të drejtë.

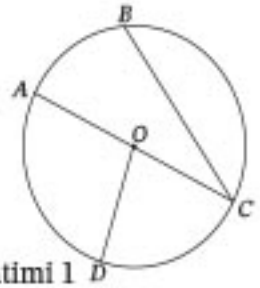
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Njëri nga dy këndet me krahë paralele është 67°. Sa shkallë ka këndi tjetër, nëse:
   a) krahët e tyre janë me kahe të njëjta, b) krahët e tyre janë me kahe të kundërta,
   c) njëri çift i krahëve janë me kahe të njëjta, kurse çifti tjetër me kahe të kundërta?

2. Gjeni këndet α dhe β me krahë reciprokisht normalë, nëse:
   a) $\alpha = 118° + \beta$, b) $\alpha = 5\beta$.

3. Sipas vizatimit 1, emërtoni të gjitha:
   a) sektorët rrethorë, b) segmentet rrethorë.

4. Gjeni këndin periferik që ndodhet mbi të njëjtin hark rrethor me këndin qendror prej : a) 79°, b) 234°.



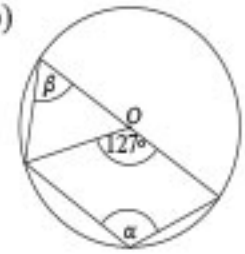
Vizatimi 1

5. Gjeni këndet e panjohura α dhe β në vizatimin 2:

a)



b)



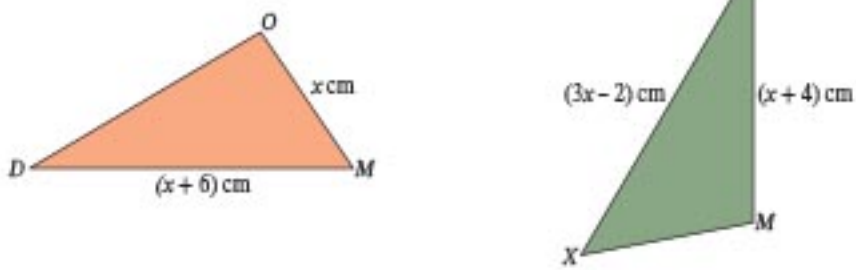
Vizatimi 2

6. Konstruktoni një trekëndësh këndrejtë ABC, nëse është dhënë hipotenuza $c = 4{,}8$ cm dhe këndi $\alpha = 30°$.

7. Konstruktoni një trekëndësh barakrahës ABC, nëse është dhënë gjatësia e krahut $b = 5{,}4$ cm dhe këndi mbi bazë $\alpha = 65°$.

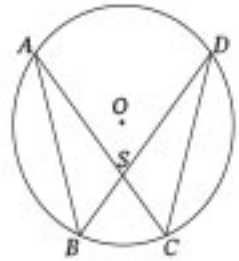
8. Konstruktoni një trekëndësh barabrinjës ABC, nëse distanca nga qendra e rëndesës deri te një brinjë e trekëndëshit është 1,5 cm.

9. Është e ditur se $\Delta DMO \cong \Delta JXM$. Sipas të dhënave në vizatimin 3, gjeni gjatësinë e secilës brinjë të trekëndëshave.



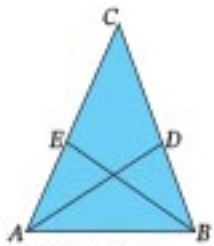
Vizatimi 3

10. Nëse është dhënë se $\overline{AB} = \overline{CD}$, shpjegoni se pse $\Delta ABS \cong \Delta DCS$ (Vizatimi 4).



Vizatimi 4

11. Segmentet AD dhe BE shtrihen në përgjysmoret (simetralet) e këndeve në bazën e trekëndëshit barakrahës ABC (Vizatimi 5). Shpjegoni pse: a) $\Delta ABD \cong \Delta BAE$, b) $\overline{DC} = \overline{EC}$.

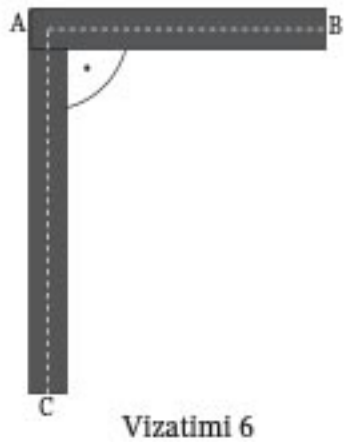


Vizatimi 5

12. Llogaritni hipotenuzën e trekëndëshit këndrejtë, nëse katetet e tij janë:
a) $a = 9$ cm dhe $b = 12$ cm, b) $a = 7$ cm dhe $b = 24$ cm.

13. Llogaritni njërin katet të trekëndëshit këndrejtë, nëse hipotenuza dhe kateti tjetër kanë gjatësi: a) $c = 25$ cm dhe $b = 15$ cm, b) $c = 37$ cm dhe $a = 35$ cm.

14. Tre kryqëzime A, B dhe C janë të lidhura ashtu që nga A në B të dërgon një rrugë e drejtë me gjatësi 230 m. Nga A në C të dërgon një rrugë e drejtë me gjatësi 325 m dhe këndi BAC është i drejtë (vizatimi 6). Për sa metra do të shkurtohet udhëtimi nga B në C, nëse ndërtohet një rrugë e drejtpërdrejtë midis këtyre dy kryqëzimeve?



Vizatimi 6

15. Në zonën e një këndi të drejtë ndodhet pika M, e cila nga krahët e tij është e larguar 2,4 cm dhe 0,7 cm. Njehsoni sa është e larguar pika M nga kulmi i këndit të drejtë.

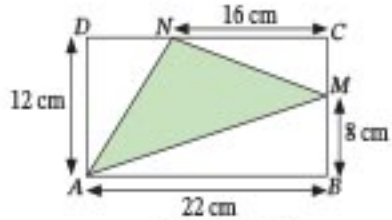
16. Qyteti B ndodhet 56 km në lindje të qytetit A. Qyteti C ndodhet 73 km në jug të qytetit A. Gjeni distancën midis qyteteve B dhe C.

17. Bazat e një trapezi barakrahës janë $a = 85$ cm dhe $b = 43$ cm, dhe krahu i tij ka gjatësi 35 cm. Njehsoni lartësinë e trapezit.

18. Njehsoni diagonalen d_2 të rombit, nëse brinja dhe njëra diagonale janë:
a) $a = 55$ cm dhe $d_1 = 66$ cm, b) $a = 45$ cm dhe $d_1 = 72$ cm.

19. Përcaktoni rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar përreth katrorit me brinjë $a = 3$ cm.

20. Njehsoni perimetrin e trekëndëshit AMN, i cili është brendashkruar në drejtkëndëshin $ABCD$ (Vizatimi 7).



Vizatimi 7

21. Konstruktoni drejtkëndëshin me diagonale $d = 6$ cm dhe kënd ndërmjet diagonaleve 140°.

22. Konstruktoni paralelogramin me diagonale $d_1 = 7$ cm, brinjë $a = 5$ cm dhe kënd ndërmjet tyre 30°.

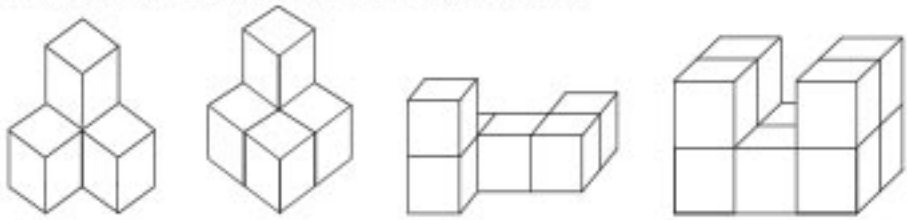
23. Gjeni krahun e një trapezi barakrahës, nëse bazat e tij janë 38 cm dhe 24 cm, dhe lartësia me krahun formon një kënd prej 45°.

24. Vija e mesme e trapezit është 10,5 cm, dhe njëra bazë është 7,2 cm. Njehsoni bazën tjetër.

25. Njëri nga këndet e brendshme të deltoidit është 47°, dhe shuma e këndeve të barabartë është 236°. Njehsoni këndet e deltoidit.

26. Sa brinjë të bazës, e sa brinjë anësore ka:
a) një prizëm nëntëmbëdhjetëkëndor, b) një piramidë shtatëmbëdhjetëkëndore?

27. Vizatoni në letër izometrike formën 3D në vizatimin 8.



Vizatimi 8

28. Është dhënë trekëndëshi ABC me kulmet $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ dhe $C(3, 4)$.

a) Gjeni pasqyrën e trekëndëshit ABC në simetrinë boshtore në lidhje me boshtin x dhe shënojeni me MNP.

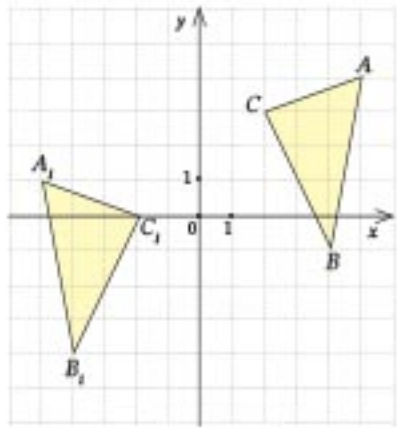
b) Zbatoni translacionin e trekëndëshit MNP për 5 njësi majtas dhe 3 njësi lart.

c) Zbatoni transformimet në renditje të kundërt. A fituat të njëjtën pasqyrë? Çfarë përfundoni?

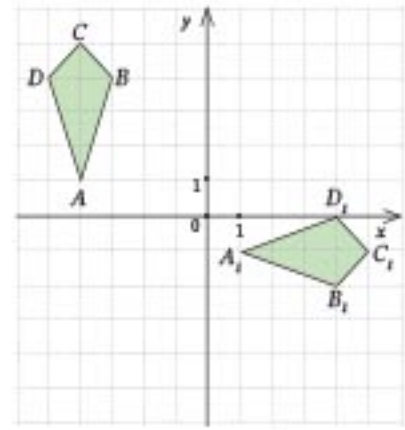
29. Përshkruani transformimin me të cilin nga:

a) origjinali – trekëndëshi ABC – fitohet pasqyra – trekëndëshi $A_1B_1C_1$ (Vizatimi 9a),

b) origjinali – katërkëndëshi $ABCD$ – fitohet pasqyra – katërkëndëshi $A_1B_1C_1D_1$ (Vizatimi 9b).



Vizatimi 9a



Vizatimi 9b

Tema 3:

ALGJEBRA

Rezultatet e të nxënit:

Gjatë studimit të kësaj teme do të aftësoheni të:

- zgjidhni probleme me shprehje të plota racionale.
- përdorni konceptet e relacionit dhe funksionit në kontekstin e përditshëm.
- zgjidhni probleme me interpretimin e grafikut të funksionit linear.

1. MONOMI

Monomi. Monomi në trajtë të rregullt

Aktivitet

a) Çfarë kuptojmë me konstantë, e çfarë me ndryshore? Çfarë kuptojmë me shprehje?
b) Gjeni konstantat dhe ndryshoret në shprehjet në vijim: $3x^2$, xy^3, $-4a^3b^2$, y.

Shprehja e formuar nga konstanta dhe ndryshore të lidhura me veprimet e shumëzimit dhe fuqizimit me tregues numër të plotë jo negativ quhet **monom**.

Do të konsiderojmë se konstantat janë numra racionalë dhe ndryshoret marrin vlera në bashkësinë e numrave racionalë.

Shembulli 1

a) Të gjitha konstantat janë monome.
b) Shprehjet, për shembull, $-x$, y, $\frac{4}{7}a^2b$, $3x^2$, xy^3, $-4a^3b^2$ janë monome.
c) Shprehjet, për shembull, x^2+1, $\frac{2}{y}$, $\frac{3x-2}{5}$ nuk janë monome, sepse përmbajnë të paktën nga një prej veprimeve të mbledhjes, zbritjes dhe pjesëtimit me ndryshore.
ç) Shprehja $\frac{y^2}{15}$ është monom, sepse mund ta shkruajmë si prodhim $\frac{1}{15}y^2$.

Detyra 1

Cilat nga shprehjet e mëposhtme janë monome:

a) $\frac{5}{6}$, b) $8x$, c) $3x+2$, ç) $\frac{x}{5}$, d) $\frac{5}{x}$, dh) $\frac{2x+1}{3}$, e) $-7xy^3z^5$, ë) $\frac{2x^4y^2z}{5}$?

Shembulli 2

Monomi $5x^3y2zy$ ka tre ndryshore x, y dhe z. Me zbatimin e ligjit komutativ të shumëzimit dhe procedurën e shumëzimit të fuqive me baza të barabarta, prodhimin yy mund ta shkruajmë në formën y^2. Në mënyrë të ngjashme, prodhimin $5 \cdot 2 = 10$. Atëherë, monomi $5x^3y2zy$ është i barabartë me monomin $10x^3y^2z$. Monomi $10x^3y^2z$ nuk mund të paraqitet më tej me një numër më të vogël faktorësh.
Për të themi se monomi është shkruar në **trajtë të rregullt**. Pra:

$5x^3y2zy = 10x^3y^2z$.

Gjatë sjelljes së një monomi në trajtë të rregullt:

- i riorganizojmë faktorët duke zbatuar ligjin komutativ;
- konstantat i shumëzojmë, ndërsa faktorët me të njëjtën ndryshore i shkruajmë në trajtë fuqie, duke përdorur rregullën e shumëzimit të fuqive me bazë të njëjtë;
- monomi i fituar është i barabartë me monomin e dhënë.

Me marrëveshje, tek monomet në trajtë të rregullt fillimisht e shkruajmë faktorin konstant, e më pas faktorët me ndryshore.

Shembulli 3

Sillni monomin në trajtë të rregullt: a) $5x^5yxy^2$, b) $2x^3yx^4y(-4xy)$, c) $-xyx^3y^3xy$.

a) $5x^5yxy^2 = 5x^6y^3$, b) $2x^3yx^4y(-4xy) = -8x^8y^3$, c) $-xyx^3y^3xy = -x^5y^5$.

Detyra 2

Sillni monomin në trajtë të rregullt:

a) $8ab^23ab$, b) x^2yxxy^2, c) $-x^2y^34x^3y^3(-6xy)$, ç) $2aab3abb4ab^2$.

Konstanta në monomin në trajtë të rregullt me të cilën shumëzohen ndryshoret quhet **koeficient i monomit**. Prodhimi i ndryshoreve në monom quhet **pjesa shkronjore** (ose **kryesore**) **e monomit**.

Shembulli 4

Gjeni koeficientin dhe pjesën shkronjore të monomit:

a) $6ab^3c^2$, b) $-xy^3$, c) xy^2z^3, ç) $-\frac{3x^2y}{4}$.

a) Monomi $6ab^3c^2$ ka koeficient 6 dhe pjesë shkronjore ab^3c^2.

b) Meqenëse $-xy^3 = (-1) \cdot xy^3$, koeficienti i monomit është -1, ndërsa pjesa shkronjore është xy^3.

c) Meqenëse $xy^2z^3 = 1 \cdot xy^2z^3$, koeficienti i monomit është 1, ndërsa pjesa shkronjore është xy^2z^3.

ç) Te monomi $-\frac{3x^2y}{4}$, koeficienti është $-\frac{3}{4}$, ndërsa pjesa shkronjore është x^2y.

Detyra 3

Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

monomi	$2,5\,a^5b^2$	y^3	$-xyz$	$\frac{x^3y^5}{3}$	$-12x^2$	y^3
koeficienti						
pjesa shkronjore						

Shkalla e monomit

Aktivitet

Sa është treguesi i fuqisë së ndryshores në monomin: a) $5a$, b) $\frac{1}{3}x^2$?

Te monomet me një ndryshore, treguesi i fuqisë së ndryshores është shkalla e monomit. Për shembull, monomi $-2x^3$ është i shkallës së tretë, ndërsa monomi $7a^4$ është i shkallës së katërt, etj. Te monomet me dy ose më shumë ndryshore, përveç shkallës së monomit në lidhje me secilën ndryshore veç e veç, dallojmë edhe **shkallën e monomit në lidhje me të gjitha ndryshoret.** Në këtë kuptim, në monomin $-3xy^2$ ndryshorja x është e shkallës së parë, ndryshorja y është e shkallës së dytë, prandaj shkalla e monomit në lidhje me të gjitha ndryshoret është $1 + 2 = 3$.

Shuma e treguesëve të fuqive të ndryshoreve në monom quhet **shkalla e monomit.**

Shembulli 5

Gjeni shkallën e monomit: a) $2a^2b^3c^4$, b) $5xy^2z$, c) $-xyz$.

a) Shuma e eksponentëve të ndryshoreve është $2 + 3 + 4 = 9$, pra monomi është i shkallës së 9.
b) Shkalla e monomit $5xy^2z$ e $1 + 2 + 1 = 4$.
c) Secila nga ndryshoret x, y dhe z është e shkallës së parë, pra monomi $-xyz$ është i shkallës së tretë.

Detyra 4

Gjeni shkallën e monomit:
a) $2xy^3z^2$, b) $5x4y$, c) x^3z^5, ç) $3x^3z^3$.

Monomet e ngjashme

Aktivitet

Cilët nga monomet: $-3xy^2$, $3x^2$, $5xy^2$, $-3x$ dhe $5x^2y^2$ kanë të njëjtën pjesë shkronjore?

Shembulli 6

Sillni në trajtë të rregullt monomet $3(-2)x^4yy^2$ dhe $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2$.
A kanë ata të njëjtën pjesë shkronjore?

Le t'i sjellim monomet në trajtë të rregullt: $3(-2)x^4yy^2 = -6x^4y^3$ dhe $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2 = 21x^4y^3$. Monomet $-6x^4y^3$ dhe $21x^4y^3$ kanë të njëjtën pjesë shkronjore. Ata ndryshojnë vetëm nga koeficienti. Për ta themi se janë monome të ngjashme.

Monomet që kanë të njëjtën pjesë shkronjore quhen **monome të ngjashme.**

Detyra 5

Cilët nga çiftet e mëposhtme të monomeve janë të ngjashme:
a) $-2x$ dhe $2x^2$, b) $4xy$ dhe $-3xy$, ç) -5 dhe 5, d) $7a^4b^3aba$ dhe ab^3a^5?

Monome të kundërt

Aktivitet

Janë dhënë monomet $-2x^3$ dhe $2x^3$.
a) A janë ata të ngjashëm? b) Çfarë numrash janë koeficientët e tyre?

Shembulli 7

Monomet $-6x^5y$ dhe $6x^5y$ kanë të njëjtën pjesë shkronjore. Ata janë monome të ngjashme. Koeficientët e tyre -6 dhe 6 janë numra të kundërt. Për monomet në fjalë themi se janë të kundërt me njëri-tjetrin.

Dy monome të ngjashme me koeficientë të kundërt quhen **monome të kundërt.**

Shembulli 8

Gjeni monomet e kundërt të monomeve:
a) $-4xy^3$, b) $-6a^4b^6$, c) $7{,}5x^2y^3$, ç) $-\frac{2}{3}x^9y^7z$.

a) Monomi i kundërt i monomit $-4xy^3$ është monomi $4xy^3$, b) $6a^4b^6$, c) $-7{,}5x^2y^3$, ç) $\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Detyra 6

Gjeni monomet e kundërt të monomeve: a) $-4xy^3$, b) xy, c) -6, ç) $7{,}5x^2y^3$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Cilat nga shprehjet e mëposhtme janë monome:
   a) 10, b) $2x$, c) $5x+1$, ç) $\frac{x^2}{2}$, d) $\frac{1}{x^3}$, dh) $\frac{x-1}{4}$, e) $-3xy^3z^4xy^2$, ë) $\frac{x^4y^2z}{7x^2y}$?
2. Sillni monomin në trajtë të rregullt:
   a) x^5y^3xy, b) $3ab(-2a^3b)$, c) $-5xy^2x^2y^3(-6xy)$, ç) $ab2abb4a^2$.
3. Kopjoni dhe plotësoni tabelën:

monomi	$3ab$	$-5x^3y^3$	$x^5y^2z^4$	$\frac{x^3y^4}{9}$	$\frac{-x}{8}$	$-xy^5$
koeficienti						
pjesa shkronjore						
shkalla e monomit						

4. Cilët nga çiftet e mëposhtme të monomeve janë të ngjashëm:
a) $3x$ dhe $3x^2$, b) $5x^2y$ dhe $-3x^2y$, c) 1 dhe 5, ç) a^3b dhe ab^3?

5. Shkruaj nga dy monome të ngjashëm me monomin: a) $4x^4$, b) $5xy$, c) 7, ç) a^2b^3.

6. Gjeni monomin e kundërt të monomit: a) $-x^3$, b) $6x^2y^4$, c) $-3{,}7$, ç) $15y^3$.

7. Gjeni shkallën e monomit: a) a^3b, b) $4x^2y^3z$.

. Shkruaj: a) tre monome të ngjashme të shkallës së shtatë, b) dy monome të kundërt të shkallës së pestë.

9. a) Shkruani një shprehje për numrin e stilolapsave të blerë për 4 librari, nëse për secilën janë blerë x kuti me x pako, dhe në secilën pako ka nga y stilolapsa.
b) Sillni shprehjen e fituar në trajtë të rregullt.

10. Bletari ka 3 bletore me nga x zgjoje me bletë. Në secilin zgjua ka nga y korniza, dhe në secilën kornizë nga y^3 bletë.
a) Shkruani një shprehje për numrin total të bletëve që ka bletari.
b) Sillni shprehjen e fituar në trajtë të rregullt.
c) Përcaktoni koeficientin dhe pjesën shkronjore të monomit.

Hulumtim

1. Përkufizuam konstantat dhe ndryshoret në rastin kur kemi një shprehje numerike. Mundohuni t'i përgjigjeni pyetjes: Çfarë do të jenë konstantat dhe çfarë ndryshoret në gjeometri?
VIZATONI një trekëndësh ABC, një drejtëz a dhe një pikë M. Format që vizatuat janë konstante. Për shembull, pika M është konstante, sepse ajo është saktësisht e përcaktuar në rrafsh. SHKRUANI: trekëndëshi XYZ, drejtëza c, pika S. Këto forma, të pa paraqitura në rrafsh, a janë ndryshore? Pse?

2. a) Me çfarë shprehjeje llogarisim perimetrin e një trekëndëshi barabrinjës? A është ajo shprehje monom? Cili është koeficienti dhe cila është pjesa shkronjore e monomit?
b) Jepni shembuj të monomeve që përdorim në matje dhe gjeometri që kanë shkallë më të lartë se ai i dhënë në shembull. Çfarë njehsojmë me ta?

2. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E MONOMEVE

Mbledhja e monomeve

Aktivitet

Nxënësit bëjnë një eksperiment me rritjen e bimëve. Rritja e një bime në javën e parë përshkruhet me shprehjen $3x$, ndërsa në javën e dytë me shprehjen $5x$.
Shkruani shprehjen që tregon se sa u rrit bima gjatë dy javëve.

Të rikujtojmë se monomet e ngjashme në një shumë algjebrike reduktohen duke mbledhur koeficientët e tyre, ndërsa ndryshoret mbeten të njëjta. Kështu, për shembull, kemi se

$$7x + 5x = (7 + 5)x = 12x.$$

Shuma e dy monomeve të ngjashme është një monom, koeficienti i të cilit është i barabartë me shumën e koeficientëve të mbledhësve, ndërsa pjesa shkronjore është e barabartë me pjesën shkronjore të mbledhësve.

Shembulli 1

Gjeni shumën e monomeve të ngjashme: a) $5y^3$ dhe y^3, b) $2x^4y$ dhe $-2x^4y$,

a) $5y^3 + y^3 = (5 + 1)y^3 = 6y^3$ b) $2x^4y + (-2x^4y) = (2 + (-2))x^4y = 0 \cdot x^4y = 0$

Vëreni se shuma e dy monomeve të kundërt është zero.

Për mbledhjen e monomeve të ngjashëm vlejnë ligjet komutative dhe asociative. Prandaj mund të mbledhim monome në renditje të çfardoshme dhe t'i grupojmë monomet në mënyrë të çfardoshme. Kjo, gjithashtu, do të thotë se mund të flasim edhe për shumën e monomeve të ngjashme.

Shembulli 2

Njehsoni shumën e monomeve të ngjashme: a) $3x^3yz^4$, x^3yz^4 dhe $7x^3yz^4$, b) $\frac{1}{2}ab$, $2\frac{1}{2}ab$ dhe $7ab$.

a) $3x^3yz^4 + x^3yz^4 + 7x^3yz^4 = (3 + 1 + 7)x^3yz^4 = 11x^3yz^4$,

b) $\frac{1}{2}ab + 2\frac{1}{2}ab + 7ab = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 7\right)ab = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{14}{2}\right)ab = 10ab$.

Detyra 1

Gjeni shumën e monomeve të ngjashme:

a) $2x^3$ dhe $3x^3$, b) $3x^2y$ dhe $-5x^2y$, c) $-xy^3z^4$, $7xy^3z^4$, dhe $0{,}5\,xy^3z^4$.

Shembulli 3

Çmimi i një lapsi është x^2 denarë, ndërsa çmimi i një gome është dy herë më i madh.

Marina bleu 5 lapsa dhe një gomë.

a) Shkruani një shprehje me të cilën do të paraqitni çmimin total të gomës dhe lapsave.

b) Reduktoni shprehjen e fituar.

a) Çmimi i 5 lapsave është $5x^2$, ndërsa i gomës është $2x^2$, pra shprehja për çmimin total është $5x^2 + 2x^2$.

b) Shprehja e fituar është shumë e dy monomeve të ngjashme, pra kemi $5x^2 + 2x^2 = (5 + 2)x^2 = 7x^2$.

Shembulli 4

Gjeni shumën e monomeve $5x^2$ dhe $3y$.

Monomet $5x^2$ dhe $3y$ nuk janë të ngjashëm, prandaj shumën e tyre do ta shkruajmë si shumë algjebrike $5x^2 + 3y$.

Shembulli 5

Gjeni shumën e monomeve:

a) $5a^2b$, $-3ab^2$, $-a^2b^2$, $4ab$, $6a$ dhe $2b$, b) $3a^2$, $5a^2b$, $-a^2b$, b, $-3b$ dhe 4.

a) Shumën e monomeve të dhënë e shkruajmë si shumën algjebrike

$5a^2b + (-3ab^2) + (-a^2b^2) + 4ab + 6a + 2b =$

$= 5a^2b - 3ab^2 - a^2b^2 + 4ab + 6a + 2b.$

b) $3a^2 + 5a^2b + (-a^2b) + b + (-3b) + 4 =$ Shumën e kërkuar e shkruajmë si shumë algjebrike.

$= 3a^2 + \underline{5a^2b} - \underline{a^2b} + \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{3b}} + 4 =$ I mbledhim monomet e ngjashme.

$= 3a^2 + 4a^2b - 2b + 4$

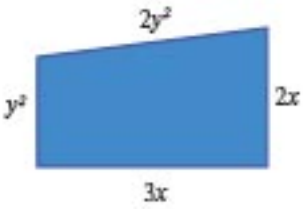
Detyra 2

Gjeni shumën e monomeve:

a) a^2 dhe $-3a$, b) $2a^2b, ab^2, b, -a^2b$ dhe $-6ab^2$, c) $4x^3y^2, 5x^2y, xy, -5x^2y$ dhe $4x^3y^2$.

Detyra 3

Gjeni perimetrin e trapezit në vizatimin 1.



Vizatimi 1

Zbritja e monomeve

Aktivitet

Lartësia e Anës jepet me shprehjen $3x$, ndërsa e babait të saj me shprehjen $5x$. Shkruani një shprehje që tregon se për sa babai është më i gjatë se Ana.

Shembulli 6

Gjeni ndryshimin e monomit $5a^2$ me monomin a^2.

Vërejmë se monomet e dhënë janë të ngjashëm. Duke zbatuar ligjin shpërndarës (distributiv), fitojmë

$5a^2 - a^2 = (5 - 1)\,a^2 = 4a^2$.

Ndryshimi i një monomi me një monom të ngjashëm me të është një monom, koeficienti i të cilit është i barabartë me ndryshimin e koeficientit të të zbritshmit me koeficientin e zbritësit, ndërsa pjesa shkronjore është e barabartë me pjesën shkronjore të të zbritshmit (zbritësit).

Nga kjo, ndryshimi i dy monomeve të ngjashme është një monom i ngjashëm me ta.

Shembulli 7

Gjeni ndryshimin: a) $-6x^3 - 2x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y)$.

a) $-6x^3 - 2x^3 = (-6 - 2)x^3 = -8x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y) = (2-(-5))x^2y = 7x^2y$.

Detyra 4

Gjeni ndryshimin e: a) monomit $-5x^2$ me monomin $-5x^2$, b) monomit $2xy$ *me monomin* $-2xy$.

Shembulli 8

Gjeni ndryshimin e monomit $2x^3y$ me monomin $5x^2$.

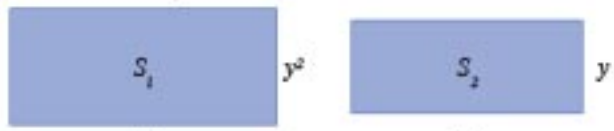
Monomet e dhëna nuk janë të ngjashëm. Ndryshimi i kërkuar është shuma algjebrike $2x^3y + (-5x^2) = 2x^3y - 5x^2$.

Detyra 5

Gjeni ndryshimin e: a) monomit $-4a^2b$ me monomin $5ab$, b) monomit $2x^2y$ me monomin $-2x^2y$.

Shembulli 9

Gjeni ndryshimin e syprinave të drejtkëndëshave në vizatimin 2:



Vizatimi 2

Syprinat e drejtkëndëshave të dhënë janë $P_1 = 5xy^2$ dhe $P_2 = 2xyy = 2xy^2$. Ndryshimi i tyre do të jetë $P_1 - P_2 = 5xy^2 - 2xy^2 = (5 - 2)xy^2 = 3xy^2$.

Shembulli 10

Në shkollë organizohet një aksion për mbjelljen e pemëve. Nxënësit e klasës së tetë mbjellin fidanë në rreshta të ndryshëm. Ana mbolli $3x$ fidanë në rreshtin e parë, dhe edhe $5x$ fidanë të tjerë në rreshtin e dytë. Bojani mbolli $9x$ fidanë në rreshtin e tretë, por për shkak të hapësirës së vogël, ai duhej të heqë $2x$ fidanë.

a) Sa fidanë gjithsej mbolli Ana?

b) Sa fidanë i mbetën Bojanit pas heqjes së fidanëve?

c) Kush mbolli më shumë fidanë në fund, dhe për sa?

a) Ana mbolli $3x + 5x = 8x$ fidanë.

b) Bojani mbolli $9x$ fidanë, por hoqi $2x$, prandaj Bojani mbolli $9x - 2x = 7x$ fidanë.

c) Ndryshimi në numrin e fidanëve të mbjellë midis tyre është $8x - 7x = x$. Ana mbolli x fidanë më shumë se Bojani.

Detyra 6

Ditën e parë, Jana mbolli $2x^2$ zambakë, ditën e dytë mbolli 5 zambakë më shumë, dhe ditën e tretë x^2 më shumë se ditën e dytë.
a) Shkruani një shprehje me të cilën do të paraqitni numrin total të zambakëve që mbolli Jana.
b) Thjeshtësoni shprehjen e fituar nën a).

DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni shumën e monomeve:
   a) y^2 dhe $3y^2$, b) $-x^2y$ dhe $4x^2y$, c) $-5x^3$ dhe $-5z^3$, ç) $3abc$ dhe $4a^2b^2c^2$.
2. Përcaktoni shumën e monomeve:
   a) $6xy^2$, xy^2 dhe $3xy^2$, b) $5xy$, $-xy$, $-2xy$ dhe $4xy$, c) $-3x^2$, $-2x^2$, x^2 dhe $-x^2$, ç) b^3, $2b^3$, $3b^3$ dhe $4b^3$.
3. Nga monomi $-2x^3$ zbritni monomin: a) $5x^3$, b) x^3, c) $-2x^3$, ç) $-3x^3$.
4. Nga monomi $5x^2y^3$ zbritni monomin: a) $3x^2y^3$, b) $7x^2y^3$, c) $-4x^2y^3$, ç) $-x^2y^3$.
5. Nga shuma e monomeve $-4a^2b$ dhe $-3a^2b$ zbritni monomin $-5a^2b$.
6. Nga shuma e monomeve $-3xy^2$ dhe $2xy^2$ zbritni ndryshimin e tyre.
7. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $8a^2 + 3a^2 + 4a^2 + 3$, b) $2x^2 - y^3 - 4x^2 + 3y^3 - 1$,
   c) $a - 4b^2 + 2a - b^2 + 1$, ç) $4x^2 + 2y^2 - 3x^2 + y^2 - x^2 - 2$.
8. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x^2$, b) $\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$, c) $\frac{2}{3}x+5-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$.
9. Ditën e parë, Oleg vrapoi $2x^3$ metra, ditën e dytë x^3 metra më shumë, ditën e tretë $2x$ metra më shumë se ditën e dytë, dhe ditën e katërt $2x$ metra më shumë se ditën e parë.
   a) Shkruani një shprehje me të cilën do të paraqitni numrin total të metrave që vrapoi Oleg gjatë katër ditëve.
   b) Thjeshtësoni shprehjen e fituar nën a).

3. POLINOMI. SHKALLA E POLINOMIT

Polinomi. Polinomi në trajtë të rregullt

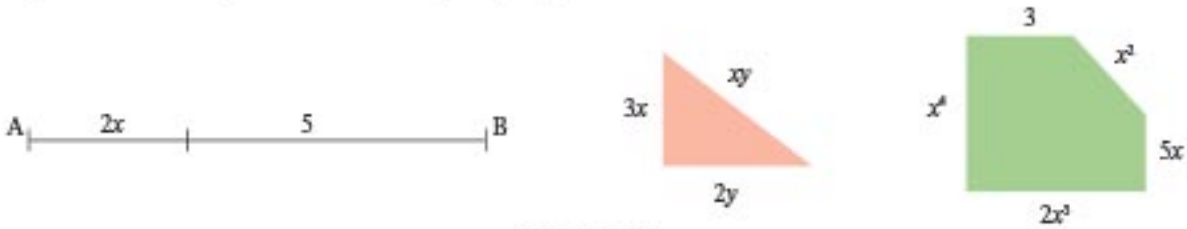
Aktivitet

Nga sa monome është formuar shprehja: a) $7a^2b + 4ab^2$, b) $4x^5 - 2x^3y + y^4$?

Shembulli 1

Sipas të dhënave në vizatimin 1, shkruani një shprehje për:
a) gjatësinë e segmentit AB, b) perimetrin e trekëndëshit,
c) perimetrin e pesëkëndëshit.

Nga sa monome përbëhet secila nga shprehjet e fituara?



Vizatimi 1

a) Gjatësinë e segmentit AB e shkruajmë me shprehjen $2x + 5$.
b) Shprehja për perimetrin e trekëndëshit është shuma algjebrike $3x + 2y + xy$.
c) Perimetrin e pesëkëndëshit e shkruajmë me shprehjen $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Shprehja $2x + 5$ është shumë algjebrike e dy monomeve, shprehja $3x + 2y + xy$ e tre monomeve, ndërsa shprehja $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ është shumë algjebrike e pesë monomeve.

- Shprehja e cila paraqet shumë algjebrike të një numri të fundëm monomesh quhet **polinom**.
- Monomet nga të cilët përbëhet polinomi quhen **kufiza (anëtarë) të polinomit**.

Polinome janë, për shembull, shprehjet: $x^2 - xy + 1$, $2a + 3$, $y^3 - 2y^2 + y + 4$ dhe $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Kufizat e polinomit $a^7 - 2a^3 + a - 5$ janë monomet: a^7, $-2a^3$, a dhe -5.

Shembulli 2

Cilat nga shprehjet $3x^6 - x + 5$, $\frac{3}{5b}$, $a + 1$, $\frac{x+2}{y}$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$, $\frac{1}{x} + 3$, $8a^2b$ janë polinome?

Polinome janë shprehjet: $3x^6 - x + 5$, $a + 1$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$ dhe $8a^2b$.
Shprehjet $\frac{3}{5b}$, $\frac{x+2}{y}$ dhe $\frac{1}{x} + 3$, nuk janë polinome sepse përmbajnë pjesëtim me ndryshore.

Aktivitet

Sillni në trajtë të rregullt dhe gjeni koeficientin e monomit:
a) $5x^2y^3xy^2$, b) $-3a^3ab^24aab^2$.

Shembulli 3

Sillni në trajtë të rregullt polinomin $2x^3 + 3xx^2 - 4$.

Së pari duhet të verifikojmë nëse secili monom në polinomin e dhënë është në trajtë të rregullt.
Monomi $3xx^2$ nuk është në trajtë të rregullt.
Shkruajmë $2x^3 + 3xx^2 - 4 = 2x^3 + 3x^3 - 4$.
Polinomi i fituar përmban monome të ngjashme, të cilët mund t'i mbledhim, pra kemi:

$$2x^3 + 3x^3 - 4 = 5x^3 - 4$$

Fituam polinom i cili nuk mund të thjeshtësohet më tej, pra polinomi i reduktuar në trajtë të rregullt është binomi $5x^3 - 4$.

- **Polinomi është në trajtë të rregullt** nëse nuk përmban kufiza të ngjashme dhe të gjitha kufizat e tij janë në trajtë të rregullt.
- Koeficientët e monomeve nga të cilët përbëhet polinomi në trajtë të rregullt quhen **koeficientë të polinomit.**

Polinomi $5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ është në trajtë të rregullt. Koeficientët e tij janë: 5, 6, − 2 dhe 4 .

Detyra 1

Cilët nga polinomet e mëposhtëm janë në trajtë të rregullt:
a) $x^3 - (xy)^2 + 4$, b) $2xx^2 - 3x + x + 5$, c) $5xy + 6x + 1$, ç) $3a + 4b + 5$?

Shembulli 4

Sillni në trajtë të rregullt polinomin:
a) $4xy + 5x - xy + x + 1$, b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$.
c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

a) $4\underline{xy} + 5\underline{x} - \underline{xy} + \underline{x} + 1$ — I nënvizojmë monomet e ngjashme
$= (4 - 1)xy + (5 + 1)x + 1 =$ — I mbledhim monomet e ngjashme.
$= 3xy + 6x + 1$

b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$
$= ab - \underline{b} + \underline{2a} + \underline{3b} + a + 4$
$= ab + 2b + 3a + 4$

c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$
$= \underline{\underline{3x^3}} - \underline{7x} + \underline{6x} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{\underline{x^3}} + \underline{x} + \underline{\underline{3x^2}}$
$= 4x^3 + 4x^2$

Detyra 2

Sillni në trajtë të rregullt polinomin:
a) $5xy + 6x - 3xy + 1$, b) $2a + 5b - 3 - b + 3a + 6b + 4$, c) $x^3 - (3x)^2 + x - 8$,
ç) $3xx^3 - 2x + 7x + x^2y^2 + 1$, d) $xy + 3xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y^2$.

Aktivitet

Sa kufiza ka polinomi: a) $xy^3 + 2xy$, b) $3b + 4$, c) $x^3 + 2x + 1$?

Polinomi me dy kufiza quhet **binom**.

Në përputhje me përkufizimin, çdo monom është polinom. Meqenëse çdo konstante është monom, mund të konkludojmë se edhe konstantat janë polinome.
Pasi një polinom të dhënë ta sjellim në trajtë të rregullt, sipas numrit të kufizave, dallojmë kur polinomi është monom, binom ose polinom me më shumë kufiza.

Shembulli 5

Cilët nga polinomet $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$, $-4x^3+7$ dhe $7x^2y$ janë:
a) monome, b) binome?

Polinomet $-4x^3 + 7$ dhe $7x^2y$ janë në trajtë të rregullt.
Le t'i shkruajmë edhe polinomet $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$ në trajtë të rregullt:

$5xx^2 - 3x + x = 5x^3 - 3x + x = 5x^3 - 2x$, $\quad \frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 0 \cdot x = 0$,

$5a^2b^2 + 2a^2b^2 = 7a^2b^2$, $\quad 2x - 5x + 4x = x$

a) Monome janë polinomet 0, x, $7a^2b^2$ dhe $7x^2y$.
b) Binome janë polinomet $5x^3 - 2x$ dhe $-4x^3 + 7$.

Detyra 3

Cilët nga polinomet $-6xy + 5xy$, $2xx + 5$, $x^4 + 2xx^3 + x^2 + 5xx$ dhe $x^2 + 3x^2$, ce:
a) monome, b) binome?

Shkalla e polinomit

Ashtu si te monomet, edhe te polinomet mund të përkufizojmë shkallën e polinomit.

Shembulli 6

Gjeni shkallën e polinomit: a) $5x^2y + 6xy + 1$, b) $3xy^2 + 2xy^2 - (3xy) + 2xyx^2y^2$.

Për të gjetur shkallën e polinomit, polinomi duhet të jetë reduktuar në trajtë të rregullt.
a) Në këtë rast, polinomi është në trajtë të rregullt.
Monomi $5x^2y$ është i shkallës $1 + 2 = 3$. Ai paraqet shkallën më të lartë midis shkallëve të monomeve në polinom, prandaj shkalla e polinomit $5x^2y + 6xy + 1$ e 3.
b) Së pari do ta sjellim polinomin në trajtë të rregullt:
$3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2xyx^2y^2 = 3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2x^3y^3 = 5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$.
Midis tre monomeve në polinom, monomi $2x^3y^3$ ka shkallën më të lartë $3 + 3 = 6$.
Përfundojmë se shkalla e polinomit $5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$ është 6.

Shkalla e polinomit në trajtë të rregullt quhet shkalla më e lartë ndërmjet shkallëve të monomeve nga të cilët përbëhet polinomi.

Detyra 4

Gjeni shkallën e polinomit:

a) $2xy + x + 3$, b) $a + 5b + 4$, c) $x^3 - x^2 + 5x - 8$,

ç) $xx^2 - x^3 + 7x + xy$, d) $xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y$, dh) $2x^2y^3 + xy^2z - 3xy^2z + xxyy^2$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Cilët nga shprehjet e mëposhtme $2x^3 - 8$, $3x + 7x + 1$, $4xy^2 - xy + x^2y - xy$, $2y^2 - yy$, $ab - 3a + 4b + 5ab$, $9x + x$, $2(xy)^2 + 3x^2y^2$ janë: a) monome, b) binome?

2. Duke përdorur monomet $\frac{5}{6}a^2$, $\frac{2}{5}a$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{9}a^3$ dhe $-\frac{3}{4}a$ shkruani nga tre:

   a) binome të shkallës së tretë, b) polinome të shkallës së dytë, c) polinome të shkallës së tretë.

3. Gjeni shkallën e polinomit:

   a) $x + 5$, b) $ab + 1$, c) $x^3 + x - 1$, ç) $xy^3 + x + xy$, d) $x^5y - y^5 + x^2y^2$,

   dh) $ab - 3a^2b + aab + 4ab$, e) $2x^2 + y^3 + xy^2z - 3$, ë) 23.

4. Shkruani polinom të shkallës: a) 7, b) 2, c) 1.

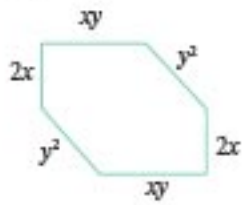
5. Sillni në trajtë të rregullt polinomin:

   a) $a + 5b - 7 - a + 2a + 6b + 4$, b) $xy + 5x - 4xy + 2$, c) $2x^3 - 3x^2 + xxx - x^2$,

   ç) $3x^3 - 2x + 7x^2 + x^3 + 5x + 2x^2 + 1$, d) $xyx + 3xy^2 + 4xxy - 3xyy + 2xy$.

6. Shkruani një shprehje për perimetrin e formës dhe sillni atë në trajtë të rregullt (vizatimi 2):

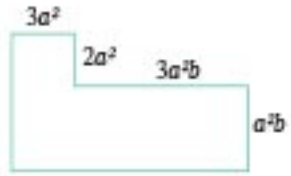
a)



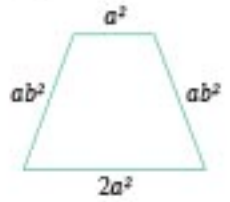
b)



c)



ç)

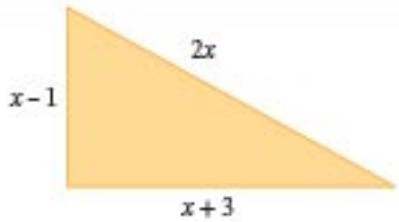


Vizatimi 2

4. MBLEDHJA DHE ZBRITJA E POLINOMEVE

Aktivitet

Shkruani një shprehje për perimetrin e trekëndëshit në vizatimin 1 dhe thjeshtësojeni.



Vizatimi 1

Shembulli 1

Gjeni shumën e:

a) monomit $2x^2$ dhe polinomit $2x^3 + 3x^2 + x + 4$, b) polinomeve $3x^2 + x^2y + x + 4$ dhe $5x^2y + 3xy + 2$.

a) $2x^2 + (2x^3 + 3x^2 + x + 4)$ — Lirohemi nga kllapat.

$= 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4$ — I reduktojmë monomet e ngjashme.

$= 2x^3 + 5x^2 + x + 4$ — I radhisim kufizat e polinomit sipas shkallës.

b) $(3x^2 + x^2y + x + 4) + (5x^2y + 3xy + 2)$

$= 3x^2 + x^2y + x + 4 + 5x^2y + 3xy + 2$

$= 3x^2 + \underline{x^2y} + x + \underline{\underline{4}} + \underline{5x^2y} + 3xy + \underline{\underline{2}}$

$= 3x^2 + 6x^2y + x + 3xy + 6$

Polinomet (ose monomi me polinomin) mblidhen ashtu që njërit polinom (ose monomit) i shtohen njëri pas tjetrit kufizat e polinomit tjetër. Më pas, në polinomin e fituar, reduktohen monomet e ngjashme.

Detyra 1

Gjeni shumën e polinomeve:

a) $4x^2 - 5x + 3$ dhe $5x^2 - x + 1$,

b) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ dhe $x^3 - 3x^2 + x$,

c) $4x^2 + 5x^2y + y + 2$ dhe $5x^2y + 3y + 5$,

ç) $x^2y + 2x^3y + xy + 4x$ dhe $5x^2y + 3x - 2xy$.

Detyra 2

Njëra arë jep (x^2+2xy) kg grurë, ndërsa tjetra $(3x^2-xy+4y)$ kg.

a) Ndërtoni një shprehje që paraqet korrjen totale.

b) Sillni polinomin e fituar në trajtë të rregullt.

Shembulli 2

Nga polinomi $x^3 - 3x^2 + 1$ zbritni monomin $2x^2$.

$(x^3 - 3x^2 + 1) - 2x^2$	Lirohemi nga kllapat.
$= x^3 - 3x^2 + 1 - 2x^2$	I reduktojmë monomet e ngjashme.
$= x^3 - 5x^2 + 1$	I radhisim kufizat e polinomit.

Shembulli 3

Nga polinomi $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ zbritni polinomin $x^3 - 3x^2 + 3x$.

$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x)$	Lirohemi nga kllapat. Shenja minus (–) përpara
$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$	kllapës i ndryshon shenjat e kufizave në polinom
$= \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 1 - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x}$	në të kundërta. I reduktojmë monomet e ngjashme.
$= x^3 + 4x^2 - x + 1$	I radhisim kufizat e polinomit.

Polinomet zbriten duke i shtuar polinomit – të zbritshmit njëri pas tjetrit kufizat e polinomit – zbritësit me shenja të kundërta. Më pas, në polinomin e fituar, reduktohen monomet e ngjashme.

Nga shembujt e zgjidhur mund të vëreni se polinomet e dhënë shkruhen në kllapa, e më pas lirohemi prej kllapave. Në bazë të rregullave për mbledhjen dhe zbritjen e polinomeve, mund të nxirren rregullat e mëposhtme për lirimin nga kllapat:

- Nëse **para kllapës qëndron shenja plus (+)**, atëherë kllapat mund të hiqen, dhe shenjat e kufizave në kllapa mbeten të pandryshuara.
- Nëse **para kllapës qëndron shenja minus (–)**, atëherë kllapat dhe shenja minus mund të hiqen, ndërsa shenjat e kufizave në kllapa ndryshohen në të kundërta.

Detyra 3

Nga polinomi $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ zbritni:
a) monomin $5x^3$, b) binomin $-3x^2 + 2$, c) polinomin $2x^3 + x^2 + x + 1$.

Detyra 4

Njehsoni ndryshimet:
a) $(3x^2 + 2xy - 8y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$, b) $(6x^2 - 5xy + 4y^2) - (2x^2 - 3y^2)$.

Shembulli 4

Në kabinetin e biologjisë, nxënësit hulumtojnë rritjen e dy llojeve të ndryshme të bimëve në varësi të sasisë së plehut që marrin. Rritja e bimës së parë përshkruhet me polinomin $2x^2 + 3x + 4$, kurse e bimës së dytë me polinomin $x^2 + 5x + 2$.

Pas disa ditësh, hulumtuesit shtojnë një sasi shtesë të plehut, e cila e nxit rritjen e secilës bimë për $2x$ njësi.

a) Sa do të jetë rritja e re e secilës bimë pas shtimit të plehut?

b) Sa do të jetë rritja totale e të dy bimëve së bashku pas shtimit të plehut?

c) Për sa është më e madhe rritja e bimës së parë nga rritja e bimës së dytë pas shtimit të plehut?

a) Rritja e re e bimës së parë do të jetë

$(2x^2+3x+4)+2x=2x^2+\underline{3x}+4+\underline{2x}=2x^2+\ 5x+4.$

Rritja e re e bimës së dytë do të jetë

$(x^2+5x+2)+2x=x^2+\underline{5x}+2+\underline{2x}=x^2+7x+2\,.$

b) Rritja totale fitohet duke mbledhur të dy polinomet:

$(2x^2+5x+4)+(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{4}}+\underline{x^2}+\underline{\underline{7x}}+\underline{\underline{2}}=3x^2+12x+6.$

c) Për të bërë krahasimin e rritjes, zbriten polinomet:

$(2x^2+5x+4)-(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{4}}-\underline{x^2}-\underline{\underline{7x}}-\underline{\underline{2}}=x^2-2x+2\,.$

Bima e parë ka rritje për $x^2 - 2x + 2$ më të madhe se bima e dytë.

Detyra 5

Nxënësit përgatisin shtretër lulesh në oborrin e shkollës. Shtratin e parë e rregullon grupi i Marias, ndërsa të dytin grupi i Petarit.

Numri i luleve të mbjella në shtratin e parë jepet me polinomin $2x^2 + 3x + 5$, ndërsa numri i luleve të mbjella në shtratin e dytë me polinomin $x^2 + 4x + 2$ (x është gjatësia e shtratit).

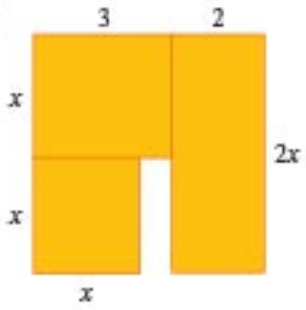
a) Sa lule mbollën të dy grupet së bashku? b) Sa lule më shumë ka shtrati i parë?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Mblidhni polinomet:
   a) $-2x^2 + 3x - 5$ dhe $3x^2 + 4x + 2$, b) $7x^3 + 2x + 6$ dhe $3x^3 + 5x^2 - 5$, c) $x^2 + x - 1$ dhe $3x^3 + 2x^2 - 3$.
2. Gjeni shumën $(x^4 + 4x^3y - 5xy - 2x + 7) + (2y^3 - 4x^3y + 3xy + y - 6)$.
3. Përcaktoni ndryshimin $(2x^2 + 3xy - 5y - 2x + 4) - (2y^3 - 4xy + 2y - 3)$.
4. Mblidhni polinomin $9x^3 + 10x^2 - 5x + 7$ me ndryshimin e binomeve $x + 2$ dhe $x^3 + 9$.
5. Njehsoni polinomin P:
   a) $5a^2 + 2a - 3 + P = 9 - 6a + 2a^2$, b) $5b^2 + b + 15 - P = 15 + 3b + 7b^2$.

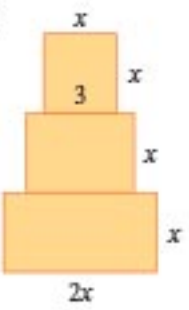
6. Shkruani një polinom në trajtë të rregullt me të cilin do të shprehni syprinën e formës në vizatimin 2 dhe vizatimin 3.

a)



Vizatimi 2

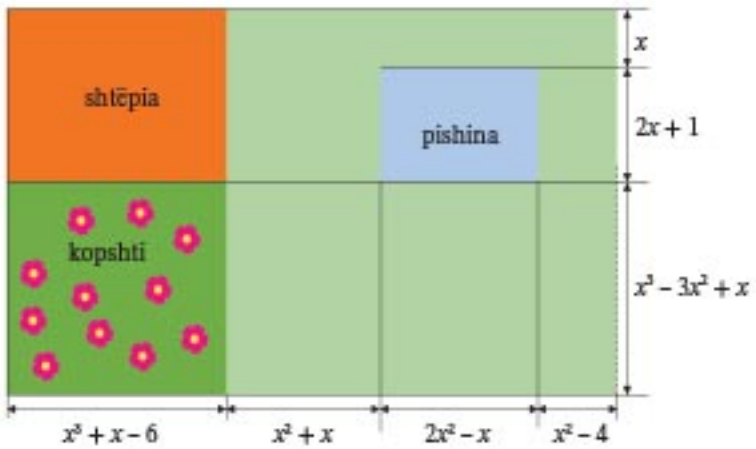
b)



Vizatimi 3

7. Gjatë një gare automobilistike, pas x sekondash, makina e parë ka përshkuar $20x^2 + x + 50$ metra, e dytar $15x^2 + x + 30$ metra, ndërsa e treta $10x^2 + x + 20$ metra.
Sa metra është distanca ndërmjet:
a) makinës së parë dhe të dytë, b) makinës së dytë dhe të tretë,
c) nmakinës së parë dhe të tretë?

8. Në vizatimin 4 është paraqitur një oborr me shtëpi, kopsht dhe pishinë. Shkruani një polinom në trajtë të rregullt me të cilin do të shprehni perimetrin e: a) pishinës, b) shtëpisë, c) gjithë oborrit.



Vizatimi 4

Hulumtim

Janë dhënë polinomet $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2 - 4$ dhe $C = -2x^3 + 4$.
a) Gjeni shkallën e polinomeve A, B, C, $A + B$, $A + C$. Çfarë vëreni?
b) Sipas shembullit, cila është lidhja midis shkallëve të polinomeve – mbledhësa dhe shkallës së polinomit – shumë?
c) Nxirrni një përfundim të përgjithshëm për lidhjen midis shkallëve të polinomeve – mbledhësa dhe shkallës së polinomit – shumë.

5. SHUMËZIMI I POLINOMEVE

Shumëzimi i monomeve

Aktivitet

1. Shumëzoni fuqitë $x^3 \cdot x \cdot x^2$.
2. Marko punon në laborator. Ai duhet të përgatisë një pako me shishe me tretësirë kimike. Secila shishe duhet të ketë të njëjtën sasi që llogaritet përmes shprehjes $2x^2y$.
   Sa është sasia totale e tretësirës që duhet të përgatisë Marko, nëse paketa përmban:
   a) 16 shishe, b) x shishe?

Shembulli 1

Gjeni prodhimin e monomeve $-4x^2y^3$ dhe $5x^3yz$

Duke zbatuar vetitë ndërruese (komutative) dhe shoqëruese (asociative) të shumëzimit, fitojmë:
$-4x^2y^3 \cdot 5x^3yz = (-4 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) \cdot z = -20x^5y^4z$
Monomi $-20x^5y^4z$ është prodhimi i monomeve $-4x^2y^3$ dhe $5x^3yz$.

Prodhimi i dy monomeve është monom, koeficienti i të cilit është i barabartë me prodhimin e koeficientëve të shumëzuesve, ndërsa pjesa shkronjore është e barabartë me prodhimin e pjesëve shkronjore të shumëzuesve.

Për shumëzimin e monomeve vlenë ligji komutativ dhe ai asociativ. Prandaj mund të flasim për prodhimin e disa monomeve të ngjashëm.

Shembulli 2

Njehsoni prodhimin e monomeve: a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4$, b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c$, c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2$.

a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot a^2 \cdot a^4 = \frac{2}{3}a^6$,
b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c = -1 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c = -5a^3b^4c^2$,
c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2 = 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^2 = -10x^4y^2z^3$.

Detyra 1

Njehsoni prodhimin e monomeve:
a) $3x^2 \cdot 4x^4$, b) $-2a^3b \cdot (-ab^2c)$, c) $6x^2y \cdot (-4xyz) \cdot \frac{1}{3}y^2z$.

Shembulli 3

Një fizikant njehson energjinë që prodhon një makinë. Energjia varet nga forca dhe distanca, të cilat jepen me shprehjet algjebrike: $F=\frac{3}{2}x^2y^3$ dhe $s=\frac{4}{3}x^3y$.
Sa është energjia totale E që prodhon makina, nëse vlen formula $E = F \cdot s$?

Sipas formulës për energjinë totale E që prodhon makina, kemi
$E = F \cdot s = \frac{3}{2}x^2y^3 \cdot \frac{4}{3}x^3y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^2y^3 \cdot x^3y = 2x^5y^4$.
Pra, makina prodhon energji të shprehur me monomin $2x^5y^4$.

Detyra 2

Mirsadi voziti $3xy$ orë me të njëjtën shpejtësi $12x^2y$ kilometra në orë. Gjeni rrugën që përshkoi, nëse për shpejtësinë v, kohën t dhe rrugën s vlen formula $s = v \cdot t$.

Shumëzimi i polinomit me monom

Aktivitet

Me ndihmën e vetisë shpërndarëse (distributive) të shumëzimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen, thjeshtësoni shprehjet: a) $2 \cdot (3x + 4)$, b) $(3x + 4) \cdot 2$.

Shembulli 4

Kryeni shumëzimin:
a) $-3x \cdot (2x + 1)$, b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2)$, c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$, ç) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2$.

a) $-3x \cdot (2x + 1)$ — Shumëzojmë monomin me secilën kufizë të polinomit.
$= -3x \cdot 2x + (-3x) \cdot 1$ — Prodhimi e fituara i mbledhim.
$= -6x^2 - 3x$, — E sjellim polinomin në trajtë të rregullt.

b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2) = 2a \cdot (-a^2) + b \cdot (-a^2) - 1 \cdot (-a^2) = -2a^3 - a^2b + a^2$,

c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3) = 4x^3 \cdot x^2 + 4x^3 \cdot 2x + 4x^3 \cdot 3 = 4x^5 + 8x^4 + 12x^3$,

ç) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2 = 5x \cdot x^3y^2 - 3y^3 \cdot x^3y^2 = 5x^4y^2 - 3x^3y^5$.

Polinomi shumëzohet me monom duke shumëzuar secilën kufizë të polinomit me monomin dhe duke i mbledhur prodhimet e fituara.

Detyra 3

Kryeni shumëzimin:
a) $(3x + 2y) \cdot 5$, b) $3a \cdot (a + 1)$, c) $(2x^2 + x - 4) \cdot 3x$, ç) $x^2y \cdot (xy + 2x - 4y^2)$.

Shembulli 5

Në një fabrikë tekstili, gjatësia e pëlhurës që prodhon makina në kushte normale llogaritet me shprehjen $x^3 + 2x^2 - x$. Kur temperatura në dhomë rritet, makina prodhon $\frac{3}{2}x^2$ herë më shumë pëlhurë. Sa është gjatësia totale e pëlhurës që do të prodhojë makina në temperaturë të ngritur?

Gjatësia totale e pëlhurës fitohet duke shumëzuar polinomin dhe monomin:

$$(x^3 + 2x^2 - x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = x^3 \cdot \frac{3}{2}x^2 + 2x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + (-x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3.$$

Në temperaturë të ngritur, makina do të prodhojë gjatësi totale $\frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3$.

Detyra 4

Kopshtari dëshiron të mbjellë lloje të ndryshme bimësh në kopshtin e shkollës. Një pemë kushton $4x^2y + 3xy^2 - 5$ denarë, një shkurre kushton $2x^2y - xy^2 + 4$ denarë, dhe një lule kushton $5xy^2 - 3x^2y + 2$ denarë. Kopshtari bleu 3 pemë, 4 shkurre dhe 5 lule.

a) Shkruani shprehjen për çmimin total të secilit lloj bime.

b) Shkruani shprehjen për çmimin total të të gjitha bimëve.

c) Shkruani polinomin nën b) në trajtë të rregullt.

ç) Përcaktoni shkallën e secilit monom dhe shkallën e polinomit.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni prodhimin e monomeve:

   a) $5x^3 \cdot 2x^4$, b) $-\frac{1}{4}a^2b \cdot (-2a^3b^2)$, c) $9xy^2 \cdot (-2x^3yz^2) \cdot \frac{1}{6}yz$.

2. Kryeni shumëzimin:

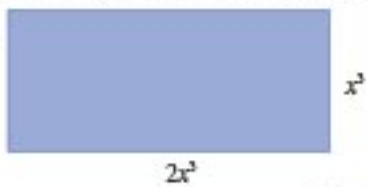
   a) $4 \cdot (5x - y)$, b) $-7 \cdot (2x - 3y)$, c) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \cdot 2x$, ç) $-xy^2 \cdot (5x^2 + 2xy - 4y^2)$.

3. Shumën e monomeve $-3a^2b^3$ dhe $2a^2b^3$ shumëzojeni me monomin $-4ab$.

4. Ndryshimin e monomeve $-xy^2$ dhe $3xy^2$ shumëzojeni me shumën e tyre.

5. Shkruani një monom në trajtë të rregullt që shpreh syprinën e drejtkëndëshit (vizatimi 1):

   a)



   b)



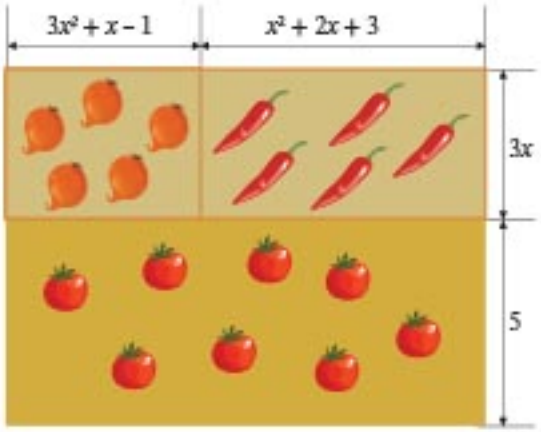
   Vizatimi 1

6. Mia ka $4(x^2 + x + 1)$ libra. Lina ka $5(2x^2 + 3)$ libra. Sa libra kanë Mia dhe Lina së bashku?

7. Igori, Sara dhe Nina mbledhin pulla postare. Igori ka $4x(x - 4)$ pulla postare. Sara ka $2x(8 - x)$ pulla postare, ndërsa Nina ka $8(7 + 2x)$ pulla postare.
   Sa pulla postare kanë fëmijët së bashku?

8. Gjyshja Mara në kopshtin e saj mbolli domate, speca dhe qepë. Sipas shprehjeve për dimensionet në vizatimin 2, shkruani një polinom në trajtë të rregullt me të cilin do të shprehni syprinën e

a) pjesës së mbjellë me qepë,
b) pjesës së mbjellë me domate,
c) pjesës së mbjellë me speca,
ç) gjithë kopshtit.



Vizatimi 2

Hulumtim

Janë dhënë polinomet $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2$ dhe $C = -2x^3 + 4$.

a) Gjeni shkallën e polinomeve A, B, C, $A \cdot B$ dhe $B \cdot C$. Çfarë vëreni?

b) Sipas shembullit, cila është lidhja midis shkallëve të polinomëve – shumëzues dhe shkallës së polinomit – prodhim?

c) Nxirr një përfundim të përgjithshëm për lidhjen midis shkallëve të polinomëve – shumëzues dhe shkallës së polinomit – prodhim.

6. PJESËTIMI I POLINOMIT ME MONOM

Pjesëtimi i monomeve

Aktivitet

Pjesëtoni fuqitë $x^7 : x^3$.

Shembulli 1

Pjesëtoni monomin $12x^5y^4z^2$ me monomin $4x^2yz$.

E shkruajmë herësin $12x^5y^4z^2 : 4x^2yz$. Duke pjesëtuar secilin faktor të të pjesëtuarit me faktorin përkatës të pjesëtuesit dhe duke i shkruar herësit e fituar në formë prodhimi, fitojmë $12x^5y^4z^2 : 4x^3yz = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^4 : y) \cdot (z^2 : z) = 3x^3y^3z$.

Monomi pjesëtohet me monom duke pjesëtuar koeficientin e të pjesëtuarit me koeficientin e pjesëtuesit, dhe fuqitë e ndryshoreve nga pjesa shkronjore e të pjesëtuarit pjesëtohen me fuqitë e ndryshoreve përkatëse nga pjesa shkronjore e pjesëtuesit, e më pas herësit e fituar shkruhen si prodhim.

Shembulli 2

Njehsoni herësin e monomeve: a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4$, b) $-20a^3bc^2 : 4abc$, c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y)$.

a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4 = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) \cdot (a^7 : a^4) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (a^7 : a^4) = \frac{5}{6}a^3$,

b) $-20a^3bc^2 : 4abc = (-20 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b : b) \cdot (c^2 : c) = -5a^2c$,

c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y) = (-14 : (-7)) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = 2xy^2$.

Shembulli 3

Herësi $8a^2 : 4ax = \frac{8a^2}{4ax} = \frac{2a}{x}$ nuk është monom sepse kemi pjesëtim me ndryshore. Kjo do të thotë se herësi i një monomi me monom mund të jetë edhe një shprehje që nuk është monom.

Detyra 1

Njehsoni herësin e monomeve:

a) $\frac{2}{9}a^5b^3 : \frac{1}{6}a^2b$, b) $-18a^4b^3c^2 : 6a^2b^2c$, c) $-9x^2y : (-15x^2y)$.

Shembulli 4

Një inxhinier ekzaminon dendësinë e një materiali që fitohet duke pjesëtuar masën me vëllimin. Masa dhe vëllimi i materialit shprehen me formulat $m = \frac{9}{4}x^3y^3$ dhe $V = \frac{3}{2}x^2y$. Sa është dendësia ρ e materialit, nëse vlen formula $\rho = \frac{m}{V}$.

Nëse pjesëtojmë monomin $\frac{9}{4}x^3y^3$ me monomin $\frac{3}{2}x^2y$, fitojmë

$\rho = \frac{9}{4}x^3y^3 : \frac{3}{2}x^2y = (\frac{9}{4} : \frac{3}{2}) \cdot (x^3y^3 : x^2y) = (\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = \frac{3}{2}x^1y^2$.

Dendësia e materialit është $\rho = \frac{3}{2}x^1y^2$.

Pjesëtimi i polinomit me monom

Aktivitet

Me ndihmën e vetisë shpërndarëse të pjesëtimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen, thjeshtësoni shprehjen $(6x + 4) : 2$.

Shembulli 5

Kryeni pjesëtimin:

a) $(18x + 12y) : 6$, b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3)$,

c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$, ç) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y$.

Duke zbatuar vetinë shpërndarëse të djathtë të pjesëtimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen, fitojmë:

a) $(18x + 12y) : 6$ — Pjesëtojmë secilën kufizë të polinomit me monomin.

$= 18x : 6 + 12y : 6$ — Herësit e fituar i mbledhim.

$= 3x + 2y$, — E sjellim polinomin në trajtë të rregullt.

b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3) = 3x^5 : (-x^3) + x^4 : (-x^3) - 4x^3 : (-x^3) = -3x^2 - x + 4$,

c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$

$= -9a^3b^2 : (-3a^2b^2) - 6a^2b^3 : (-3a^2b^2) + 15a^3b^3 : (-3a^2b^2)$

$= 3a + 2b - 5ab$

ç) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y = 8x^3y : 2x^3y + 6x^2y : 2x^3y = 4 + \frac{3}{x}$.

Fituam një shprehje, një kufizë e së cilës, $\frac{3}{x}$ nuk është monom. Pra, herësi i polinomit dhe monomit mund të jetë edhe një shprehje që nuk është polinom.

Polinomi pjesëtohet me monom duke pjesëtuar secilën kufizë të polinomit me monomin e dhënë dhe duke i mbledhur herësit e fituar.

Detyra 2

Kryeni pjesëtimin:

a) $(14x + 21) : 7$, b) $(27x^3y^4 - 36x^2y^3) : 9xy^3$,

c) $(4x^6 - x^4 + x^2) : (-2x^2)$, ç) $(10x^2y^3 - 5x^3y^2 + 9x^3y^2) : (-15x^2y^2)$.

Shembulli 6

Një bujk e ndan sipërfaqen për ujitje në disa pjesë të barabarta. Sasia totale e ujit që duhet të shpërndahet në të gjithë sipërfaqen llogaritet me polinomin $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$.

Uji duhet të ndahet në mënyrë të barabartë për secilën pjesë të sipërfaqes, ndërsa secila pjesë paraqitet me monomin $\frac{3}{2}x^2y$. Sa sasi uji do të marrë secila pjesë?

Do ta pjesëtojmë polinomin $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ me monomin $\frac{3}{2}x^2y$.

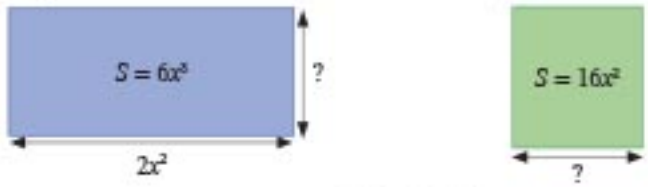
$(\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y) : \frac{3}{2}x^2y = \frac{9}{2}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y + 3x^4y^2 : \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^3y : \frac{3}{2}x^2y$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{5-2}y^{3-1} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{4-2}y^{2-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} x^{3-2}y^{1-1} = 3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

Secila pjesë e sipërfaqes do të marrë sasi uji të shprehur me polinomin $3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

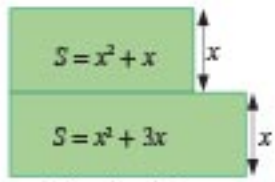
DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni herësin e monomeve:
   a) $-8x^4y^3 : (-20x^2y)$, b) $\frac{3}{5}a^5b : \frac{3}{10}a^3b$, c) $\frac{3}{7}a^4b^3c^2 : (-\frac{5}{14}abc)$.
2. Kryeni pjesëtimin:
   a) $(32a - 24b) : (-8)$, b) $(9x^2y + 12x^4y^2) : 3x^3y$,
   c) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : x^3$, ç) $(14a^4 - 7a^3 + 24a^2) : (-21a^2)$.
3. Shumën e monomeve $6a^4b^3$ dhe $9a^4b^3$ pjesëtojeni me monomin $-5ab^2$.
4. Ndryshimin e monomeve $8xy^2$ dhe $6xy^2$ pjesëtojeni me shumën e tyre.
5. Shkruani një monom në trajtë të rregullt i cili shpreh brinjën e (vizatimi 1):
   a) drejtkëndëshit, b) katrorit.

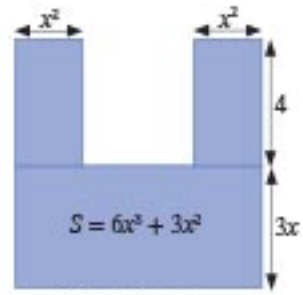


Vizatimi 1

6. Shkruani një polinom në trajtë të rregullt i cili do të shprehë perimetrin e secilës prej formave në vizatimin 2 dhe vizatimin 3.



Vizatimi 2



Vizatimi 3

7. THEJSHTËSIMI I SHPREHJEVE TË PLOTA RACIONALE

Aktivitet

Thjeshtësoni shprehjen: a) $2c(a + 1)$, b) $3a(b - c) - 5$.

Çfarë paraqesin shprehjet që fituat pas thjeshtësimit të secilës prej shprehjeve të dhëna?

Shprehjet në të cilat konstantat dhe ndryshoret janë të lidhura me veprimet e mbledhjes, zbritjes, shumëzimit dhe fuqizimit me tregues numër të plotë jo negativ quhen **shprehje të plota racionale**.

Në përputhje me përkufizimin, një shprehje e plotë racionale **nuk përmban pjesëtim me ndryshore.** Pas thjeshtësimit (kryerjes së veprimeve të shënuara dhe lirimit nga kllapat), një shprehje e plotë racionale shndërrohet në polinom. Kjo do të thotë se **çdo polinom është shprehje e plotë racionale.**

Shprehje të plota racionale janë, për shembull, shprehjet $-3x^2+2x+5$, $(a+1)(a-2)+4$, $\frac{3c^2-2}{6}$ etj. Ashtu si te polinomet (monomet), do të konsiderojmë se konstantat në një shprehje të plotë racionale janë numra racionalë dhe ndryshoret marrin vlera në bashkësinë e numrave racionalë. Prandaj, për thejshtësimin e një shprehjeje të plotë racionale vlejnë të njëjtat rregulla për renditjen e kryerjes së veprimeve dhe lirimin nga kllapat si te numrat racionalë.
Në vazhdim, nën fjalën "shprehje" do të kuptojmë "shprehje të plotë racionale".

Shembulli 1

Thjeshtësoni shprehjen $-(4ab+6a-7b)+(-ab-2a+3b)-(-ab+2a+3b)$.

$-(4ab+6a-7b)+(-ab-2a+3b)-(-ab+2a+3b)$ — Lirohemi nga kllapat.
$=-4ab-6a+7b-ab-2a+3b+ab-2a-3b$ — I reduktojmë monomet e ngjashme.
$=-\underline{4ab}-\underline{\underline{6a}}+\underline{\underline{\underline{7b}}}-\underline{ab}-\underline{\underline{2a}}+\underline{\underline{\underline{3b}}}+\underline{ab}-\underline{\underline{2a}}-\underline{\underline{\underline{3b}}}$ — I radhisim kufizat e
$=-4ab-10a+7b.$ — polinomit të fituar.

Detyra 1

Thjeshtësoni shprehjen:
a) $10x-6y+(3x-5y)-(-4y-2x)$,
b) $-(-a^2b+3ab^2)-(7a^2-ab^2+2b+2a^2b)$.

Shembulli 2

Thjeshtësoni shprehjen: $-5y(x^3-y)-x^3(2-y)$.

$-5y(x^3-y)-x^3(2-y)$ — Lirohemi nga kllapat duke zbatuar
$=-5yx^3+5y^2-2x^3+x^3y$ — vetinë shpërndarëse.
$=\underline{-5yx^3}+5y^2-2x^3+\underline{x^3y}$ — I reduktojmë monomet e ngjashme.
$=-4yx^3+5y^2-2x^3.$

Detyra 2

Thjeshtësoni shprehjen:
a) $9y-2(3x+5y)+4x-xy$,
b) $(x^2-0{,}4x^2y)\cdot 5x-0{,}5y\cdot(y^2-6x^2y)$.

Shembulli 3

Thjeshtësoni shprehjen:
$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$.

$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$
$= 2a + 3a^2 - 3a - 4a^2 + 5b^2$
$= \underline{2a} + \underline{\underline{3a^2}} - \underline{3a} \underline{\underline{-4a^2}} + 5b^2$
$= -a^2 - a + 5b^2$

Detyra 3

Thjeshtësoni shprehjen:
a) $(4x^2y + x^2y^2 + 6xy^2) : 2 + x(xy - y^2)$, b) $(3a^2 + 6a - 9b) : 3 + (-28b) : (-4) + 2a$.

Shembulli 4

Thjeshtësoni shprehjen:
$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\}$

$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\}$	Lirohemi nga kllapat e vogla duke shumëzuar.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - [\, 2a - 15ab - 3a^2\,] - 4b^2\}$	Lirohemi nga kllapat e mesme.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - 2a + 15ab + 3a^2 - 4b^2\}$	Lirohemi nga kllapat e mëdha.
$= 8a - 8ab - 6b^2 + 2a - 15ab - 3a^2 + 4b^2$	I grupojmë monomet e ngjashme.
$= \underline{8a} - \underline{\underline{8ab}} - \underline{\underline{6b^2}} + \underline{2a} - \underline{15ab} - 3a^2 + \underline{\underline{4b^2}}$	E thjeshtësojmë polinomin.
$= -3a^2 + 10a - 23ab - 2b^2$	

Detyra 4

Thjeshtësoni shprehjen:
a) $-\{9x - [\, 4y \cdot (6 - x) - x \cdot (2 + 3y)\,] + (x - 3) \cdot 8y\}$, b) $0{,}2xy - \{0{,}3y^2 + [0{,}5y + 0{,}2y \cdot (3x - 5y)]\}$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $a + b - 3 - a + 2a + 5b + 4$, b) $(3x^2 - 8) - (7x + 2) - (-x^2 - 6) - 2x + 5$.
2. Janë dhënë polinomet $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 5x^2 + 2x - 3$ dhe $C = 4x^2 + 3x$.
   Gjeni polinomet: a) $A + B + C$, b) $C - A$, c) $B - A - C$, ç) $A - B$.
3. Thjeshtësoni shprehjen: a) $4a\,(a + b - 2)$, b) $-3a^2\,(5 - b) - 4b\,(2a^2 - 1) - 3(b - a^2)$.
4. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $2x^2 + x\,(4x - 1)$, b) $2x^3\,(3x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)$,
   c) $5xy^2 + 3y(x + xy - y) - 4xy$, ç) $2x(x - y^2) + 7y + 4(x^2 + y) - 3xy$.

5. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $5x^2 + (9x^4 - 6x^3 + 3x^2) : (-3) + 2x^3$, b) $(y^2 - 4y) \cdot (-y) + 8y^3 : (-2)$.

6. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $2x^2 + x(x^2 - 3x + 1) + (5x^3 + 4x^2) : (-2) + 5$, b) $x(x + 3) + 2(x^2 + 2x + 1) - (x - 1) \cdot x$.

7. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $3x(4x^2y - xy + 1) - x(xy + 2)$, b) $(3y^2 - 6x^2y + 12xy) : 3 + y(4x - 2y)$,
   c) $2x(x^2y - 2xy + 1) + 2y \cdot (3x^3 - 5y) - x^2y$.

8. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $6x^2 + 3x(5x - 2)$, b) $2x(3x^2 - 1) - 4(x + 1)$,
   c) $6xy^2 + 5y(x + xy - 2y) - 7xy$, ç) $2x(3x - y) + 9y + 7(x^2 + y) - 5xy$,
   d) $-3x(x^2 - 2y + 1) - 5y(-x + 4)$, dh) $2x(x + 5y) + y(5x - 7y) - x^2(x - 3)$,
   e) $2a(b - 4) - b(2a - 3) + ab(5a - 1)$.

9. Thjeshtësoni shprehjen:
   a) $\{x^2 - [4x - x \cdot (2x + 3)] + (3x - 2) \cdot x\}$, b) $0{,}3y^2 - \{0{,}5xy^2 + [0{,}8y + (3x - 4) \cdot 0{,}5y^2]\}$.

8. ZËVENDËSIMI I NDRYSHOREVE ME NUMRA TË PLOTË NË SHPREHJET E PLOTA RACIONALE DHE NË FORMULA

Aktivitet

Si do ta njehsoni perimetrin e një drejtkëndëshi me ndihmën e formulës $L = 2(a + b)$, anëse janë dhënë brinjët $a = 3$ cm dhe $b = 2$ cm?

Nëse ndryshoret në **një shprehje të plotë racionale** i zëvendësojmë me numra, atëherë e gjithë shprehja racionale kalon në një shprehje numerike dhe mund të njehsojmë vlerën e saj.

Shembulli 1

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes $2x + 5$, për $x = 3$.

$2x + 5$	
$= 2 \cdot 3 + 5$	Ndryshoren x e zëvendësojmë me vlerën e dhënë 3.
$= 11$	Njehsojmë vlerën numerike të shprehjes së fituar.

Shembulli 2

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes $2x^2 + 3y - 1$ për $x = 3$ dhe $y = -4$.

Në vend të ndryshoreve x dhe y zëvendësojmë vlerat përkatëse të dhëna

$2x^2 + 3y - 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 18 - 12 - 1 = 5.$

Vlera numerike e shprehjes për $x = 3$ dhe $y = -4$ është 5.

Shembulli 3

Nëse $x = -1, y = 3$ dhe $z = -2$, njehsoni vlerën e shprehjes:

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$, b) $4(5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$.

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$

$= 3 \cdot (-1)^4 + 3^2 + 5 \cdot (-2)^3$

$= 3 + 9 - 40$

$= -28$

b) $4 \cdot (5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$

$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^3 - \frac{3^2}{3} - (-2))$

$= 4 \cdot (-5 - 3 + 2)$

$= 4 \cdot (-6)$

$= -24$

Skanoni kodin dhe zgjidhni detyrat.

Detyra 1

Nëse $x = 2, y = -3, z = 4$, njehsoni vlerën e shprehjes:

a) $4x^2 + y^3 - 3z$, b) $5x - 2y - 3z$, c) $x^4 : (-2x^2) - y^3 + 2z^2$, ç) $\frac{3x^2 + 2y}{6} - \frac{z^2}{8}$.

Të rikujtojmë, **formulë** është shënimi me të cilin shprehet lidhja midis disa madhësive (ndryshoreve) dhe sipas të cilit njehsojmë njërën prej tyre.
Zëvendësimi në formulë është procedura me të cilën në vend të ndryshoreve në formulë shkruajmë vlerat e dhëna për ndryshoret.

Shembulli 4

Njehsoni perimetrin P të një trekëndëshi barakrahës me formulën $P = a + 2b$, nëse baza është $a = 3$ cm, dhe krahu $b = 5$ cm.

$P = a + 2b$

$P = 3 + 2 \cdot 5$ — Në formulë zëvendësojmë vlerat e dhëna për brinjët.

$P = 13$ cm — Llogarisim vlerën numerike të shprehjes numerike të fituar.

Detyra 2

Rruga që përshkon një makinë llogaritet me formulën $s = v \cdot t$, ku v është shpejtësia në km/h, ndërsa t është koha në orë. Çfarë rruge do të përshkojë makina, nëse:
a) $v = 60$ km/h dhe $t = 2$ h, b) $v = 80$ km/h dhe $t = 3$ h?

Shembulli 5

Gjeni vlerën e brinjës a të një drejtkëndëshi me perimetër $P = 46$ cm, ако $b = 5$ cm.

Në formulën për perimetrin e drejtkëndëshit $P = 2(a + b)$ zëvendësojmë vlerat e njohura $P = 46$ cm dhe $b = 5$ cm dhe zgjidhim barazimin me një të panjohu:

$46 = 2(a + 5)$
$23 = a + 5$
$a = 18$ cm

Shembulli 6

Njehsoni vlerën e u-së në formulën $v = u + at$, nëse $v = 35$, $a = -2$ dhe $t = 14$.

Me zëvendësimin e vlerave të dhëna për ndryshoret në formulë, fitojmë

$v = u + at$
$35 = u + (-2) \cdot 14$
$35 = u - 28$
$u = 35 + 28$
$u = 63$

Vërejmë se në disa raste, me zëvendësimet në formulën e dhënë, fitojmë barazim të cilin duhet ta zgjidhim.

Detyra 3

Është dhënë formula $y = 5x - 2$. Gjeni vlerën e x, nëse: a) $y = 18$, b) $y = 33$, c) $y = 0$.

Shembulli 7

Çmimi C i biletave për vizitën e një grupi në kinema njehsohet me formulën $C = 120a + 80b + 20c$, ku a është numri i të rriturve, b është numri i fëmijëve dhe c është numri i personave me zbritje të veçantë.

a) Njehsoni çmimin e biletave nëse grupi ka 10 të rritur, 4 fëmijë dhe 2 persona me zbritje të veçantë.

b) Nëse grupi ka 1580 denarë për bileta, dhe duhet të hyjnë 4 fëmijë dhe 3 persona me zbritje të veçantë, sa bileta për të rritur do të mund të blihen?

a) Me zëvendësimin e vlerave të dhëna për ndryshoret në formulë, fitojmë
$C = 120a + 80b + 20c = 120 \cdot 10 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 1560$ denarë

b) Me zëvendësimin e vlerave të dhëna për çmimin dhe numrin e personave në formulën $C = 120a + 80b + 20c$ fitojmë barazimin

$120a + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 1580$

$120a + 320 + 60 = 1580$

$120a = 1580 - 380$

$120a = 1200$

$a = 10$

Do të mund të blihen 10 bileta për të rritur.

Detyra 4

Mjeshtri Kiro për lyerjen e banesave faturon sipas formulës $C = 100x + 80y + 250$, ku x është sipërfaqja që duhet të lyhet, y është sasia e ngjyrës në kilogramë që duhet të përdorë dhe 250 denarë janë shpenzimet për ardhjen e tij.

a) Njehsoni çmimin që duhet të paguhet, nëse për lyerjen e një banese me sipërfaqe 85 m² nevojiten 5 kg ngjyrë.

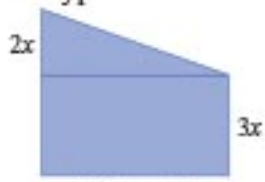
b) Bojani për banesën e tij me sipërfaqe 40 m² i pagoi mjeshtrit 6740 denarë. Sa kilogramë ngjyrë përdori mjeshtri për banesën e Bojanit?

Detyra 5

Shkruani formulën për syprinën e secilës prej formave në vizatimin 1 dhe vizatimin 2, thjeshtësojeni, e më pas njehsoni syprinën nëse $x = 3$ cm.



Vizatimi 1



Vizatimi 2

DETYRA PËR USHTRIME

1. Nëse $x = -6$, njehsoni vlerën e shprehjes: a) $2x^2 + 5$, b) $-3(x^2 - 4)$.

2. Nëse $x = -2, y = 4$, njehsoni vlerën e shprehjes: a) $x^3 - y + 5$, b) $2x^2 - y^2 + 3$.

3. Nëse $x = 4, y = 1, z = -2$ njehsoni vlerën e shprehjes: a) $x^2 - 5y + z^4$, b) $4(x + y) - z^2$.

4. Nëse $x = 3, y = -1, z = 2$ njehsoni vlerën e shprehjes:
a) $4(2x^2 - y^2) + 2(z^3 + 1)$, b) $3(x^3 + 2) - 2yz$.

5. Nëse $x = -3$ dhe $y = 2$, njehsoni vlerën e shprehjes:
a) $4(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, b) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

6. Nëse $a = -2$ dhe $b = 4$, njehsoni vlerën e shprehjes:

   a) $-(ab-3)+2a-(-4a^3+2b-5)$, b) $2b-(3ab-9)-(-2a^2+b^2-1)$.

7. Njehsoni vlerën e t nga formula $v = u + at$, nëse $u = -5$, $a = 3$ dhe $v = 4$

8. Gjeni vlerën e x nga formula $y = -2x + 7$, nëse: a) $y = 3$, b) $y = -3$.

9. Gjeni vlerën e y nga formula $z = xy + 2$, nëse: a) $z = 26$ dhe $x = 3$, b) $z = -40$ dhe $x = 6$.

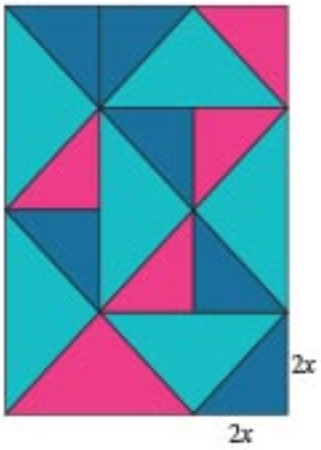
10. Formula për masën totale M në dekagramë të një smoothie (pije të trashë frutash) është $M = 2x^2y + 3xy + 4z$, ku x është numri i bananeve, y është numri i mollëve dhe z është numri i portokajve.

    a) Njehsoni masën M të smoothie-it të bërë nga 3 banane, 2 mollë dhe 5 portokaj.

    b) Sa mollë duhet të vendosë Jovana, nëse vendos 2 banane dhe 5 portokaj, dhe dëshiron të marrë gjithsej 62 dekagramë smoothie?

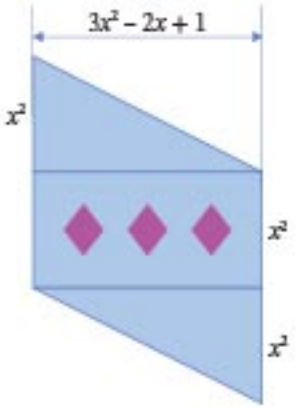
11. Shkruani formulën për syprinën e qilimit, thjeshtësojeni, e më pas njehsoni syprinën nëse $x = 2$ dm. (vizatimi 3 dhe vizatimi 4)

a)



Vizatimi 3

b)



Vizatimi. 4

Hulumtim

Është dhënë shprehja $4x^2$.

a) Njehsoni vlerën e shprehjes për $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

b) Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Vlera e shprehjes							

c) Për cilën vlerë të x-it shprehja ka vlerën më të vogël?

ç) Në cilën pjesë të tabelës vlerat zvogëlohen, e në cilën rriten?

d) Vëreni vlerat për: $x = -3$ dhe $x = 3$, $x = -2$ dhe $x = 2$, $x = -1$ dhe $x = 1$.
A ka ndonjë "simetri" në numrat e fituar? Shpjegoni me fjalët tua.

dh) Shpjegoni se si ndryshon vlera e shprehjes, rritet apo zvogëlohet:

- kur x rritet nga -3 në 0,
- kur x rritet nga 0 në 3?

9. FORMIMI DHE ZGJIDHJA E BARAZIMEVE LINEARE

Barazimi linear

Aktivitet

Shqyrtoni barazimet: $3x - 7 = 2$, $-\frac{1}{3}a + 2 = 0$ dhe $2(y - 1) = 4$.

a) Sa të panjohura ka secili nga barazimet? b) E cilës shkallë është ndryshorja?
c) Çfarë numrash janë koeficientët e barazimit?

- Barazimi i formës
  $ax + b = c$, ku a dhe b janë numra racionalë dhe $a \neq 0$
  quhet barazim linear me një të panjohur.
- **Zgjidhje** e një barazimi linear me një të panjohur është çdo numër racional për të cilin barazimi kalon në një barazi numerike të saktë.

Me marrëveshje, çdo barazim që mund të sillet në formën e barazimit të përmendur linear me një të panjohur, e konsiderojmë barazim linear me një të panjohur.
Përveç kësaj, në vend të barazimit linear me një të panjohur do të themi barazim linear ose thjesht barazim.
Barazime lineare janë, për shembull, barazimet $2x - 4 = 7$, $-3(z + 1) = z + 1$, $-\frac{1}{3}x - 4 = 3x$, etj.
Në procedurën për zgjidhjen e barazimeve do të zbatojmë një model që përfshin përdorimin e simboleve për ndryshoret dhe konstantat. Simbolet janë drejtkëndësha dhe katrorë që sipas ngjyrës dhe formës kanë vlerën si në tabelë:

simboli				
vlera	x	$-x$	1	-1

Barazimin e ndërtojmë duke mbledhur simbolet që ndodhen në të njëjtën anë të shenjës =.

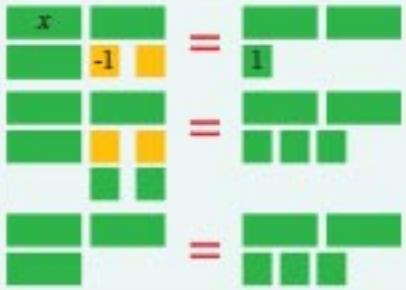
Shembulli 1

Sipas modelit në vizatimin 1, ndërtoni dhe zgjidheni barazimin.



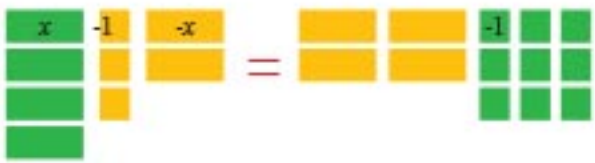
Vizatimi 1

Sipas modelit, të dy anët e barazimit i shkruajmë duke mbledhur simbolet përkatëse.

	/+  Duke shtuar dy katrorë të gjelbër në të dy anët, eliminojmë të verdhët në anën e majtë.	$3x-2=2x+1$ $3x-2=2x+1\ /+2$ $3x-2+2=2x+1+2$ $3x=2x+3$
	/+  Duke shtuar dy drejtkëndësha të verdhë në të dy anët, eliminojmë drejtkëndëshat e gjelbër në anën e djathtë.	$3x=2x+3\ /-2x$ $3x-2x=2x+3-2x$
	Fitojmë zgjidhje për 	$x=3$

Detyra 1

Sipas modelit në vizatimin 2, ndërtoni dhe zgjidheni barazimin.



Vizatimi 2

Metoda algjebrike për zgjidhjen e barazimeve

Nga procedura për zgjidhjen e barazimit sipas një modeli të dhënë, me siguri i vërejtët rregullat e mëposhtme për zgjidhjen e barazimeve:

- Nëse anës së majtë dhe të djathtë të një barazimi të dhënë i shtohet ose i zbritet i njëjti numër ose shprehje, fitohet një barazim që do të ketë të njëjtën zgjidhje me barazimin e dhënë.
- ANëse ana e majtë dhe e djathtë e barazimit shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të ndryshëm nga 0, fitohet një barazim që do të ketë të njëjtën zgjidhje me barazimin e dhënë.

Me zbatimin e këtyre rregullave, të vetive ndërruese dhe shoqëruese të mbledhjes, si dhe të vetisë shpërndarëse të shumëzimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen, mund të fitojmë një **metodë algjebrike** për zgjidhjen e çdo barazimi.

Skanoni kodin dhe zgjidhni barazimet.

Shembulli 2

Zgjidhni barazimin: a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1$, c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$.

a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ I shumëzojmë të dy anët e barazimit me SHVP(3, 6) = 6

$2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}/\cdot 6$ për të eleminuar emëruesit.

$12x+1=4/-1$ Zbresim 1 nga të dy anët e barazimit për të lënë në njërën anë vetëm kufizën me x.

$12x=3/:12$ I pjesëtojmë të dy anët me 12 për të fituar zgjidhjen.

$x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Kontrolli: $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1/\cdot 18$ I shumëzojmë të dy anët e barazimit me SHVP(2, 9) = 18.

$18\cdot\frac{x}{2}-18\cdot\frac{2x}{9}=18\cdot 1$

$9x-4x=18$ I reduktojmë kufizat e ngjashme.

$5x=18/:5$ I pjesëtojmë të dy anët me 5.

$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$

Kontrolli: $\frac{3\frac{3}{5}}{2}-\frac{2\cdot 3\frac{3}{5}}{9}=1$.

c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2/\cdot 12$ I shumëzojmë të dy anët e barazimit me SHVP(4, 6) = 12.

$\frac{3x}{4}\cdot 12+1\cdot 12=\frac{5x}{6}\cdot 12-2\cdot 12$

$3\cdot 3x+12=2\cdot 5x-24$

$9x+12=10x-24/-10x$ Zbresim $10x$ nga të dy anët e barazimit

$-x+12=-24/-12$ për të eleminuar kufizën me x nga ana e djathtë.

$-x=-36/:(-1)$

$x=36$

Kontrolli: $\frac{3\cdot 36}{4}+1=\frac{5\cdot 36}{6}-2$.

Detyra 2

Zgjidhni barazimin: a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8x}{5}+1\frac{1}{4}$.

Shembulli 3

Zgjidhni barazimin: a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$, b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$.

a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$ Lirohemi nga kllapat.

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}$ SHVP(5, 2, 4, 20) = 20

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20} / \cdot 20$

$4x-30=-35+3x / -3x$

$x-30=-35 / +30$

$x=-5$

Kontrolli: $\frac{-5}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3(-5)}{20}$.

b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$

$1{,}2x+4{,}5=-2{,}4x+4{,}5 / -4{,}5$

$1{,}2x=-2{,}4x / +2{,}4x$

$3{,}6x=0 / :3{,}6$

$x=0$

Kontrolli:

$1{,}2\cdot 0+4{,}5=-3\cdot(0{,}8\cdot 0-1{,}5)$.

Detyra 3

Zgjidhni barazimin: a) $\frac{x}{2}-(0{,}15+\frac{x}{3})=0{,}25$, b) $2{,}3x-3(0{,}7x+0{,}5)=-4{,}5$.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Sipas modelit në vizatimin 3, ndërtoni dhe zgjidhni barazimin.



Vizatimi 3

Zgjidhini barazimet nga detyra 2 deri në detyrën 9.

2. a) $2x-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, b) $x-\frac{2}{3}=\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$, c) $\frac{3x-1}{9}=\frac{1}{6}+6$.

3. a) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2}=x-\frac{1}{10}$, b) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-5=2$, c) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}$.

4. a) $\frac{2x}{3}-3{,}5=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$, b) $0{,}4(x-1)+0{,}6-\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, c) $x-\frac{1}{3}(x+2)-0{,}5=-\frac{x}{6}+5$.

5. a) $\frac{x-1}{4}=-\frac{x}{3}$, b) $\frac{2x}{3}+1=2x+\frac{1}{3}$.

6. a) $0{,}8x-2{,}4=0{,}6(x+1)$, b) $2{,}5(3x+1)=0{,}5(2x+3)$.

7. a) $\frac{x-4}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$, b) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$, c) $\frac{2x}{3}-9=\frac{4x}{9}-7$, ç) $\frac{3x-1}{10}=\frac{x+1}{2}$.

8. a) $\frac{5}{18}(x-1)+\frac{1}{4}=-\frac{x}{2}$, b) $4(x-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{3}+x)=2x-7$.

9. a) $\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}-1{,}5x-\frac{3}{8}=\frac{11}{12}$, b) $\frac{4}{3}-0{,}75\cdot(2x-5)=\frac{5}{6}x$.

Hulumtim

Nxënësit Ana, Borisi dhe Erdalli zgjidhën barazime lineare me koeficientë racionalë. Secili prej tyre bënë gabime në vende të ndryshme gjatë zgjidhjes. Zbuloni gabimet dhe zgjidhini barazimet saktë.

Ana	Borisi	Erdalli
$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}x+2$ $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=2-5$ $\frac{1}{4}x=-3$ $x=-12$	$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{2}x+1$ $\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x+1$ $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=1+3$ $\frac{1}{6}x=4$ $x=24$	$\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ $12\cdot\frac{3}{4}x-2=12\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ $9x-2=4x+\frac{1}{2}$ $9x-4x=\frac{1}{2}+2$ $5x=\frac{5}{2}$ $x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10. ZBATIMI I BARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR

Formulimi dhe zgjidhja e barazimit për një problem të dhënë tekstual

Barazimet mundësojnë zgjidhjen e detyrave tekstuale duke lidhur madhësinë e panjohur me madhësitë e dhëna.

Aktivitet

Një numër është për 7 më i madh se numri tjetër. Shuma e të dy numrave është 31.

a) Sa është numri më i vogël?

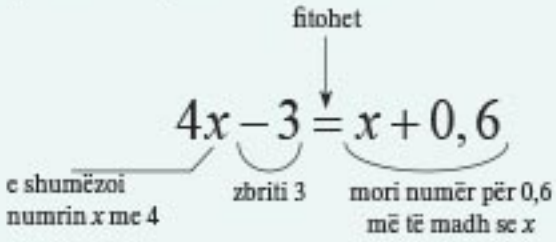
b) Sa është ndryshimi ndërmjet dy numrave?

c) Çfarë fitohet, nëse nga shuma e numrave zbritet numri 7? Arsyetoni përgjigjen tuaj.

Shembulli 1

Eva mendoi një numër. E shumëzoi me 4, më pas e zbriti për 3 dhe kështu fitoi një numër që është për 0,6 më i madh se numri që mendoi. Cili është numri që mendoi Eva?

Numrin që mendoi Eva do ta shënojmë me x.
Sipas kushteve të detyrës, ndërtojmë barazimin linear:



E zgjidhim barazimin:

$4x - 3 = x + 0{,}6$
$4x - 3 = x + 0{,}6 \;/\; -x$
$3x - 3 = 0{,}6 \;/\; +3$
$3x = 3{,}6 \;/\; :3$
$x = 1{,}2$

Kontrolli: $4 \cdot 1{,}2 - 3 = 1{,}2 + 0{,}6$.

Eva mendoi numrin 1,2.

Detyra 1

Çmimi i një lapsi është $\frac{2}{5}$ e çmimit të një gome. Lapsi dhe goma së bashku kushtojnë 40 denarë. Sa kushton goma, e sa kushton lapsi?

Skanoni kodin dhe ndërtoni shprehjet.

Shembulli 2

Ditën e parë të ekskursionit treditor, Nina shpenzoi $\frac{1}{4}$ e parave që kishte marrë. Ditën e dytë shpenzoi 200 denarë, kështu që për ditën e tretë i mbetën $\frac{2}{3}$ e shumës fillestare. Sa para mori Nina në ekskursion?

Le të shënojmë me x shumën që Nina mori në ekskursion.
Sipas kushteve të detyrës:

- ditën e parë shpenzoi $\frac{1}{4}x$ denarë
- ditën e dytë 200 denarë
- ditën e tretë kishte $\frac{2}{3}x$ denarë.

Shuma e tyre është shuma fillestare që mori Nina, pra zgjidhim barazimin:

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x$
$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x \;/\; \cdot 12$
$3x + 2400 + 8x = 12x$

$11x + 2400 = 12x / -12x$
$11x - 12x + 2400 = 12x - 12x$
$-x + 2400 = 0 / -2400$
$-x + 2400 - 2400 = 0 - 2400$
$-x = -2400 / \cdot (-1)$
$x = 2400$ Kontrolli: $\frac{1}{4} \cdot 2400 + 200 + \frac{2}{3} \cdot 2400 = 2400$
Nina mori 2400 denarë në ekskursion.

Detyra 2

Darja shpenzoi $\frac{3}{7}$ e parave që kishte për fletore, $\frac{5}{14}$ e parave për lapsa dhe 150 denarë për një bllok vizatimi. Sa para kishte Darja?

Shembulli 3

Alma dhe Nela u nisën për të blerë me të njëjtën sasi parash. Pasi Alma shpenzoi 400 denarë dhe i dha hua 400 denarë Nelës, $\frac{3}{4}$ e shumës aktuale të Almës ishte e barabartë me $\frac{1}{2}$ e shumës aktuale të Nelës. Sa para kishin Alma dhe Nela kur u nisën për të blerë?

Shumën fillestare që kishte secila nga vajzat do ta shënojmë me x.
Pas shpenzimit të 400 dhe huazimit të 400 denarëve:
Alma kishte $x - 800$ denarë.
Nela kishte $x + 400$ denarë.
Në atë moment, sipas kushtit të detyrës, për paratë që ka secila prej tyre vlen barazimi
$\frac{3}{4} \cdot (x - 800) = \frac{1}{2} \cdot (x + 400)$.
E zgjidhim barazimin e fituar:
$\frac{3}{4}(x - 800) = \frac{1}{2}(x + 400) / \cdot 4$
$3(x - 800) = 2(x + 400)$
$3x - 2400 = 2x + 800$
$3x - 2x = 2400 + 800$
$x = 3200$ Kontrolli: $\frac{3}{4} \cdot (3200 - 800) = \frac{1}{2} \cdot (3200 + 400)$
Alma dhe Nela kur u nisën për të blerë kishin nga 3200 denarë.

Detyra 3

Viktori dhe Martini kishin të njëjtën sasi parash. Pasi Viktori i dha Martinit 600 denarë, $\frac{2}{3}$ e shumës aktuale të Viktorit ishte e barabartë me $\frac{1}{2}$ e shumës aktuale të Martinit. Nga sa para kishin Viktori dhe Martini në fillim?

Ndërtimi i problemeve tekstuale për barazim të dhënë

Shembulli 4

Ndërto një problem tekstual sipas barazimit: a) $2x + 35 = 49$, b) $x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.

Zgjidhni barazimin dhe shpjegoni zgjidhjen në kontekstin e tekstit të vendosur.

Për një barazim të dhënë, mund të ndërtohen më shumë probleme tekstuale.

a) Problemi tekstual në lidhje me barazimin e dhënë mund të jetë:

Tea ka dy herë më shumë vjet se motra e saj, dhe 35 vjet më pak se nëna e saj, e cila ka 49 vjet. Sa vjet ka motra e Teas?

Sipas kushtit në detyrë, arrijmë pikërisht te barazimi i dhënë $2x + 35 = 49$.

E zgjidhim barazimin:

$2x + 35 = 49$

$2x = 49 - 35$

$2x = 14$

$x = 7$ Kontrolli: $2 \cdot 7 + 35 = 49$

Morëm një numër me të cilin vërtet mund të shprehim moshën e një fëmije. Kjo do të thotë se e kemi hartuar mirë problemin.

b) Në barazimin e dhënë shohim se e panjohura x është një e tërë nga e cila janë zbritur pjesët $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{3}x$ dhe numri 110, pas së cilës mbetet $\frac{1}{10}$ e të tërës fillestare x.

Mund të supozojmë se numri x është një shumë parash, dhe ta formulojmë problemin tekstual vijues:

Nga paratë që kishte, Dime $\frac{1}{5}$ i shpenzoi për fletore, $\frac{1}{3}$ për lapsa dhe 110 denarë për shënuesa (markera), dhe i mbetën $\frac{1}{10}$ e parave. Sa para kishte Dime?

Sipas kushtit në detyrë, arrijmë pikërisht te barazimi

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.

E zgjidhim barazimin:

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x \;/\cdot 30$

$30x - 6x - 10x - 3300 = 3x$

$11x = 3300$

$x = 300$ Kontrolli: $300-\frac{1}{5}\cdot 300-\frac{1}{3}\cdot 300-110=\frac{1}{10}\cdot 300$

Fituam një rezultat me të cilin vërtet mund të shprehet një shumë parash, që do të thotë se kemi hartuar një problem të përshtatshëm.

Detyra 4

Ndërtoni një problem tekstual sipas barazimit $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x-60=\frac{2}{5}x$.

Zgjidhni barazimin dhe shpjegoni zgjidhjen në kontekstin e tekstit të vendosur.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shuma e gjysmës, një të tretës dhe një të katërtës së numrit x është për 2 më e madhe se vetë numri. Gjeni numrin x.
2. Goce dhe Mile punuan në kopsht. Goce punoi $\frac{3}{4}$ e kohës që punoi Mile. Sa orë punoi secili prej tyre, nëse gjithsej punuan 7 orë?
3. Paralelja 8-A ka një nxënës më shumë se paralelja 8-B. Një ditë në 8-A munguan $\frac{1}{5}$ e nxënësve, ndërsa në 8-B munguan $\frac{1}{6}$ e nxënësve, dhe atë ditë në të dy paralelet kishte të njëjtin numër nxënësish. Sa nxënës mësojnë në 8-B?
4. Në një shkollë $\frac{7}{8}$ e nxënësve mësojnë anglisht, kurse të tjerët mësojnë gjermanisht. Anglisht mësojnë 420 nxënës më shumë se ata që mësojnë gjermanisht. Sa nxënës ka gjithsej shkolla?
5. Secili nxënës nga paralelja 8-A është anëtar i saktësisht një seksioni. $\frac{1}{6}$ e nxënësve janë anëtarë të seksionit biologjik, $\frac{2}{5}$ në seksionin letrar, dhe 3 nxënës në seksionin matematikor. Sa nxënës ka paralelja 8-A?
6. Çereku i këndit α dhe një e treta e këndit që është për 60° më i madh se α bashkë japin 62°. Gjeni këndin α.
7. Një e treta e këndit α është për 44° më e vogël se këndi që është tre herë më i madh se α. Gjeni këndin α.
8. Lena dhe Petari së bashku kanë 117 vjet. Lena ka $\frac{4}{5}$ e moshës së Petarit. Sa vjet ka Petari?
9. Djali ka një të katërtën e moshës së nënës, ndërsa vajza gjysmën e moshës së djalit. Nëna dhe vajza së bashku kanë 54 vjet. Sa vjet kanë të dy fëmijët?
10. Për shkak të mbajtjes së një shfaqjeje në sallën e edukatës fizike, u sollën karrige nga disa klasa. Nga karriget e sjella $\frac{1}{5}$ janë nga kabineti i kimisë, $\frac{1}{6}$ nga kabineti i fizikës, $\frac{2}{15}$ nga kabineti i historisë dhe 20 karrige nga kabineti i matematikës. Sa karrige u sollën gjithsej në sallën e gjimnastikës?
11. a) Orhani kishte 4000 denarë. Pasi bleu 5 pako qumësht, i ngelën 720 denarë. Sa kushton një pako qumësht?
    b) Atleti në stërvitje vrapoi 3850 metra, që janë 9 xhiro dhe 250 metra. Sa metra është gjatësia e një xhiroje?
12. Ndërtoni një problem tekstual sipas barazimit: a) $2500 - 3x = 550$, b) $3x + 56 = 177$.

Hulumtim

Mendoni një numër, dyfishojeni, shtoni 2, pjesëtojeni rezultatin me 2 dhe zbritni 1. Do të merrni numrin e menduar.
Me ndihmën e një barazimi, shpjegoni pse gjithmonë e merrni numrin e menduar.

11. VARGJE NUMRASH DHE FORMASH

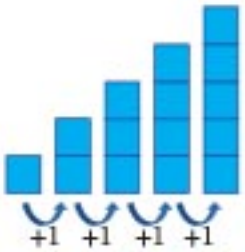
Aktivitet

Sa katrorë ka anëtari i ardhshëm i vargut?
Sipas cilit rregull e përcaktoni anëtarin e ardhshëm?
Shkruani dhjetë anëtarët e parë si varg numerik. ■ ■■■ ■■■■■, ...

Çdo **varg** përbëhet nga objekte të radhitura sipas një rregulli të caktuar.
Objektet e vargut quhen **kufiza (anëtarë ose terme) të vargut.**

Shembulli 1

Për format në vizatimin 1, vërejmë se secili drejtkëndësh i ardhshëm ka një katror më shumë se drejtkëndëshi i mëparshëm.
Rregulli për përcaktimin e kufizës së ardhshme është "shto 1".



Vizatimi 1

Shembulli 2

Le të shqyrtojmë vargun numerik të dhënë me fjalinë: "Secila kufizë e ardhshme është e barabartë me shumën e dy kufizave të mëparshme". A është vargu plotësisht i përcaktuar me këtë fjali?

Përgjigja është jo, sepse duhet të dimë kufizën e parë dhe të dytë. Pastaj kufiza e tretë është shuma e të parës dhe të dytës, kufiza e katërt është shuma e të dytës dhe të tretës, etj.
Në këtë rast, vargu do të jetë plotësisht i përcaktuar, për shembull, me fjalinë "Kufiza e parë është një, kufiza e dytë është një dhe secila kufizë pasuese është shuma e dy kufizave të mëparshme".
Vargu i përcaktuar është 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Kufiza e parë është 1, kufiza e dytë është 1, dhe rregulli për përcaktimin e kufizës pasuese thotë "secila kufizë është shuma e dy të mëparshmëve".

Rregulli për përcaktimin e kufizës pasuese të një vargu është mënyra me të cilën fitohet secila kufizë pasuese nga kufizat e mëparshme të vargut.

Një varg është plotësisht i përcaktuar me **disa kufizat e para** dhe **rregullin për përcaktimin e kufizës pasuese.**

Shembulli 3

Shkruani 6 kufizat e para të vargut me kufizën e parë 4 dhe rregullin për përcaktimin e kufizës pasuese "shto 5".

6 kufizat e para të vargut janë: $4, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, 19 + 5 = 24, 24 + 5 = 29$.

Shembulli 4

Është dhënë vargu 2, 6, 10, 14, 18, ...

a) Gjeni rregullin sipas të cilit fitohet secila kufizë pasuese e vargut.

b) Shkruani tre kufizat e ardhshme të vargut.

a) Vërejmë se secila kufizë e ardhshme është për 4 më e madhe se ajo e mëparshme. Prandaj, rregulli për përcaktimin e kufizës së ardhshme është "shto 4".

2 6 10 14 18
+4 +4 +4 +4

b) Tre kufizat e ardhshme të vargut janë: $18 + 4 = 22$, $22 + 4 = 26$, $26 + 4 = 30$.

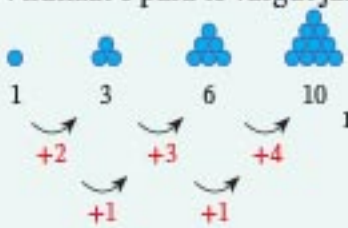
Shembulli 5

Janë dhënë 4 kufizat e para të një vargu formash me rrathë (vizatimi 2). Gjeni rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme dhe përcaktoni numrin e rrathëve në formën e ardhshme në varg.



Vizatimi 2

4 kufizat e para të vargut janë 1, 3, 6 dhe 10 (vizatimi 3).



Vizatimi 3

Rregulli për përcaktimin e kufizës së ardhshme do të jetë: "shto ndryshimin e dy kufizave të mëparshme të rritur për 1".

Sipas këtij rregulli, forma e ardhshme do të ketë

$10 + (10 - 6 + 1) = 10 + 5 = 15$ rrathë.

Detyra 1

Është dhënë vargu 3, 9, 15, 21, ...

a) Gjeni rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme.

b) Shkruani 3 kufizat e ardhshme të vargut.

c) Shkruani kufizën e dhjetë të vargut.

Skanoni kodin dhe përcaktoni vargjet.

Me rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme, shpesh është e vështirë të gjejmë kufizë të një vargu që kanë numra rendorë më të mëdhenj. Prandaj, vargjet shpesh jepen me varësinë e kufizës nga numri i tij rendor. Ajo varësi jepet me një shprehje algjebrike.

Shprehja algjebrike me të cilën jepet varësia e çdo kufize të vargut nga numri i tij rendor quhet **rregulli i kufizës së përgjithshme të vargut.**

Nëse dihet kufiza e përgjithshme, atëherë lehtë mund të gjendet çdo kufizë e vargut të dhënë.

Shembulli 6

Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $2n + 3$. Gjeni:
a) 5 kufizat e para, b) kufizat me numra rendorë 100 dhe 300.

a) Nëse në shprehjen për kufizën e përgjithshme të vargut $2n + 3$ zëvendësojmë numrat rendorë të pesë kufizave të para, 1, 2, 3, 4 dhe 5, fitojmë
$2 \cdot 1 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, $2 \cdot 3 + 3 = 9$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $2 \cdot 5 + 3 = 13$.
Pra, 5 kufizat e para të vargut janë: 5, 7, 9, 11 dhe 13.

b) Për të përcaktuar kufizën e njëqindtë dhe të treqindtë në varg, në shprehjen për kufizën e përgjithshme $2n + 3$ zëvendësojmë $n = 100$ dhe $n = 300$. Kështu fitojmë
$2n + 3 = 2 \cdot 100 + 3 = 203$, $2n + 3 = 2 \cdot 300 + 3 = 603$.
Pra, kufiza e njëqindtë është 203, ndërsa kufiza e treqindtë është 603.

Detyra 2

Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $4n - 1$. Gjeni:
a) 3 kufizat e para, b) kufizat me numra rendorë 50 dhe 200.

Nëse dihet kufiza e përgjithshme e një vargu, mund të verifikojmë nëse ndonjë numër është kufizë e atij vargu.

Shembulli 7

Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $3n + 4$. A mund të jetë kufizë e tij numri:
a) 30, b) 49?

a) Për t'iu përgjigjur kësaj pyetjeje, duhet të zgjidhim barazimin $3n + 4 = 30$.
Fitojmë $3n = 26$, pra $n = 26 : 3$. Zgjidhja e barazimit nuk është numër natyror.
Numri 30 nuk është kufizë e vargut.

b) Në mënyrë të ngjashme, zgjidhim barazimin $3n + 4 = 49$, $3n = 45$, $n = 15$. Zgjidhja e barazimit është numri natyror 15. Numri 49 është kufiza e 15-të e vargut.

Detyra 3

Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $3n + 5$. A mund të jetë kufizë e tij numri:
a) 53, b) 68?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Sa trekëndësha të vegjël barabrinjës ka forma e ardhshme në vargun në vizatimin 4?



Vizatimi 4

2. Gjeni rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme të vargut të formave në vizatimin 5. Më pas, rishkruani dhe plotësoni tabelën.



Vizatimi 5

numri rendor i formës	i pari	i dyti	i treti	i katërti	i pesti	i gjashti
numri i yjeve në formë						

3. Kufiza e parë e vargut është 100. Secila kufizë e ardhshme e vargut fitohet sipas rregullit për përcaktimin e kufizë së ardhshme "pjesëto me 2". Gjeni kufizën e pestë të vargut.
4. Gjeni rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme të vargut:
   a) 1, 2, 4, 8, 16,..., b) 600, 300, 150, 75,..., c) 12, 26, 40, 54,...,
   ç) 89, 86, 83, 80,...., d) 243, 81, 27, 9,... .
5. Për vargun 3, 8, 13, 18,.....:
   a) gjeni rregullin për përcaktimin e kufizës së ardhshme,
   b) shkruani 3 kufizat e ardhshme të vargut.
6. Gjeni kufizat e panjohura a, b, c dhe d të vargut dhe shkruani rregullin e mundshëm për përcaktimin e kufizës së ardhshme:
   a) a, b, 5, 7, c, d,...., b) a, b,10, 18, c,..., c) a, 24, 18, b, c, d,..., ç) a, b, 0, -8, c, d,... .
7. Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $3n - 1$. Gjeni:
   a) 3 kufizat e para, b) kufizat me numra rendorë 54 dhe 125.
8. A mund të jenë numrat 35, 23, -15, 77, 98 kufiza të vargut me kufizë të përgjithshme $4n + 7$?
9. Në një librari ka zbritje për romane. Ditën e parë, u shitën 6 romane, ditën e dytë u shitën 11 romane, ditën e tretë u shitën 16 romane, etj. Sa romane u shitën ditën e tetë, nëse çdo ditë të ardhshme shiten 5 romane më shumë se ditën e mëparshme?
10. Zoki dëshiron të vendosë 55 trungje ashtu që në rreshtin më të sipërm të ketë 1 trung, dhe në çdo rresht të ardhshëm poshtë tij nga 1 trung më shumë. Sa trungje do të ketë në rreshtin më të poshtëm?

12. PËRCAKTIMI I KUFIZËS SË PËRGJITHSHME TË VARGUT

Nëse e dimë kufizën e përgjithshme të vargut, atëherë lehtë mund të gjejmë çdo kufizë të vargut të dhënë, pavarësisht nga pozicioni i saj në varg. Prandaj, është e nevojshme të gjejmë një mënyrë për të përcaktuar kufizën e përgjithshme të vargut.

Aktivitet

Shkruaji 3 kufizat e para të vargut me kufizë të përgjithshme: a) $n + 1$, b) $3n - 2$,

Shembulli 1

Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut, kufiza e parë e të cilit është 2, dhe rregulli për kufizën e ardhshme është "shto 3".

Ndërtojmë një tabelë, ashtu që në rreshtin e parë të tabelës vendosim numrat rendorë të kufizave, dhe në të dytin kufizat përkatëse të vargut 2, 5, 8, 11, 14, 17.
Në rreshtin e tretë vendosim prodhimin e ndryshimit midis dy kufizave të vargut dhe numrit rendor të kufizës $3n$.

numri rendor n	1	2	3	4	5	6
kufiza	2	5	8	11	14	17
$3n$	3	6	9	12	15	18

Tani vërejmë se prodhimi $3n$ duhet të zvogëlohet për 1 për të fituar kufizat e vargut. Pra, kufiza e përgjithshme e këtij vargu është $3n - 1$.

Vërejmë se vargu nga shembulli i mëparshëm rritet.
Le të shohim se si do ta përcaktojmë kufizën e përgjithshme nëse vargu zvogëlohet.

Shembulli 2

Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut, kufiza e parë e të cilit është 2, dhe rregulli për kufizën e ardhshme është "zbrit 3".

Ndërtojmë një tabelë, ashtu që në rreshtin e parë, përsëri, vendosim numrat rendorë të kufizave, dhe në të dytin kufizat përkatëse të vargut $2, -1, -4, -7, -10, \ldots$
Rregulli për përcaktimin e kufizës së ardhshme është "zbrit 3", pra rreshti i tretë do të jetë prodhimi i ndryshimit të dy kufizave -3 dhe numrit rendor n.

numri rendor n	1	2	3	4	5	6
kufiza	2	-1	-4	-7	-10	-13
$3n$	-3	-6	-9	-12	-15	-18

Vërejmë se prodhimin $-3n$ duhet ta rrisim për 5 për të fituar kufizat e vargut.
Pra, kufiza e përgjithshme e këtij vargu është $-3n + 5$.

Skanoni kodin dhe shqyrtoni se si krijohen vargjet.

Shembulli 3

Komuna filloi një projekt për mbjelljen e pemëve përgjatë rrugës që çon për në shkollë. Ditën e parë mbollën 3 pemë. Çdo ditë pasuese mbollën nga 3 pemë më shumë se ditën e mëparshme.
a) Nga sa pemë do të mbjellin ditën e tretë, të katërt dhe të pestë.
b) Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut.
c) Sa pemë gjithsej do të jenë mbjellë pas 10 ditësh?
ç) Nëse aksioni vazhdon, në cilën ditë sipas radhës do të mbillen 96 pemë?

a) Dita e parë: 3 pemë; Dita e dytë: $3 + 3 = 6$ pemë; Dita e tretë: $6 + 3 = 9$ pemë;
Dita e katërt: $9 + 3 = 12$ pemë; Dita e pestë: $12 + 3 = 15$ pemë.

b) Vargu i fituar është: 3, 6, 9, 12, 15, ...

numri rendor n	1	2	3	4	5	6
Kufiza	3	6	9	12	15	18
$3n$	3	6	9	12	15	18

Sipas tabelës, vërejmë se kufiza e përgjithshme e vargut është $3n$.

c) Ditën e dhjetë do të mbillen $3 \cdot 10 = 30$ pemë.
Pas 10 ditësh do të jenë mbjellë $30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 165$ pemë.

ç) Kërkojmë numrin rendor të kufizës 96 nga vargu 3, 6, 9,... Zgjidhim barazimin
$3n = 96$, $n = 32$.
Kufiza e tridhjetë e dytë në varg është numri 96.

Detyra 1

Trajçe bleu një bredh të lartë 30 cm. Bredhi rritet nga 2 cm në javë.
a) Sa do të jetë i lartë bredhi pas 1 muaji?
b) Gjeni kufizën e vargut që jep lartësinë e bredhit pas n javësh.
c) Sa do të jetë i lartë bredhi pas 8 muajsh?
ç) Pas sa javësh do të jetë bredhi i lartë 230 cm?

Shembulli 4

Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut të paraqitur me skemën (vizatimi 1).



Vizatimi 1

Nga numri i përgjithshëm i rrathëve në skemat e dhëna, mund të formojmë vargun 5, 8, 11,...
Le të shqyrtojmë lidhjen midis numrit rendor dhe numrit të rrathëve të bardhë dhe të kaltër:

1 (numri rendor) · 3 (rrathë të bardhë) + 2 (rrathë të kaltër) = 5,
2 (numri rendor) · 3 (rrathë të bardhë) + 2 (rrathë të kaltër) = 8,
3 (numri rendor) · 3 (rrathë të bardhë) + 2 (rrathë të kaltër) = 11.

Në secilën kufizë të vargut, numri i rrathëve të bardhë është 3 · numri rendor, dhe në secilën kufizë ka edhe 2 rrathë të kaltër shtesë.
Kufiza e përgjithshme e vargut do të jetë $3n + 2$.

Detyra 2

Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut të paraqitur me skemën (Vizatimi 2).



Vizatimi 2

Ekzistojnë situata në të cilat dy ose më shumë procese zhvillohen njëkohësisht, por sipas rregullave të ndryshme. Kjo do të thotë se duhet të shqyrtojmë një varg, kufizat e të cilit janë kufizat e përbashkëta të disa vargjeve.

Shembulli 5

Është dhënë një varg rrathësh (Vizatimi 3).



Vizatimi 3

a) Sa rrathë ka gjithsej kufiza e njëqindtë e vargut?

b) Sa rrathë të kuq ka kufiza e njëqindtë e vargut?

c) Sa rrathë të gjelbër ka kufiza që ka 20 rrathë të kuq?

a) Kuifza e përgjithshme e vargut 3, 6, 9,... është $3n$. Kufiza e njëqindtë do të jetë $3 \cdot 100 = 300$.

b) Kufiza e përgjithshme e vargut të rrathëve të kuq është $n + 1$. Kufiza e njëqindtë është $100 + 1 = 101$.

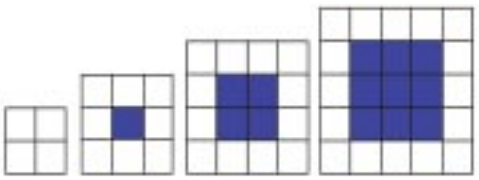
c) Nga $n + 1 = 20$ fitojmë $n = 19$, pra në kufizën e 19-të do të ketë 20 rrathë të kuq. Atëherë numri i përgjithshëm i rrathëve është $3 \cdot 19 = 57$, pra kufiza e 19-të ka gjithsej 57 rrathë. Nga ta, 20 janë të kuq, pra të gjelbër do të jenë 37 rrathë.

Detyra 3

Është dhënë vargu i formave (Vizatimi 4).

a) Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

numri i katrorëve të kaltër				
numri i katrorëve të bardhë				



Vizatimi 4

b) Sa katrorë gjithsej ka kufiza e dhjetë e vargut?

c) Sa katrorë të bardhë ka kufiza e vargut në të cilin ka 36 katrorë të kaltër?

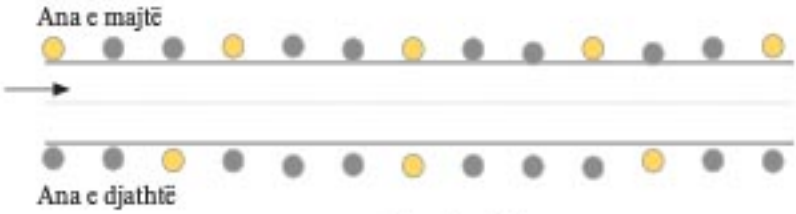
Shembulli 6

Në një autostradë, llambat në anën e majtë dhe të djathtë të rrugës nuk ndizen vazhdimisht. Ato ndizen dhe fiken sipas rregullave të caktuara. Në vizatimin 5, me rrathë të verdhë janë shënuar llambat e ndezura, ndërsa me rrathë gri janë shënuar llambat e fikura.

a) Zbuloni rregullin sipas të cilit ndizet çdo llambë e ardhshme në anën e majtë dhe çdo llambë ardhshme në anën e djathtë të autostradës.

b) A është e ndezur llamba në pozicionin 94 në anën e majtë?

c) Në cilat pozicione janë ndezur llambat njëkohësisht në të dy anët? Gjeni rregullin e përgjithshëm sipas të cilit llambat ndizen njëkohësisht në të dy anët.



Vizatimi 5

a) Në anën e majtë janë ndezur llambat në pozicionet

1, 4, 7, 10,....

që do të thotë se është ndezur llamba e parë, dhe rregulli për llambën e ardhshme të ndezur është "shto 3 pozicione".

Në anën e djathtë janë ndezur llambat në pozicionet

3, 7, 11, 15,...,

dhe kjo do të thotë se llamba e parë e ndezur është në pozicionin 3, ndërsa çdo e ardhshme ndizet sipas rregullit "shto 4 pozicione".

b) Do të kontrollojmë nëse 94 është kufizë e vargut 1, 4, 7, 10,.... Kufiza e përgjithshme e vargut është $3n - 2$.

Me zgjidhjen e barazimit

$$3n - 2 = 94,\ 3n = 96,\ n = 32,$$

fitojmë se kjo është llamba e tridhjetë e dytë e ndezur në radhë.

c) Vargjet me llamba të ndezura majtas dhe djathtas janë:

1, 4, 7, 10,13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,...

3, 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35,...

Vërejmë cilat pozicione shfaqen në të dy vargjet, pra vargu me llamba të ndezura në të njëjtin pozicion është

7, 19, 31,....

Kufiza e përgjithshme e vargut 7, 19, 31,... është $12n - 5$.

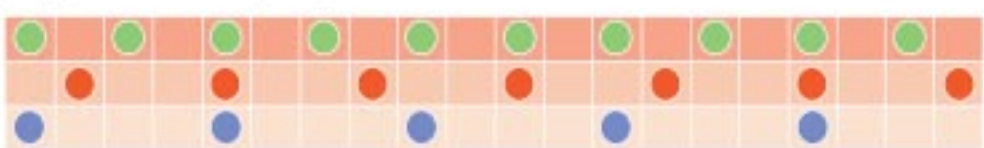
Detyra 4

Janë lidhur tre vargje me llamba të Vitit të Ri, nga një e gjerbër, e kuqe dhe e kaltër. Në vizatimin 6 janë paraqitur llambat e të 3 ngjyrave që ndizen njëkohësisht. Në fushat e zbrazëta janë llambat momentalisht të fikura.

a) Zbuloni rregullin sipas të cilit ndizet çdo llambë e ardhshme në secilin nga tre vargjet..

b) Në cilin pozicion të ardhshëm do të jetë ndezur vetëm llamba e kuqe?

c) Shkruani vargun me pozicionet në të cilat ndizen tre llambat njëkohësisht. Gjeni rregullin e përgjithshëm të këtij vargu.



Vizatimi 6

DETYRA PËR USHTRIME

1. Përcaktoni kufizën e përgjithshme të vargut:
   a) 34, 30, 26,..., b) 25, 20, 15, 10,..., c) 8, 15, 22, 29,..., ç) 4, 6, 8, 10,....

2. Kufiza e parë e vargut është 15, dhe rregulli për kufizën e ardhshme është "shto 5".
   a) Shkruani 6 kufizat e para. b) Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut.
   c) Gjeni kufizën e 225-të.

3. Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut të paraqitur me skemën në vizatimin 7.



Vizatimi 7

4. Gjeni kufizën e përgjithshëm të vargut në vizatimin 8.



Vizatimi 8

5. Në një pjesë të një salle sportive, duhet të vendosen karrige në rreshta ashtu që rreshti i parë të ketë 3 karrige, dhe secili rresht i ardhshëm të ketë 3 karrige më shumë se i mëparshmi.
   a) Sa karrige do të ketë në rreshtin e pestë? b) Sa karrige do të ketë në rreshtin e dhjetë?
   c) Shkruani numrin e karrigeve në rreshtin e n-të.

6. Në rreshtin e parë të njërës prej tribunave të stadiumit të futbollit ka 56 tifozë. Në rreshtin e dytë ka 59 tifozë, në rreshtin e tretë 62 tifozë, etj. Sa tifozë ka në rreshtin e dhjetë?

7. Nxënësit kryejnë një aksion për mbjelljen e luleve në oborrin e shkollës. Ditën e parë mbollën 8 lule. Çdo ditë të ardhshme mbjellin nga 5 lule më shumë se ditën e mëparshme.
   a) Sa lule do të mbjellin ditën e tretë, të katërt dhe të pestë?
   b) Sa lule do të mbjellin në ditën e n-të?
   c) Sa lule gjithsej do të jenë mbjellë pas 15 ditësh?
   ç) Nëse aksioni vazhdon, në cilën ditë me radhë do të mbillen 83 lule??

8. Një akullnajë në Polin e Veriut ishte e lartë 105 m. Për shkak të shkrirjes së akullit, akullnaja humb nga 3 m çdo muaj.
   a) Sa do të jetë e lartë akullnaja pas 10 muajsh?
   b) Pas sa muajsh do të shkrihet plotësisht akullnaja?

9. a) Gjeni rregullin për kufizën e ardhshme të vargut të formave në vizatimin 9 dhe përcaktoni numrin e përgjithshëm të rrathëve në formën e ardhshme në varg.



Vizatimi 9

b) Rishkruani dhe plotësoni tabelën:

numri i rrathëve të kuq					
numri i rrathëve të kaltër					

c) Sa rrathë të kaltër ka kufiza e vargut që ka 10 rrathë të kuq?

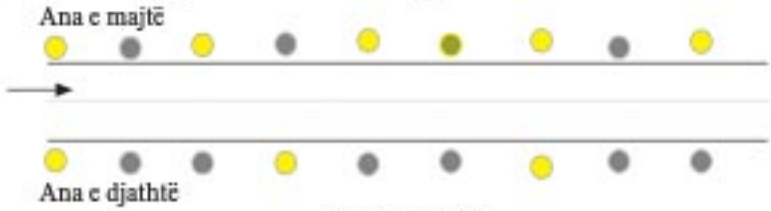
ç) Sa rrathë gjithsej ka kufiza e pesëdhjetë?

10. Në një rrugë, të gjitha llambat e rrugës nuk ndizen për çdo natë (vizatimi 10). Ato të cilat ndizen janë të ndezura sipas rregullave të veçanta për anën e majtë dhe të djathtë të rrugës.

a) Zbuloni rregullin sipas të cilit ndizet çdo llambë e ardhshme në anën e majtë dhe çdo llambë e ardhshme në anën e djathtë të rrugës.

b) A është e ndezur llamba në pozicionin 35 në anën e majtë?

c) Në cilat pozicione janë ndezur llambat njëkohësisht në të dy anët? Gjeni rregullin e përgjithshëm sipas të cilit ndizen njëkohësisht.

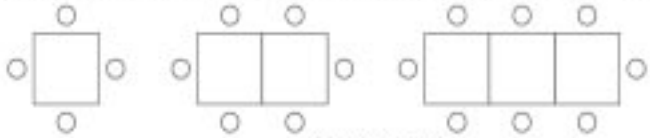


Vizatimi 10

11. Rreth një tavoline mund të vendosen 4 karrige. Në vizatimin 11 është paraqitur mënyra se si bashkohen tavolinat për të vendosur më shumë persona.

a) Sa vende mund të ulen në 15 tavolina të bashkuara?

b) Sa tavolina nevojiten për të vendosur së bashku 40 persona?



Vizatimi 11

13. FUNKSIONI

Kuptimi i funksionit

Aktivitet

Me relacionet R_1, R_2 dhe R_3 nga bashkësia e nxënësve A = {Maja, Tino, Enis, Ava} në bashkësinë e shteteve B = {Italia, Spanja, Greqia, Turqia} është përcaktuar se cili nxënës në cilin shtet ka qëndruar. Ata janë paraqitur me ndihmën e grafit në vizatimin 1.

a) 

Relacioni R_1

b) 

Relacioni R_2

c) 

Relacioni R_3

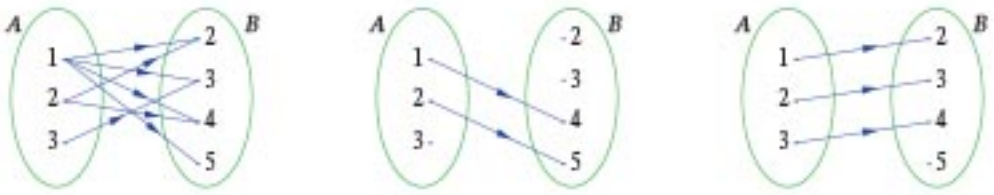
Vizatimi 1

Sipas grafit të relacionit:
a) R_1 përcaktoni nëse ndonjë nxënës ka vizituar më shumë se një shtet,
b) R_2 përcaktoni nëse ekziston një nxënës që nuk ka vizituar asnjë shtet,
c) R_3 përcaktoni nëse secili nga nxënësit ka vizituar ndonjë shtet.

Relacioni nga bashkësia A në bashkësinë B, me të cilin sipas një rregulli të caktuar, secilit element $x \in A$ i shoqërohet saktësisht një element $y \in B$, quhet **funksion** nga bashkësia A në bashkësinë B.
Bashkësia A quhet **domen**, kurse bashkësia B **kodomen** i funksionit.
Shkruajmë $f: A \to B$ dhe lexojmë f është funksion nga A në B.

Shembulli 1

Nga bashkësia $A = \{1, 2, 3\}$ në bashkësinë $B = \{2, 3, 4, 5\}$ janë dhënë relacionet:
R_1: „ ... është pjesëtues i ... “, R_2: „ ... është për 3 më i vogël se ... “, R_3: „ ... është për 1 më i vogël se ... “.
Ata janë paraqitur me ndihmën e grafit në vizatimin 2. Cili nga këto relacione është funksion?



Relacioni R_1 | Relacioni R_2 | Relacioni R_3

Vizatimi 2

Me relacionin R_1, ekziston një element në bashkësinë A (elementi 1) që është në relacion me dy elementë të ndryshëm nga bashkësia B (ekziston një element nga i cili dalin dy shigjeta).
Me relacionin R_2, ekziston një element në bashkësinë A (elementi 3) që nuk është në relacion me asnjë element nga B (ekziston një element nga i cili nuk del shigjetë).
Me relacionin R_3, secilit element nga bashkësia A i shoqërohet saktësisht një element nga B (nga secili element del saktësisht një shigjetë). Prandaj, relacioni R_3 është funksion nga bashkësia A në bashkësinë B.

Detyra 1

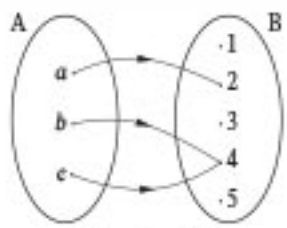
Le të jenë dhënë bashkësitë $M = \{1, 3, 5\}$ dhe $N = \{2, 4, 6\}$. Paraqiteni me graf relacionin ndërmjet elementeve të bashkësive M dhe N të dhënë me:
a) “... është 2 herë më i vogël se ...”, b) “... është paraardhës i ...”, c) “... është pjesëtues i ...”.
Cili nga relacionet është funksion? Arsyetoni përgjigjen.

Le të jetë dhënë funksioni $f: A \to B$. Nëse elementit $x \in A$ i shoqërohet elementi $y \in B$, atëherë për x themi se është origjinali, kurse për y themi se është pasqyra e x. Në atë rast shkruajmë $y = f(x)$.

Simboli x me të cilin shënojmë çdo element nga A, quhet **ndryshore e pavarur**, ndërsa y ose $f(x)$ quhet **ndryshore e varur** ose **vlerë e funksionit** që i përgjigjet x-it.

Shembulli 2

Për funksionin $f: A \to B$ në vizatimin 3, gjeni:
a) origjinalin e elementit 2 nga B,
b) pasqyrën e elementit b nga A.



Vizatimi 3

a) Origjinali i elementit 2 nga B është elementi a nga A.
b) Pasqyra e elementit b nga A është elementi 4 nga B dhe shkruajmë $f(b) = 4$.

Le të jenë $A = \{2, 4\}$ dhe $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Nga bashkësia A në bashkësinë B është përcaktuar funksioni f me rregullin "... është paraardhës i ...". Mënyrën e shoqërimit të funksionit $f: A \to B$, mund ta shkruajmë me **formulë**

$f(x) = x + 1$ ose $y = x + 1$, ku $x \in A$.

Sipas formulës, mund të njehsojmë vlerat e funksionit që u përgjigjen vlerave të ndryshores së pavarur:

për $x = 2$ fitojmë $f(2) = 2 + 1 = 3$, për $x = 4$ fitojmë $f(4) = 4 + 1 = 5$.

Vlerat e ndryshores së pavarur x dhe vlerat përkatëse të funksionit $f(x)$ mund t'i organizojmë në **tabelë**.

x	2	4
$f(x)$	3	5

Në rreshtin e parë shkruajmë të gjitha vlerat e ndryshores së pavarur x, kurse në rreshtin e dytë vlerat përkatëse të funksionit $f(x)$.

Skanoni kodin dhe shqyrtoni funksionet.

Shembulli 3

Është dhënë funksioni $f(x) = 3x - 1$.
a) Rishkruani dhe plotësoni tabelën.
b) Gjeni domenin dhe kodomenin e funksionit.

x	5		9	
$f(x)$		20		32

a) Vlerën e funksionit e gjejmë me zëvendësim në formulën e funksionit:
për $x = 5$ fitojmë $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$,
për $x = 9$ fitojmë $f(9) = 3 \cdot 9 - 1 = 26$.

Vlerën e ndryshores së pavarur, për një vlerë të dhënë të ndryshores së varur, e gjejmë me zëvendësim në formulën e funksionit:

$20 = 3x - 1$, $21 = 3x$, $x = 7$

$32 = 3x - 1$, $33 = 3x$, $x = 11$.

Fitojmë tabelën:

x	5	7	9	11
$f(x)$	14	20	26	32

b) Nga tabela shohim se domeni është bashkësia $\{5, 7, 9, 11\}$.

Kodomeni është cilado bashkësi që përmban vlerat 14, 20, 26 dhe 32.

Detyra 2

Është dhënë funksioni $f(x) = 2(x - 1)$.

a) Rishkruani dhe plotësoni tabelën. b) Gjeni domenin dhe kodomenin e funksionit.

x			14	
$f(x)$	12	10		30

Funksionet në situata reale

Funksionet kanë zbatim të gjerë në shkencat natyrore, në shkencat teknike dhe në jetën e përditshme. Ata na mundësojnë të kuptojmë gjendje dhe të parashikojmë ndryshime që janë rezultat i varësisë së ndërsjellë të madhësive.

Shembulli 4

Në një laborator, biologu ndjek shumëzimin e një kolonie bakteresh dhe rezultatet i shkruan në tabelë. Në fillim të ndjekjes kishte 9 000 bakterie.

a) Shkruani funksionin (modelin matematik) me të cilin do të shprehni numrin e bakterieve y në varësi të numrit të ditëve të kaluara x.

b) Sa bakterie do të ketë pas shtatë ditësh?

dita	e parë	e parë	e dytë	e dytë
koha e matjes	10:00	22:00	10:00	22:00
numri i bakterieve	9000	15000	21000	27000

a) Nga tabela konkludojmë se brenda 24 orëve krijohen 12 000 bakterie të reja, sepse $21000 - 9000 = 12000$ dhe $27000 - 15000 = 12000$.

Funksioni i kërkuar është $y = 12000x + 9000$.

b) Pas shtatë ditësh do të ketë $y = 12000 \cdot 7 + 9000 = 93000$ baktere.

Detyra 3

Në një rezervat për zogj, studiuesit dhe vullnetarët deri tani kanë unazuar 3500 zogj. Ata planifikojnë të vazhdojnë me unazimin e 300 zogjve të rinj çdo muaj.

a) Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni numrin e zogjve të unazuar y në varësi të numrit të muajve të kaluar x.

b) Sa zogj të unazuar do të ketë rezervati pas 1 viti?

Shembulli 5

Makina e Jovanit harxhon 0,08 l karburant për çdo kilometër rrugë të përshkuar.

a) Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni karburantin e harxhuar y (në litra) në varësi të rrugës së përshkuar x (në kilometra).

b) Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni karburantin e harxhuar y (në litra) në varësi të rrugës së përshkuar x (në kilometra), nëse dihet se gjatë udhëtimit Jovani harxhoi edhe 1,4 l karburant përderisa automobili ishte në prehje.

c) Sa litra karburant harxhoi Jovani, nëse rruga është e gjatë 620 km?

a) Funksioni i kërkuar është $y = 0{,}08x$.

b) Funksioni është $y = 0{,}08x + 1{,}4$.

c) Jovani harxhoi $y = 0{,}08 \cdot 620 + 1{,}4 = 51$ l.

Detyra 4

Varësia e masës së një materiali nga vëllimi jepet me formulën $m = \rho V$, ku ρ është dendësia e materialit. Dendësia e qumështit është 1,03 kg/l. Sa është masa e:

a) qumështit të paketuar në ambalazh me vëllim 0,5 l,

b) shishes me 1 l qumësht, nëse shishja ka masë 0,1 kg?

Shembulli 6

Një kompani e vogël që prodhon filxhanë qeramikë dëshiron të përcaktojë sa do të jetë fitimi i tyre total, në varësi të numrit të filxhanëve të prodhuar dhe shitur. Kostot fikse të firmës (rryma, qiraja, transporti) janë 12000 denarë në muaj. Për çdo filxhan shpenzohen 80 denarë për material dhe punë. Çmimi i shitjes së një filxhani është 150 denarë.

a) Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni fitimin y në varësi të numrit të filxhanëve të prodhuar x.

b) Njehsoni fitimin e firmës, nëse kompania shet 300 filxhanë.

c) Sa filxhanë duhet të shesë kompania për të mos pasur as fitim, as humbje.

ç) Shpjegoni se si ky funksion mund t'i ndihmojë firmat në planifikimin e prodhimit dhe shitjes.

a) Të ardhurat e kompanisë janë $150x$ (çmimi sipas sasisë). Kostot totale janë $12000 + 80x$. Fitimi është diferenca midis të ardhurave dhe kostove:

$$y = 150x - (12000 + 80x) = 70x - 12000.$$

b) Nëse kompania shet 300 filxhanë, fitimi do të jetë
$y = 70 \cdot 300 - 12000 = 21000 - 12000 = 9000$ denarë.

c) Nuk ka as fitim, as humbje kur
$y = 0,\ \ 0 = 70x - 12000,\ \ x = 12000 : 70 \approx 171{,}4.$

Pra, kompania duhet të shesë të paktën 172 filxhanë për të mos qenë në humbje.

ç) Ky funksion u mundëson pronarëve: të parashikojnë fitimin ose humbjen për çdo sasi prodhimi, të planifikojnë çmimin e një filxhani, si dhe të vendosin nëse ia vlen të rritet prodhimi ose të ulen kostot.

Detyra 5

Një kompani e vogël që prodhon bluza pambuku me stampim dëshiron të përcaktojë sa do të jetë fitimi i tyre total, në varësi të numrit të bluzave të prodhuara dhe të shitura.
Kostot fikse të firmës (qiraja e lokalit, rryma, interneti, mirëmbajtja e makinerive) janë 15 000 denarë në muaj. Për çdo bluzë shpenzohen 120 denarë për material, ngjyrë dhe punë dore.
Çmimi i shitjes së një bluze është 260 denarë.

a) Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni fitimin y në varësi të numrit të bluzave të shitura x.
b) Njehsoni fitimin e firmës nëse shesin 250 bluza në një muaj.
c) Sa bluza duhet të shesë firma për të mos pasur as fitim, as humbje?
ç) Shpjegoni se si ky model matematik mund t'i ndihmojë firmës në planifikimin e prodhimit dhe shitjes.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Midis elementeve të bashkësive A dhe B është dhënë relacioni: a) "... është për 5 më i vogël se ...", b) "... është 3 herë më i vogël se ...". Cili nga këto relacione është funksion?

2. Në një familje, konsumi i ujit varet nga numri i njerëzve që jetojnë në shtëpi. Dihet se çdo person mesatarisht harxhon nga 60 litra ujë në ditë.

   a) Rishkruani dhe plotësoni tabelën.

numri i njerëzve	1	2	4	6
konsumi i ujit (l)				

   b) Shkruani një rregull me të cilin do të shprehni lidhjen midis numrit të njerëzve dhe konsumit të ujit.
   c) A është kjo lidhje funksion?
   ç) Çfarë do të përfaqësonin domeni dhe kodomeni në këtë rast?

3. Në një hulumtim të vogël, nxënësit regjistruan sa gota ujë pinë gjatë ditës:

nxënësi	Ana	Bojan	Selma	Arben
numri i gotave të ujit të pirë	6	8	5	8

a) A përcakton kjo lidhje midis nxënësve dhe numrit të gotave të ujit të pira një funksion?
b) Nëse përgjigja është po, shkruani domenin dhe kodomenin.
Nëse përgjigja është jo, shpjegoni pse lidhja nuk përcakton një funksion.

4. Rishkruani dhe plotësoni tabelat, nëse $f(x) = 2x + 5$ dhe $g(x) = 3(x - 2)$.
me ndihmën e funksionit të dhënë:

x	3	7		
$f(x)$			25	35

x		8		12
$g(x)$	9		24	

5. Mila në pushime mori 15 000 denarë dhe vendosi që çdo ditë të shpenzojë nga 1200 denarë. Shkruani funksionin me të cilin do të shprehni shumën e parave y (në denarë) në varësi të numrit të ditëve x.

6. Shitësi i pjeshkëve duhet të paguajë 600 denarë qira ditore për tezgën në treg. Pjeshkët do t'i shesë me nga 90 denarë për kilogram.
a) Shkruani funksionin që shpreh varësinë e shumës së parave y (në denarë) nga sasia e pjeshkëve të shitura x (në kilogramë)?
b) Sa do të fitojë shitësi nëse shet 150 kilogramë pjeshkë?

7. Një anije deri tani ka përshkuar 250000 km. Nesër niset për një lundrim në të cilin do të përshkojë nga 120 km në ditë.
a) Shkruani funksionin që shpreh varësinë e numrit të kilometrave të përshkuar nga anija y nga numri i ditëve x të kaluara në udhëtim?
b) Sa kilometra gjithsej do të ketë përshkuar anija pas 10 ditësh?

8. Në një shitore, për çdo sasi të blerë mbi 1000 denarë, jepet zbritje 10%.
a) Shkruani funksionin që përcakton çmimin total y nga shuma e faturës x.
b) Shpjegoni se si ky funksion i ndihmon tregtarët të planifikojnë politikat e çmimeve.

9. Një furrë e vogël që prodhon mafinë (muffins) dëshiron të përcaktojë sa do të jetë fitimi i tyre total, në varësi të numrit të muffins të prodhuar dhe shitur. Kostot fikse të furrës (rryma, qiraja, pagat, uji) janë 9000 denarë në muaj. Për çdo muffin shpenzohen 30 denarë për përbërësa dhe punë dore.
Çmimi i shitjes së një muffin është 70 denarë.
a) Gjeni modelin matematik (funksionin) që përcakton varësinë e fitimit y nga numri i mafinëve të shitur x.
b) Njehsoni fitimin e furrës nëse shet 400 mafinë.
c) Sa mafinë duhet të shesë furra për të mos pasur as fitim, as humbje?
ç) Shpjegoni se si ky funksion mund t'i ndihmojë furrës në planifikimin e prodhimit dhe shitjes.

14. FUNKSIONI LINEAR. GRAFIKU I FUNKSIONIT LINEAR

Funksioni linear

Aktivitet

Bileta për kinema kushton 150 denarë.
Për sa do të rritet shuma që duhet të paguajmë, nëse blejmë edhe 1 biletë, edhe 2 bileta, e kështu me radhë? A rritet shuma gjithmonë për të njëjtën sasi? Sa është ajo sasi?

Funksioni i formës $y = kx + n$ (ose $f(x) = kx + n$) ku k dhe n janë numra racionalë, quhet **funksion linear.**
Numri k quhet **koeficienti i drejtimit**, ndërsa numri n - **koeficienti i lirë** i funksionit linear.

Funksionet $y = 7x$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - 5x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 2$, $y = x + \frac{3}{7}$ janë funksione lineare.

Shembulli 1

Kompania e taksive faturon 50 denarë në nisje dhe 20 denarë për çdo km. Në tabelë është dhënë çmimi që duhet të paguajmë pas çdo kilometri të përshkuar.

distanca (km)	0	1	2	3
çmimi (denarë)	50	$20 \cdot 1 + 50 = 70$	$20 \cdot 2 + 50 = 90$	$20 \cdot 3 + 50 = 110$

Vërejmë se pas çdo kilometri të përshkuar, paguajmë edhe 20 denarë të tjerë.
Varësia midis distancës x dhe çmimit që duhet të paguajmë y është përcaktuar me funksionin linear $y = 20x + 50$.
Koeficienti i drejtimit është $k = 20$ dhe tregon për sa rritet y, nëse x rritet për 1. Koeficienti i lirë është $n = 50$ dhe tregon vlerën fillestare, pra vlerën e y kur $x = 0$.

Detyra 1

Cili është koeficienti i drejtimit, e cili koeficienti i lirë i funksionit:
a) $y = 2x + 3$, b) $y = 5x$, c) $y = 4$, ç) $y = x - 2$?

Detyra 2

Shkruani formulën e funksionit linear me koeficient drejtimi dhe koeficient të lirë:
a) $k = 3$, $n = -1$, b) $k = 0, n = -2$, c) $k = -1, n = 0$, ç) $k = 0, n = 0$.

Grafiku i funksionit linear

Shembulli 2

Vizatoni grafikun e funksionit linear $y = x + 4$.

Sipas formulës së funksionit linear

$$y = x + 4$$

njehsojmë vlerën e y për disa vlera të x. Për shembull:

për $x = -3$, $y = -3 + 4 = 1$; për $x = -2$, $y = -2 + 4 = 2$; për $x = -1$, $y = -1 + 4 = 3$;

për $x = 0$, $y = 0 + 4 = 4$; për $x = 1$, $y = 1 + 4 = 5$; për $x = 2$, $y = 2 + 4 = 6$.

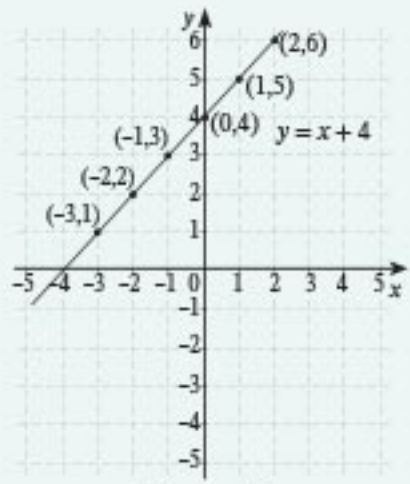
Vlerat e fituara mund t'i shkruajmë në tabelë:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Çiftet e renditura: $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 5)$ dhe $(2, 6)$ e plotësojnë formulën e funksionit linear $y = x + 4$. Për ta themi se janë pika të **grafikut të funksionit linear**.

Çiftet e renditura të fituara mund t'i paraqesim si pika në sistemin koordinativ, ashtu që në boshtin x vendoset koordinata e parë, ndërsa në boshtin y vendoset koordinata e dytë.

Duke i lidhur këto pika, fitojmë një **drejtëz** që në mënyrë pamore paraqet grafikun e funksionit linear $y = x + 4$ (Vizatimi 1).



Vizatimi 1

Shembulli 3

Vizatoni grafikun e funksionit linear $y = 2x + 1$.

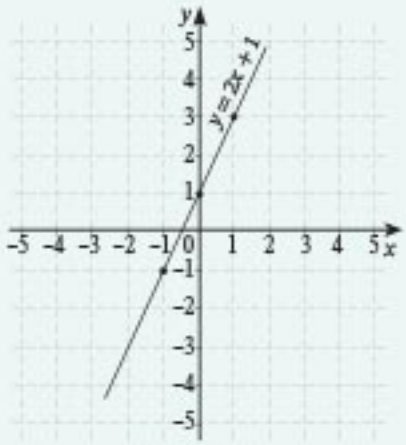
Grafiku i funksionit linear është një drejtëz, pra mjaftojnë dy pika për ta vizatuar (Vizatimi 2).

Ndërtojmë një tabelë në të cilën do të vendosim dy vlera të çfarëdoshme për x-in. Më pas, me formulën e funksionit linear $y = 2x + 1$, llogarisim vlerat përkatëse të y:

për $x = -1$, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$; dhe për $x = 0$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$.

x	-1	0
y	-1	1

Kështu fituam dy pika nga grafiku i funksionit linear: $(-1, -1)$ dhe $(0, 1)$. Do t'i paraqesim pikat në sistemin koordinativ, do të tërheqim drejtëzën që kalon nëpër to dhe në drejtëz do ta shkruajmë formulën. Drejtëza e fituar është grafiku i funksionit linear $y = 2x + 1$.



Vizatimi 2

Detyra 3

Vizatoni grafikun e funksionit:
a) $y = -3x + 2$, b) $y = x - 2$.

Skanoni kodin dhe vizatoni funksionet.

Funksione lineare me të njëjtin koeficient drejtimi. Funksione lineare me të njëjtin koeficient të lirë

Aktivitet

Bima *A* është 5 cm e lartë, ndërsa bima *B* është 3 cm e lartë. Të dy bimët rriten me të njëjtën shpejtësi prej 2 cm në javë.
a) Njehsoni lartësitë e bimëve në 5 javët e para.
b) Si ndryshon lartësia e bimëve për çdo javë?
c) Çfarë është e përbashkët te bimët?

Shembulli 4

Temperatura pas lindjes së diellit në Shkup ishte 3 °C, ndërsa në Manastir ishte −1 °C. Në të dy qytetet, temperatura rritet me 2 °C çdo orë.

a) Për secilin prej qyteteve, shprehni varësinë midis kohës dhe temperaturës me funksion linear. Shpjegoni çfarë vëreni.

b) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve lineare në të njëjtin sistem koordinativ. Shpjegoni çfarë vëreni.

a) Për secilin qytet, shënojmë me x orët pas lindjes së diellit dhe me y temperaturat përkatëse në qytet. Në tabelë janë dhënë vlerat e temperaturave në të dy qytetet, për disa orë pas lindjes së diellit.

numri i orëve pas lindjes së diellit (x)	temperatura në Shkup (y_1)	temperatura në Manastir (y_2)
0	3 °C	−1 °C
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$ °C	$2 \cdot 1 - 1 = 1$ °C
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$ °C	$2 \cdot 2 - 1 = 3$ °C
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$ °C	$2 \cdot 3 - 1 = 5$ °C

Varësia midis kohës x dhe temperaturës y_1, përkatësisht y_2 në secilin prej qyteteve është përcaktuar me funksionet lineare:

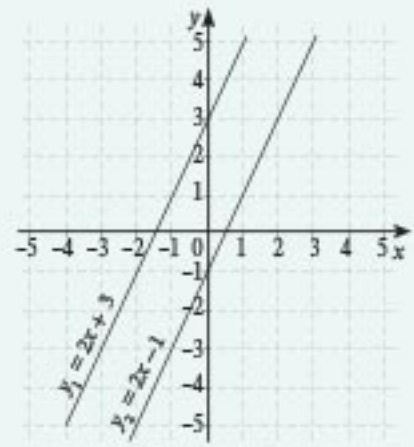
$y_1 = 2x + 3$, për Shkupin dhe $y_2 = 2x - 1$, për Manastirin.

Vërejmë se të dy funksionet kanë **të njëjtin koeficient drejtimi** të barabartë me 2.

b) Në vizatimin 3, në të njëjtin sistem koordinativ, janë vizatuar grafikët e funksioneve linear

$y_1 = 2x + 3$ dhe $y_2 = 2x - 1$.

Vërejmë se grafikët e funksioneve lineare janë **drejtëza paralele**.



Vizatimi 3

Grafikët e funksioneve lineare me **të njëjtin koeficient drejtimi** janë **drejtëza paralele**.

Detyra 4

Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni grafikët e funksioneve lineare

$y_1 = -3x + 1$ dhe $y_1 = -3x - 3$.

a) Si është pozita e ndërsjellë e grafikëve të funksioneve lineare?

b) Krahasoni koeficientët e drejtimit të funksioneve lineare.

Aktivitet

Marko dhe Adora kursejnë në mënyra të ndryshme. Marko ka 100 denarë dhe për çdo muaj kursen nga 300 denarë. Adora ka 100 denarë dhe për çdo muaj kursen nga 500 denarë.

a) Si ndryshon sasia e kursimit të Markos dhe Adorës çdo muaj?

b) Çfarë është e përbashkët te të dy?

Shembulli 5

Ana dhe Bekimi kanë nga 3 ngjitëse. Ana çdo ditë shton nga 2 ngjitëse të reja në koleksionin e saj. Bekimi çdo ditë i dhuron nga një ngjitëse shokut të tij.

a) Për secilin fëmijë, me funksion linear shprehni varësinë midis numrit të ditëve të kaluara dhe numrit të ngjitëseve. Shpjegoni çfarë vëreni.

b) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve lineare në të njëjtin sistem koordinativ. Shpjegoni çfarë vëreni.

a) Tek Ana, numri i ngjitëseve rritet çdo ditë për dy, tek Bekimi zvogëlohet për një.
Le të jetë x numri i ditëve të kaluara, y numri i ngjitëseve. Në tabelë janë dhënë numri i ngjitëseve te të dy fëmijët, gjatë disa ditëve.

numri i ditëve të kaluara (x)	numri i ngjitëseve të Anës (y_1)	numri i ngjitëseve të Bekimit (y_2)
0	3	3
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$-1 \cdot 1 + 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$-1 \cdot 2 + 3 = 1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$

Varësia midis numrit të ditëve të kaluara x dhe numrit të ngjitëseve y_1, përkatësisht y_2 është përcaktuar me funksionet lineare:

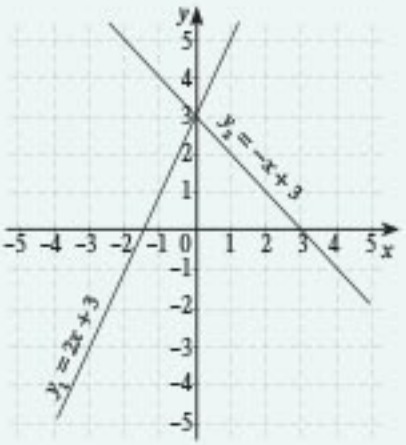
Ana $y_1 = 2x + 3$, dhe Bekimi $y_2 = -x + 3$.

Vërejmë se të dy funksionet kanë të njëjtin koeficient të lirë të barabartë me 3.

b) Në vizatimin 4, në të njëjtin sistem koordinativ, janë vizatuar grafikët e funksioneve lineare

$y_1 = 2x + 3$ dhe $y_2 = -x + 3$.

Vërejmë se grafikët e funksioneve lineare priten në boshtin y – në pikën (0,3).



Vizatimi 4

Grafikët e funksioneve lineare me të njëjtin koeficient të lirë n janë drejtëza që e presin boshtin y në pikën $(0, n)$.

Detyra 5

Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni grafikët e funksioneve lineare:
$y_1 = -3x - 1$ dhe $y_2 = x - 1$.
a) Në cilën pikë priten grafikët e funksioneve lineare?
b) Krahasoni koeficientët e lirë të funksioneve lineare.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Cili është koeficienti, e cili koeficienti i lirë i funksionit:
   a) $y = 3x + 4$, b) $y = x$, c) $y = -5$, ç) $y = -x - 2$?
2. Shkruani formulën e funksionit linear me koeficient drejtimi dhe koeficient të lirë:
   a) $k = -3$, $n = -4$, b) $k = 0$, $n = 3$, c) $k = 6$, $n = 0$, ç) $k = 2$, $n = -5$.
3. Vizatoni grafikun e funksionit linear: a) $y = -x + 3$, b) $y = 3x - 2$, c) $y = 2x$.
4. Ndani funksionet lineare në grupe drejtëzash paralele:
   $y = 2x + 15$, $y = 5x - 7$, $y = x + 3$, $y = -7x - 2$, $y = 2x$, $y = 5x$,
   $y = -7x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -7x$, $y = x$, $y = 5x - 1$, $y = 2x - 7$.
5. Shkruani funksionin linear, grafiku i të cilit është drejtëz paralele me drejtëzën $y = 5x - 6$ dhe e pret boshtin y – në pikën $(0, 7)$.
6. Shkruani funksionin linear, grafiku i të cilit është drejtëz paralele me drejtëzën $y = 4x + 3$ dhe e pret boshtin $y = x + 1$ në pikën.
7. Për cilën vlerë të a-së, grafikët e funksioneve $y = (2a + 3)x + 1$ dhe $y = (a - 5)x + 2$ janë drejtëza paralele?
8. Për cilën vlerë të a-së, grafiku i funksionit $y = (a + 2)x - 2a + 3$ e pret boshtin y në pikën $(0,5)$?
9. Mateu niset me biçikletë në orën 8, ndërsa Andrea në orën 9. Të dy vozisin me shpejtësi konstante prej 15 km/h.
   a) Shkruani formulat e funksioneve lineare që përshkruajnë lëvizjen e Mateut dhe Andrea-s,
   b) Vizatoni grafikët e tyre. Cila është pozita e tyre e ndërsjellë?
10. Dushko dhe Davidi për ditëlindje morën nga 5000 denarë. Dushko vendosi t'i kursejë dhe për çdo ditë të shtojë edhe nga 50 denarë, ndërsa Davidi çdo ditë nga paratë e tij shpenzonte nga 100 denarë.
    a) Shkruani funksionin linear që shpreh shumën e parave y (në denarë) në varësi të kohës x (në ditë).
    b) Cilat janë koordinatat e pikës së prerjes së grafikëve të dy funksioneve?

Hulumtim

Mendoni dhe shpjegoni si mund ta vizatoni grafikun e funksionit linear
$y = 3x - 1$, në të njëjtin sistem koordinativ në të cilin është vizatuar grafiku i funksionit linear $y = 3x + 2$, pa bërë tabelë të vlerave.
Përgjithëso përfundimin për funksionin e formës $y = kx + n$.

15. RRJEDHA E FUNKSIONIT LINEAR

Konceptin "rrjedhë" e lidhim natyrshëm me rrjedhën e kohës, rrjedhën e lumit, etj. Në këtë kuptim, një lumë ka rrjedhën e vet në të cilën niveli i ujit mund të rritet, të ulet ose të mbetet konstant. Do të zbulojmë se nga çka varet rrjedha e një funksioni linear.

Funksioni linear rritës

Aktivitet

Afrimi vozit biçikletë drejt majës së Vodnos. A do të ndryshojë lartësia mbi nivelin e detit në të cilën ndodhet në minutat në vijim? A do të rritet apo do të zvogëlohet?

Shembulli 1

Iva vendosi të kursejë nga paratë e xhepit, ashtu që kursimit të saj prej 2500 denarësh për çdo ditë do t'i shtojë nga 75 denarë.

a) Shkruani funksionin linear për varësinë e shumës së kursyer y (në denarë) nga koha e kursimit x (në ditë).

b) Me tabelë paraqitni këtë varësi për 5 ditët e para.

c) Si është shenja e koeficientit të drejtimit të funksionit linear?

ç) Si ndryshon vlera e ndryshores y me rritjen e vlerës së ndryshores x?

a) Kursimi fillestar i Ivas është 2500 denarë. Çdo ditë ajo shton nga 75 denarë, pra pas x ditësh do të ketë $2500 + 75x$. Pra, është përcaktuar funksioni linear $y = 75x + 2500$ $y = 75x + 2500$.

b)

koha e kursimit x (në ditë)	1	2	3	4	5
shuma e kursyer (y në denarë)	2575	2650	2725	2800	2875

c) Koeficienti i drejtimit është $k = 75 > 0$. Shenja e koeficientit të drejtimit është pozitive.

ç) Nga tabela mund të shohim se me rritjen e vlerave të ndryshores x rritet vlera e ndryshores y. Për shembull, nga $3 < 5$ kemi se $2725 < 2800$.

Për funksionin linear të dhënë themi se është **funksion rritës**.

Shembulli 2

Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni funksionet lineare rritëse $y = x + 3$ dhe $y = 2x - 1$.

a) Cili funksion linear rritet më shpejt?

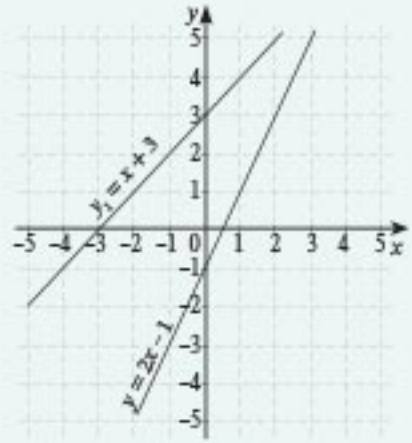
b) Krahasoni koeficientët e tyre të drejtimit? Çfarë mund të përfundohet?

Grafikët e funksioneve lineare janë paraqitur në vizatimin 1.

a) Nga grafikët shohim se grafiku i funksionit linear $y = 2x - 1$ është më i pjerrët se grafiku i funksionit linear $y = x + 3$, pra funksioni linear $y = 2x - 1$ **rritet më shpejt** se funksioni linear $y = x + 3$.

b) Funksioni linear $y = 2x - 1$ (k = 2) ka koeficient drejtimi më të madh në krahasim me funksionin linear $y = x + 3$ (k = 1).

x	0	1
$y = x + 3$	3	4
$y = 2x - 1$	−1	1



Vizatimi 1

Midis dy funksioneve lineare rritëse, më shpejt rritet funksioni linear me koeficient drejtimi më të madh.

Ka situata nga jeta e përditshme në të cilat, duke vendosur një funksion, mund të parashikojmë rrjedhën e ngjarjeve dhe të planifikojmë aktivitete që na përshtaten më shumë.

Shembulli 3

Ndërmarrja 1 për telefoninë celulare ka ofertën: 1 denar për çdo minutë bisede telefonike dhe 200 denarë tarifë mujore.
Ndërmarrja 2 ofron 2 denarë për çdo minutë bisede telefonike dhe 100 denarë tarifë mujore.

a) Për të dy ndërmarrjet, shkruani funksionin linear për varësinë e çmimit y (në denarë) nga kohëzgjatja e bisedave telefonike x (në minuta).
b) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve lineare në të njëjtin sistem koordinativ.
c) Shpjegoni cila ndërmarrje është më e favorshme në varësi të gjatësisë së bisedave gjatë muajit?

a) Funksioni linear për ndërmarrjen 1 është $y = x + 200$.
Funksioni linear për ndërmarrjen 2 është $y = 2x + 100$,

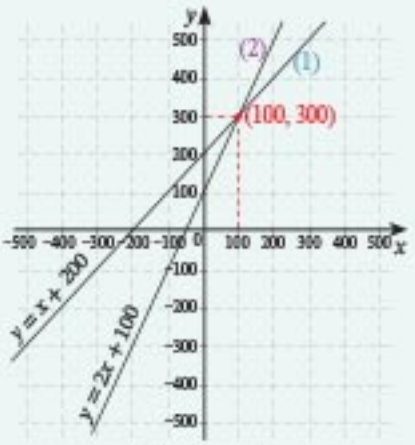
b) Grafikët e të dy funksioneve lineare në të njëjtin sistem koordinativ janë dhënë në vizatimin 2.

kompania 1

kohëzgjatja e bisedave (x në minuta)	0	50	100
çmimi (y në denarë)	200	250	300

kompania 2

kohëzgjatja e bisedave (x në minuta)	0	50	100
çmimi (y në denarë)	100	200	300



Vizatimi 2

c) Drejtëzat priten në pikën (100, 300).
Koordinata $x = 100$ është numri i minutave.
Koordinata $y = 300$ është çmimi mujor i bisedës.
Vlerat e pikës së prerjes nënkuptojnë se për 100 minuta bisedë do të paguajmë njësoj (300 denarë) te të dy kompanitë.
Për të përcaktuar se cila ofertë është më e favorshme, do të shqyrtojmë rrjedhën e të dy funksioneve në lidhje me pikën e prerjes. Nga grafikët shohim se:

- nëse flasim më shumë se 100 minuta, do të na përshtatet oferta, çmimi i së cilës rritet më ngadalë, dhe kjo është ndërmarrja 1.
- nëse flasim më pak se 100 minuta, do të na përshtatet oferta, çmimi i së cilës rritet më shpejtë, dhe kjo është ndërmarrja 2.

Detyra 1

Në tregun 1, qiraja ditore është 400 denarë, ndërsa çmimi i mollëve është 50 denarë për kilogram.
Në tregun 2, qiraja ditore është 500 denarë, ndërsa çmimi i mollëve është 70 denarë për kilogram.

a) Shpjegoni në cilin treg është më e leverdishme për shitësin të marrë me qira tezgë, në varësi të sasisë së mollëve të shitura.
b) Në cilin treg do të fitojë më shumë shitësi nëse shet 400 kg mollë, e në cilin treg nëse shet 800 kg mollë?

Funksioni linear rënës

Aktivitet

Teona ka 10 lëngje. Ajo çdo ditë i jep nga një lëng shoqes së saj Esmës. A do të rritet apo zvogëlohet numri i lëngjeve të Teonës në ditët në vijim?

Shembulli 4

Andrea në llogarinë e saj ka 8500 denarë. Ajo për çdo ditë shpenzon nga 500 denarë nga llogaria.

a) Shkruani funksionin linear për varësinë e shumës së parave në llogari y (në denarë) nga koha e kaluar x (në ditë).

b) Me tabelë paraqiteni këtë varësi për 5 ditët e para.

c) Çfarë shenje ka koeficienti i drejtimit i funksionit linear?

ç) Si ndryshon vlera e ndryshores y me rritjen e vlerës së ndryshores x?

a) Nga kushtet shohim se shuma fillestare prej 8500 denarësh zvogëlohet çdo ditë për 500 denarë. Me këtë përcaktohet funksioni linear $y = -500x + 8500$.

b)

koha e shpenzimeve (x në ditë)	1	2	3	4	5
shuma në llogari (y në denarë)	8000	7500	7000	6500	6000

c) Koeficienti i drejtimit është $k = -500 < 0$. Shenja e koeficientit të drejtimit është negative.

ç) Nga tabela mund të shohim se me rritjen e vlerave të ndryshores x zvogëlohet vlera e ndryshores y. Për shembull, për $2 < 4$ kemi se $7500 > 6500$.
Për funksionin linear të dhënë themi se është **funksion rënës (ose zbritës).**

Shembulli 5

Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni funksionet lineare rënëse
$y = -x + 3$ dhe $y = -2x + 1$.

a) Cili funksion linear zbret më shpejt?

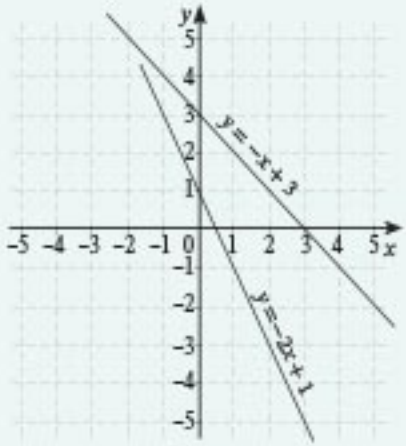
b) Krahaso koeficientët e tyre të drejtimit? Çfarë mund të përfundohet?

Grafikët e funksioneve lineare janë paraqitur në vizatimin 3.

a) Nga grafikët shohim se grafiku i funksionit linear $y = -2x + 1$ është më i pjerrët se grafiku i funksionit linear $y = -x + 3$, pra funksioni linear $y = -2x + 1$ **zbret më shpejt** se funksioni linear $y = -x + 3$.

b) Funksioni linear $y = -2x + 1$ $(k = -2)$ ka **koeficient drejtimi më të vogël** në krahasim me funksionin linear $y = -x + 3$ $(k = -1)$.

x	0	1
$y = -x + 3$	3	2
$y = -2x + 1$	1	-1



Vizatimi 3

Midis dy funksioneve lineare rënëse, më shpejt zbret funksioni linear me koeficient drejtimi më të vogël.

Shembulli 6

Studiuesit vendosën termometra për të matur temperaturën e ujit të detit dhe ajrit në 2 pozicione të bregdetit. Termometri 1 mati fillimisht në sipërfaqen e detit dhe pas çdo ore zbret nga 5 metra. Termometri 2 ndodhet 2 metra nën nivelin e detit dhe njëkohësisht me termometrin 1 fillon të zbresë me 4 metra në orë.

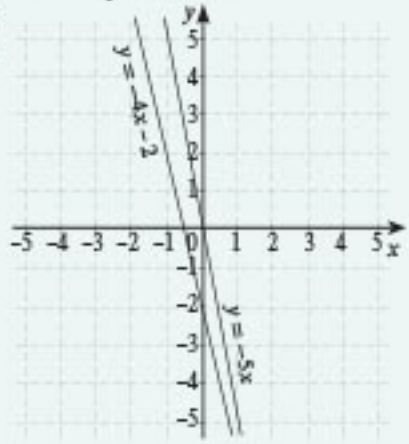
a) Shkruani formulat për varësinë e thellësisë në të cilën ndodhet termometri y (në metra) nga koha e zbritjes x (në orë) për të dy termometrat.

b) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve në të njëjtin sistem koordinativ.

c) Cili nga termometrat do të arrijë më shpejt të matë temperaturën në lokacionin që ndodhet në -150 metra lartësi mbi nivelin e detit?

a) Për termometrin 1 kem: $y = -5x$, ndërsa për termometrin 2 kemi: $y = -4x - 2$.

b)



Vizatimi 4

c) Nëse termometri 1 është në -150 metra lartësi mbi nivelin e detit, kemi që $y = -150$. Prandaj, në formulën $y = -5x$ zëvendësojmë $-150 = -5x$, pra $x = 30$ orë.
Për termometrin 2 kemi:
$y = -4x - 2$, $-150 = -4x - 2$, $-148 = -4x$,
$x = 37$ orë.
Termometri 1 do të arrijë më shpejt në pozicionin që ndodhet në -150 metra lartësi mbi nivelin e detit.

Detyra 2

Nga maja e një kodre, Mersiha zbret me teleferik, ndërsa Ademi nga pista e skive, përgjatë së cilës do të kalojë 1 km rrugë më të gjatë se rruga që përshkon teleferiku. Teleferiku lëviz me shpejtësi 15 km/h, ndërsa Ademi skijon me shpejtësi 25 km/h.

a) Shkruani formulat për varësinë e rrugës së përshkuar y (në kilometra) nga koha x (në orë) për zbritjen e Mersihës dhe Ademit,

b) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve në të njëjtin sistem koordinativ,

c) Sa është rruga që ka përshkuar secili prej tyre, nëse pas 10 minutash arritën njëkohësisht në rrëzën e kodrës?

Funksioni linear as rritës e as rënës

Aktivitet

Një kompani prodhoi 300 produkte. Për shkak të një defekti në makineri, prodhimi u ndërpre. A do të rritet, do të ulet, apo do të mbetet i pandryshuar (as nuk do të rritet, as nuk do të ulet) numri i produkteve që prodhoi kompania?

Shembulli 7

Në një frigorifer, temperatura është $-4°C$ gjatë gjithë ditës.

a) Shkruani formulën për varësinë e temperaturës y në frigorifer nga numri i orëve x.

b) Me tabelë paraqiteni këtë varësi për 3 orët e para.

c) Sa është koeficienti i drejtimit të funksionit linear?

ç) Si ndryshon vlera e ndryshores y në varësi të vlerës së ndryshores x?

a) Temperatura është $-4°C$ dhe nuk ndryshon gjatë ditës. Në këtë mënyrë përcaktohet funksioni linear $y = -4$

b)

koha e kaluar (x në orë)	1	2	3
temperatura (y)	-4	-4	-4

c) Koeficienti i drejtimit është $k = 0$.

ç) Nga tabela mund të shohim se me ndryshimin e vlerave të ndryshores x nuk ndryshon vlera e ndryshores y. Për funksionin linear të dhënë themi se është **funksion as rritës e as rënës** (funksion konstant).

Funksioni linear $y = kx + n$ *është*:

- rritës, nëse $k > 0$,
- rënës, nëse $k < 0$,
- as rritës e as rënës, nëse $k = 0$.

Skanoni kodin dhe shqyrtoni grafikët e funksioneve.

Shembulli 8

Në vizatimin 5 janë dhënë grafikët e funksioneve lineare: a) $y = 3x + 1$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, c) $y = 2$.

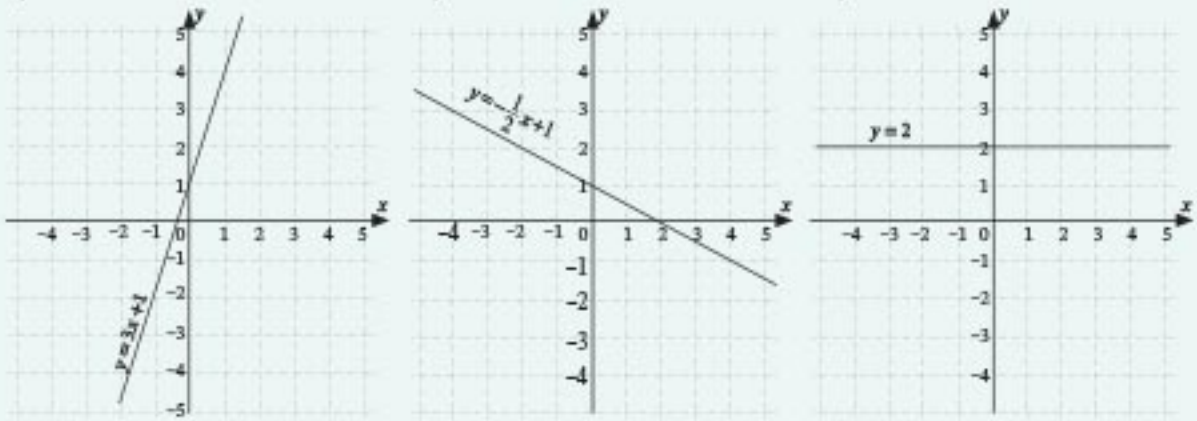
Për secilin nga funksionet lineare, përcaktoni nëse është rritës, rrënës, ose as rritës e as rrënës.

Nga grafiku i funksionit linear $y = 3x + 1$, vërejmë se me rritjen e vlerave të ndryshores x rriten vlerat e ndryshores y. Prandaj, funksioni linear është rritës.

Te funksioni linear $y = -\frac{1}{2}x + 1$, me rritjen e vlerave të ndryshores x zvogëlohen vlerat e ndryshores y. Prandaj, funksioni është rrënës.

Funksioni linear $y = 2$ nuk është as rritës e as rrënës.

a) b) c)



Vizatimi 5

Detyra 3

Janë dhënë funksionet lineare:

$y = -x + 1, y = 4x + 1, y = -3x, y = -2x + 3, y = 2x$ dhe $y = x + 2$.

a) Vizatoni funksionet rritëse në një sistem, dhe rrënëset në një sistem tjetër koordinativ.

b) Ndërmjet funksioneve lineare rritëse, përcaktoni cili rritet më shpejt?

c) Ndërmjet funksioneve lineare rrënëse, përcaktoni cili zbret më shpejt?

Detyra 4

Janë dhënë funksionet lineare:

$y = -53x + 7$, $y = 8x + 19$, $y = -45$, $y = -50x + 23$, $y = 78x$, $y = x + 89$,
$y = -x + 95$, $y = 100x + 1$, $y = -325x$, $y = 25$, $y = x + 36$.

Shkruani të gjitha funksionet që janë:

a) rritëse. Cili prej tyre rritet më shpejt? Pse?

b) rrënëse. Cili prej tyre zbret më shpejt? Pse?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni funksionet lineare:

$y = x + 2, y = 5x - 3$ dhe $y = \frac{1}{4}x + 3$.

a) Funksionet janë rritëse apo rënëse? b) Cili funksion rritet më shpejt?

2. Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni funksionet lineare: $y = -x + 1, y = -3x + 2$ dhe $y = -\frac{3}{4}x$.

a) Funksionet janë rritëse apo rënëse? b) Cili funksion zbret më shpejt?

3. Janë dhënë funksionet lineare:

$y = -3x + 5$, $y = 9x + 20$, $y = -75$, $y = -52x + 3$, $y = 87x$, $y = x + 9$,
$y = -x + 94$, $y = 50x + 3$, $y = -758x$, $y = 285$, $y = x + 96$.

Shkruani të gjitha funksionet që janë:

a) rritëse. Cili prej tyre rritet më shpejt? b) rënëse. Cili prej tyre zbret më shpejt?

4. Pa vizatuar qëllojani nëse funksioni do të jetë rritës apo rënës për:

a) Çmimi total i transportit me taksi në varësi të numrit të kilometrave të përshkuar, nëse 50 denarë është fillimi dhe 30 denarë çdo kilometër të kaluar;

b) Sasia e ujit në një pishinë në varësi të kohës, nëse në pishinë ka 8000 litra ujë dhe çdo orë derdhen nga 100 litra;

c) Shuma që do t'i mbetet Azrës në varësi të ditëve të kaluara në pushim, nëse ka marrë 20000 denarë dhe planifikon të shpenzojë nga 1500 denarë në ditë;

ç) Shuma e faturës së telefonit në varësi të kohëzgjatjes së bisedave, nëse kompania faturon 200 denarë taksë fillestare dhe 2 denarë për çdo minutë bisede telefonike.

5. Temperatura në Ohër në orën 6 të mëngjesit ishte −3 °C, dhe deri në mesditë rritej me 2 °C çdo orë.

a) Shkruani funksionin linear që shpreh varësinë e temperaturës y (në gradë Celsius) nga koha x (në orë).

b) Vizatoni grafikun e funksionit linear.

c) Shqyrtoni nëse funksioni linear është rritës apo rënës.

ç) Përcaktoni kur do të jetë temperatura 0 °C.

6. Marko ka dy oferta pune në dyqane biçikletash. Në të parën i ofrojnë 1000 denarë pagë ditore dhe 500 denarë për çdo biçikletë të shitur, ndërsa në të dytën 1500 denarë pagë ditore dhe 200 denarë për çdo biçikletë të shitur.

a) Shkruani funksionin linear që shpreh varësinë e shumës së fituar y (në denarë) nga koha x (në ditë).

b) Shpjegoni cila ofertë është më e favorshme në varësi të numrit të biçikletave të shitura.

7. Roza dëshiron të punësojë një shitëse në lulishten e saj. Heziton nëse t'i ofrojë 1200 denarë pagë ditore dhe 40 denarë për çdo buqetë të shitur, ose 1500 denarë dhe 20 denarë për çdo buqetë të shitur. Muajin e kaluar në lulishte shiteshin nga 30 buqeta në ditë.

a) Për sa buqeta të shitura në ditë të dyja ofertat janë njëlloj të favorshme?

b) Cila ofertë është më e favorshme për Rozën nëse shitja mbetet në 30 buqeta në ditë?

8. Qyteti dëshiron të nxisë përdorimin e trotinetëve elektrikë për transport në punë. Ekzistojnë dy mundësi për qytetarët:
Mundësia A: Blerja e trotinetit të vet elektrik me çmim 24000 denarë, me kosto shtesë për karikim prej 20 denarë në ditë.
Mundësia B: Marrja me qira e trotinetit përmes aplikimit me çmim 150 denarë në ditë, pa kosto tjera.

a) Shkruani funksionet lineare që përcaktojnë varësinë e çmimit total C nga numri i ditëve të përdorimit x për të dy mundësitë.
b) Vizatoni grafikët e tyre në të njëjtin sistem koordinativ.
c) Gjeni pas sa ditësh përdorimi kostot për të dy mundësitë do të jenë të barabarta.
ç) Shpjegoni cila mundësi është më e favorshëm afatshkurtër, e cila afatgjatë dhe pse.
d) Propozoni një ndryshim të thjeshtë në çmime ose kushte që do ta bënte opsionin B më të arritshëm për qytetarët.

Hulumtim

Bekimi ngjitet në rrëshqitje sipas funksionit y_1, dhe zbret sipas funksionit y_2 (Vizatimi 6).

a) Çfarë numri është koeficienti i drejtimit k_1 i funksionit y_1?

b) Çfarë numri është koeficienti i drejtimit k_2 i funksionit y_2?

c) Cilat shkallë për ngjitje do të jenë më të pjerrëta: ato të vendosura sipas funksionit $y = 2x + 5$ apo sipas funksionita $y = 3x + 4$?

ç) A mund të vendoset pjesa e rrëshqitjes për zbritje sipas një funksioni konstant? Shpjegoni përgjigjen.



Vizatimi 6

16. GJETJA E FUNKSIONIT LINEAR TË DHËNË ME GRAFIK

Prerjet e grafikut të funksionit linear me boshtet koordinative

Nëse e dimë formulën e funksionit linear, mund të gjejmë pikat në të cilat grafiku i tij pret boshtet koordinative. Gjithashtu, nëse i dimë pikat e prerjes me boshtet, mund të vizatojmë grafikun e funksionit dhe të shkruajmë formulën e atij funksioni.

Aktivitet

1. Në cilin bosht koordinativ ndodhet pika: a) (1,0), b) (0,−2)?
2. Verifikoni nëse pikat (1,0) dhe (0,−2) i përkasin grafikut të funksionit linear $y = 2x - 2$.

Shembulli 1

Është dhënë funksioni $y = -2x + 4$.

a) Gjeni pikat e prerjes së grafikut të funksionit linear me boshtet koordinative.

b) Gjeni zerot e funksionit linear.

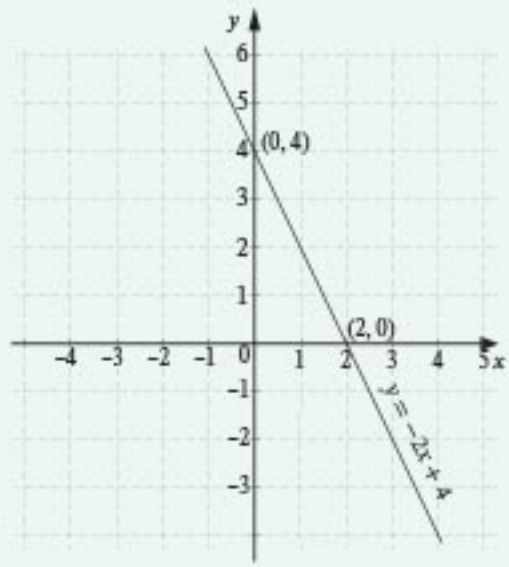
c) Vizatoni grafikun e funksionit linear.

a) **Pika e prerjes së grafikut të funksionit linear me boshtin** y është pika e grafikut të funksionit linear për të cilën koordinata x është e barabartë me 0.
Për $x = 0$, njehsojmë $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.
Prandaj, pika (0, 4) është pika e prerjes së grafikut me boshtin y.
Pika e prerjes së grafikut të funksionit linear me boshtin x është pika e grafikut të funksionit linear për të cilën koordinata y është e barabartë me 0.
Për $y = 0$, duke zgjidhur barazimin $-2x + 4 = 0$, fitojmë $x = 2$.
Prandaj, pika (2, 0) është pika e prerjes së grafikut me boshtin x.

b) **Zero të funksionit linear** e quajmë vlerën e ndryshores x për të cilën vlera e funksionit është e barabartë me zero 0.
Prandaj, zero e funksionit të dhënë është $x = 2$.

c) Grafiku i funksionit linear të dhënë kalon nëpër pikat (0, 4) dhe (2, 0) (Vizatimi 1).

x	0	2
y	4	0



Vizatimi 1

Detyra 1

Është dhënë funksioni linear $y = 10 - 5x$.

a) Gjeni koordinatat e pikave të prerjes së funksionit linear me boshtet koordinative.

b) Gjeni zerot e funksionit linear. c) Vizatoni grafikun e funksionit linear.

Gjetja e funksionit linear të dhënë me grafikun e tij

Për të shkruar funksionin linear të dhënë me grafikun e tij

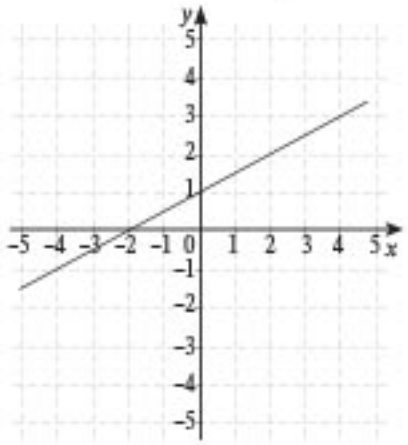
$$y = kx + n,$$

është e nevojshme të gjejmë vlerat e koeficientit të drejtimit k dhe koeficientit të lirë n. Do të zbulojmë dy mënyra se si t'i gjejmë vlerat e tyre nga grafiku i funksionit.

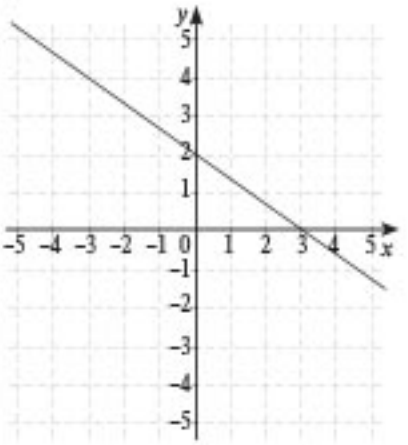
Shembulli 2

Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ të dhënë me grafikun në vizatimin 2:

a)



b)



Vizatimi 2

Le të shpjegojmë mënyrën e parë për të gjetur koeficientin e drejtimit dhe koeficientin e lirë.

a) **Hapi i parë.** Vërejmë se grafiku i funksionit linear e pret boshtin y në pikën $(0,1)$, pra koeficienti i lirë do të jetë $n = 1$. Nëse në formulën $y = kx + n$ zëvendësojmë $n = 1$, fitojmë $y = kx + 1$

$$y = kx + 1.$$

Hapi i dytë. Vërejmë se grafiku i funksionit linear e pret boshtin x në pikën $(-2, 0)$. Koordinatat e saj i zëvendësojmë në formulën $y = kx + 1$. Nga këtu fitojmë se

$$0 = k \cdot (-2) + 1, \quad -1 = -2k, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Funksioni linear që i përgjigjet grafikut të dhënë është $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) **Hapi i parë.** Grafiku i funksionit linear e pret boshtin y në pikën (0,2), pra koeficienti i lirë do të jetë $n = 2$. Nëse në formulën $y = kx + n$ zëvendësojmë $n = 2$, fitojmë

$$y = kx + 2.$$

Hapi i dytë. Grafiku i funksionit linear e pret boshtin x në pikën (3, 0). Koordinatat e saj i zëvendësojmë në formulën $y = kx + 2$. Nga këtu fitojmë se

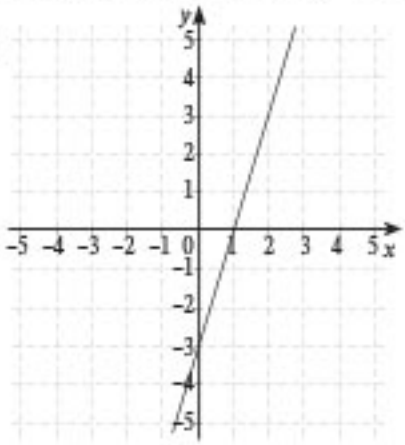
$$0 = k \cdot 3 + 2, \quad -2 = 3k, \quad k = -\frac{2}{3}.$$

Sipas grafikut të dhënë, morëm funksionin linear $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

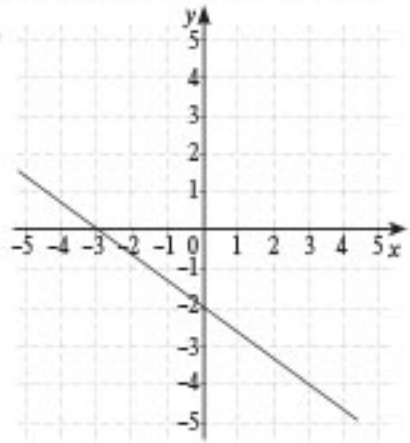
Detyra 2

Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ të dhënë me grafikun në vizatimin 3:

a)



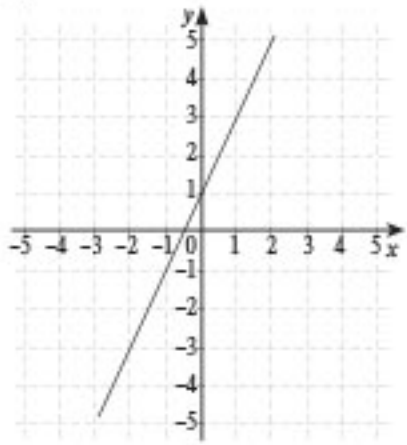
b)



Vizatimi 3

Shembulli 3

Shkruani funksionin linear nga grafiku në vizatimin 4.



Vizatimi 4

Sipas grafikut, ndërtojmë një tabelë me vlera për katër numra të plotë të njëpasnjëshëm x.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

+2 +2 +2

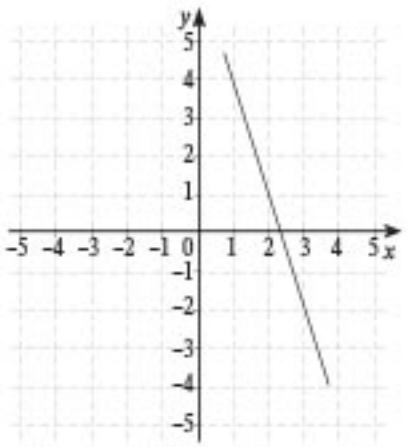
Vërejmë se rregulli për kufizën e ardhshme të vargut të vlerave y është "shto 2".
Prandaj, në tabelë shtojmë një rresht me vlera të dyfishuara të numrit x.

	x	1	2	3	4	
·2	y	3	5	7	9	+1
	$2x$	2	4	6	8	

Nëse vlerat e $2x$ i krahasojmë me vlerat e y, shohim se secila vlerë e $2x$ e rritur për 1 është e barabartë me vlerën përkatëse të y.
Pra, funksioni linear është $y = 2x + 1$.

Shembulli 4

Shkruani funksionin linear nga grafiku në vizatimin 5.



Vizatimi 5

Sipas grafikut, ndërtojmë një tabelë me vlera për katër numra të plotë të njëpasnjëshëm x.

x	1	2	3	4
y	4	1	−2	−5

-3 -3 -3

Vërejmë se rregulli për kufizën e ardhshme të vargut të vlerave y është "shto −3".
Prandaj, në tabelë shtojmë një rresht me vlera që janë prodhim i −3 dhe numrit x.

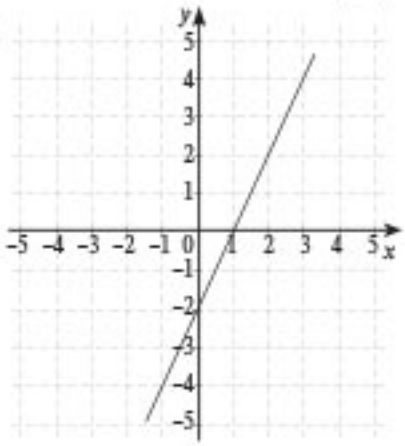
	x	1	2	3	4	
·(−3)	y	4	1	−2	−5	+7
	$-3x$	−3	−6	−9	−12	

Nëse vlerat e $-3x$ i krahasojmë me vlerat e y, shohim se secila vlerë e $-3x$ e rritur për 7 është e barabartë me vlerën përkatëse të y.
Pra, funksioni linear është $y = -3x + 7$.

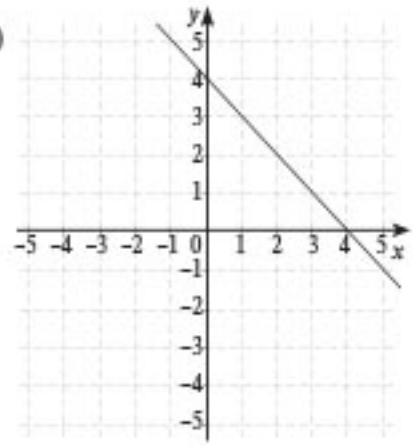
Detyra 3

Shkruani funksionin linear nga grafiku në vizatimin 6.

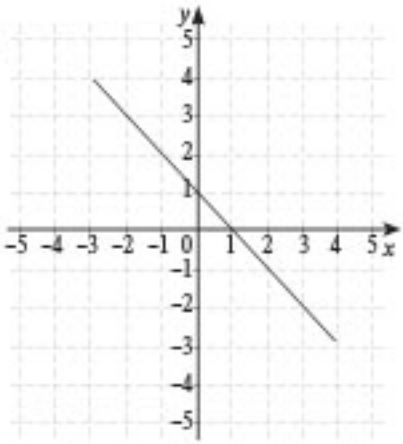
a)



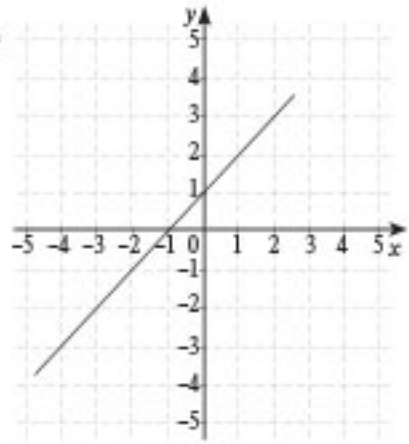
b)



c)



ç)

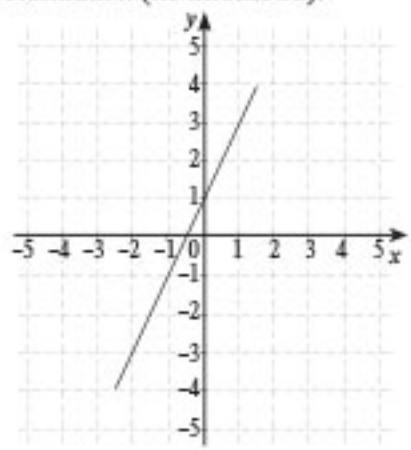


Vizatimi 6

Shembulli 5

Marko vozit biçikletë përgjatë një shtegu që ngjitet. Grafiku tregon varësinë e ndryshimit të lartësisë mbi nivelin e detit y (në metra) nga distanca e përshkuar x (në kilometra).

a) Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ të dhënë me grafikun në vizatimin 7.
b) Shpjegoni kuptimin e koeficientit të drejtimit k dhe të koeficientit të lirë n.
c) Në çfarë lartësie mbi nivelin e detit do të jetë Marko kur të ketë përshkuar 2 km.



Vizatimi 7

a) Nga grafiku vërejmë se drejtëza e pret boshtin y në pikën (0, 1), që do të thotë $n = 1$.
Përveç kësaj, grafiku kalon nëpër pikën (1, 3), nga ku gjejmë se
$3 = k \cdot 1 + 1,\ k = 2.$
Pra, funksioni linear është $y = 2x + 1$.

b) Koeficienti $k = 2$ do të thotë se për çdo 1 km të përshkuar, lartësia mbi nivelin e detit rritet me 2 m. Kufiza e lirë n = 1 do të thotë se kur Marko është në fillim të shtegut, pra kur $x = 0$, lartësia mbi nivelin e detit e shtegut është 1 m.

c) Vlera e funksionit në $x = 2$ është $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ m. Kjo do të thotë se, kur Marko të ketë përshkuar 2 km, do të jetë në 5 m lartësi mbi nivelin e detit.

Shënim. Edhe pse grafiku është paraqitur për të gjitha vlerat e x, në kontekstin e detyrës ka kuptim vetëm pjesa ku $x \geq 0$, sepse Marko nuk mund të përshkojë "distancë negative".

Detyra 4

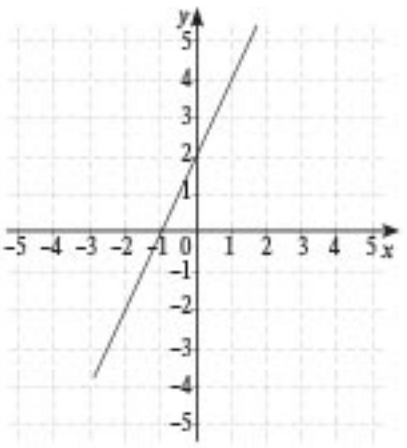
Petari ngjitet në një shteg malor.
Grafiku tregon varësinë e lartësisë mbi nivelin e detit y (në metra) nga distanca e përshkuar x (në kilometra).

a) Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ të dhënë me grafikun në vizatimin 8.

b) Shpjegoni kuptimin e koeficientit të drejtimit k dhe të koeficientit të lirë n.

c) Në çfarë lartësie mbi nivelin e detit do të jetë Petari kur të ketë përshkuar 2,5 km.

ç) Pas sa kilometrash Petari do të jetë në 14 m lartësi?



Vizatimi 8

DETYRA PËR USHTRIME

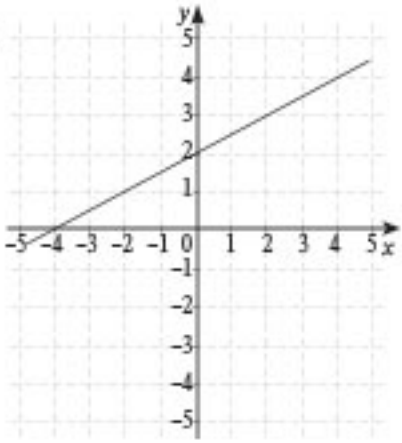
1. Gjeni pikat e prerjes me boshtet koordinative të grafikut të funksionit linear:
a) $y = 2x + 5$, b) $y = -3x + 1$.

2. Gjeni zerot e funksionit linear: a) $y = x - 5$, b) $y = -x + 2$.

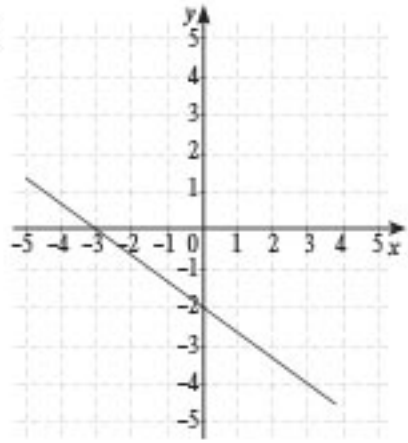
3. Vizatoni grafikun e funksionit linear me ndihmën e pikave të tij të prerjes me boshtet koordinative: a) $y = -2x$, b) $y = -2x + \frac{1}{2}$, c) $y = \frac{3}{5}x - 3$.

4. Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ të dhënë me grafikun në vizatimin 9.

a)



b)



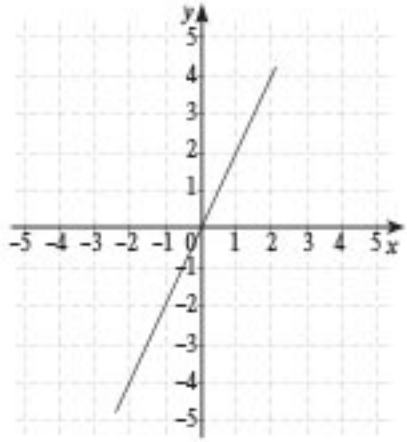
Vizatimi 9

5. Pikat e prerjes së grafikut të funksionit linear me boshtet koordinative janë:
a) (3, 0) dhe (0, 4), b) (−4, 0) dhe (0, 2).
Vizatoni funksionin linear dhe shkruani formulën e tij.

6. Vizatoni funksionin linear me zero në pikën $x = 2$, i cili me boshtin x formon kënd prej 45°. Shkruani formulën e funksionit nga grafiku i tij.

7. Vizatoni funksionin linear me zero në pikën $x = -1$, i cili me boshtin x formon kënd prej 135°. Shkruani formulën e funksionit nga grafiku i tij.

8. Julia blen qumësht nga shitorja lokale. Kostoja e qumështit y (në denarë) varet nga sasia e qumështit (në litra) që do të blejë.
a) Shkruani funksionin linear $y = kx + n$ sipas grafikut në vizatimin 10.
b) Shpjegoni kuptimin e koeficientit të drejtimit k dhe të koeficientit të lirë n.
c) Sa do të paguajë Julia nëse blen 3 litra qumësht?



Vizatimi 10

Hulumtim

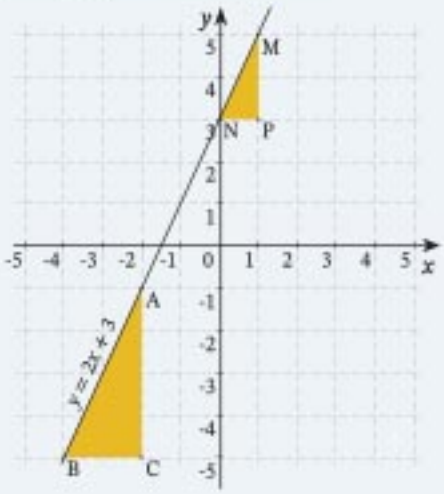
Në vizatimin 11 është paraqitur grafiku i funksionit linear $y = 2x + 3$. Në drejtëz janë shënuar dy pika të çfarëdoshme A dhe B, e më pas edhe pika C, ashtu që ABC është një trekëndësh kënddrejtë me kënd të drejtë në kulmin C.

a) Sipas grafikut, njehsoni herësin e gjatësisë së katetit AC me gjatësinë e katetit BC.

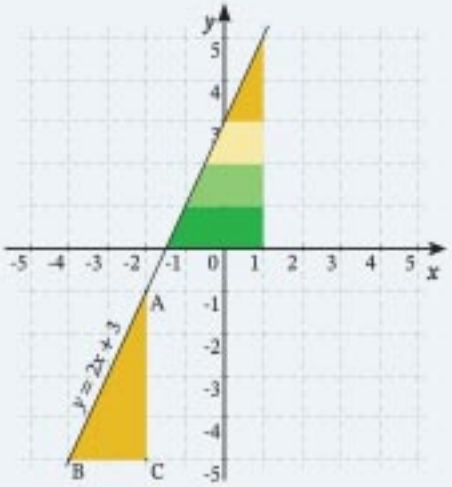
b) Në të njëjtën mënyrë, njehsoni herësin e gjatësisë së katetit MP me gjatësinë e katetit NP të trekëndëshit MNP?

c) Për çdo çift pikash arbitrare nga drejtëza, duke tërhequr drejtëza paralele me boshtet nëpër të dy pikat, fitojmë trekëndësha kënddrejtë (vizatimi 12). Njehsoni sa është herësi i katetit paralel me boshtin y me katetin paralel me boshtin x te ato trekëndësha. Krahasojeni me koeficientin e drejtimit të funksionit linear të dhënë. Çfarë përfundoni?

ç) Si do t'ju ndihmojë përfundimi në procedurën për gjetjen e funksionit linear $y = kx + n$ sipas një grafiku të dhënë?



Vizatimi 11



Vizatimi 12

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Sillni monomin në trajtë të rregullt:
   a) xy^3x^2y, b) $6xy(-2x^4y)$, c) $-4xy^2(-5xy)$, ç) $xyxyy4xy$.
   A ka monome të ngjashëm midis tyre?

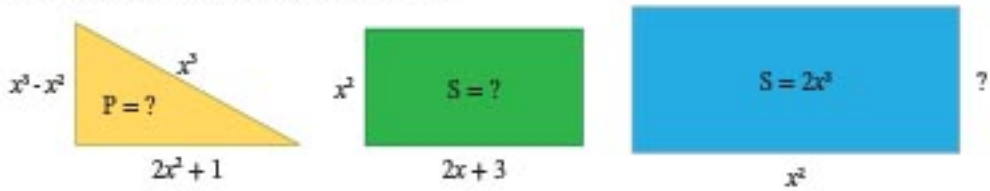
2. Cila është shkalla e monomit: a) x^3y^4, b) xy, c) $5x^2y^3z$, ç) 3 ?

3. Nga shuma e monomeve $-a^2b$ dhe $3a^2b$ zbritni ndryshimin e tyre.

4. Gjeni prodhimin e monomeve: a) $4x^3 \cdot x^4 \cdot 2x^5$, b) $a^2b \cdot (-2a^3b^2) \cdot 7ab^3$.

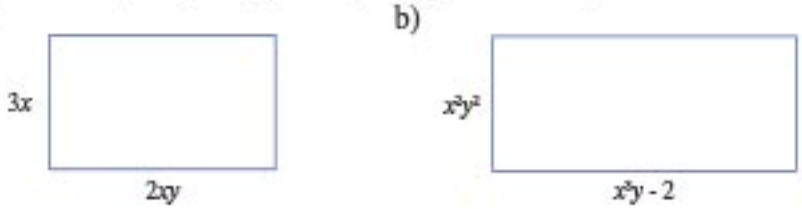
5. Gjeni herësin e monomeve: a) $5x^6y^3 : (-20x^2y^2)$, b) $27a^4b : 3a^3b$.

6. Shkruani shprehjen algjebrike me të cilën do të shprehni madhësitë e kërkuara nëpërmjet elementeve të dhëna në vizatimin 1:



Vizatimi 1

7. Shkruani shprehjen algjebrike për syprinën e drejtkëndëshit në vizatimin 2:



Vizatimi 2

8. Shkruani në trajtë të rregullt polinomin, e më pas përcaktoni shkallën e tij:
   a) $3xy + x - 5xy + 1$, b) $7ab^2 - 4ab + 5ab + ab^2$,
   c) $x^2 - (2x)^3 + xxx - x^2$, ç) $2xy^3 + 5(xy)^2z - (3xy)^2z + 8xyy^2$.

9. Janë dhënë polinomet $A = 6x^2 - 5x + 1$, $B = x^2 + 3x - 2$ dhe $C = x + 3$. Gjeni polinomet:
   a) $A + B + C$, b) $A - B$, c) $C + B - A$, ç) $-A + B - C$.

10. Shkruani në trajtë të rregullt polinomet: a) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{5y}{6}+\frac{4x}{3}$, b) $\frac{2x}{7}+\frac{3y}{8}-\frac{3x}{2}+2x$.

11. Dy makina lëvizin në të njëjtin drejtim. Shpejtësia e makinës së parë në varësi të kohës t jepet me formulën $v_1 = 2,5t^2 + 0,5t + 10$, ndërsa e të dytës me formulën $v_2 = 1,5t^2 + 0,8t + 9,5$. Shkruani shprehjen algjebrike që paraqet ndryshimin e shpejtësive të tyre në varësi të kohës t dhe thjeshtësojeni.

12. Kryeni veprimet e shënuara:
   a) $5x^2 + 2x(4x - 1)$, b) $x^2(3x^3 - 2x) - 4(x^3 + 1)$,
   c) $(24y^6 + 18y^4) : (-6y^2) + 21y^5 : (-7y^3)$, ç) $(5x^3 - x^2y) : x^2 + (30xy - 25y^2) : (-5y)$.

13. Nëse $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$ njehsoni vlerën e shprehjes:
   a) $3(2x - y^2) + 4(yz + 1)$, b) $2(-x^3 + 1) - 3yz$,
   c) $5(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, ç) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

14. Nina shet biskota. Të hënën, ajo shiti 18. Të martën shiti 22 biskota, të mërkurën shiti 26 biskota, etj.
a) Sa biskota ka shitur të shtunën?
b) Sa biskota gjithsej shiti për një javë, nëse dihet se Nina nuk punon të dielën?

15. Është dhënë vargu me kufizë të përgjithshme $a_n = 7n + 1$. Gjeni:
a) 3 kufizat e para, b) kufizat me numra rendorë 300 dhe 458.

16. Përcaktoni kufizën e përgjithshme të vargut:
a) 12, 15, 18, ..., b) 5, 11, 17, ..., c) 28, 24, 20, ..., ç) 14, 9, 4, ...

17. Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut të paraqitur me skemën në vizatimin 3.



Vizatimi 3

18. Zgjidhni barazimin: a) $x-\frac{2}{5}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$, b) $x-\frac{x}{4}-3=\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+2$.

19. Zgjidhni barazimin: a) $\frac{2}{3}(x-1)+4=\frac{x}{6}$, b) $\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{3}{4}$.

20. Zgjidhni barazimin: a) $0,75x-0,25-\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}-4x$, b) $1,25x-0,25-1,5x=x-1,5$.

21. Vlera e gjysmës së shumës që ka Maria, e zvogëluar për 2500 denarë, është e njëjtë me 1500 denarë të zvogëluar për një të tretën e shumës së saj. Sa denarë ka Maria?

22. Gjeni brinjën më të vogël të drejtkëndëshit nëse ajo është $\frac{1}{6}$ e brinjës më të madhe dhe $\frac{1}{14}$ e perimetrit.

23. Vizatoni grafikun e funksionit linear: a) $y = 3x - 5$, b) $y = -x + 3$, c) $y = \frac{1}{3}x$.

24. Gjeni zerot e funksionit linear: a) $y = -x - 4$, b) $y = \frac{x}{4} + 2$.

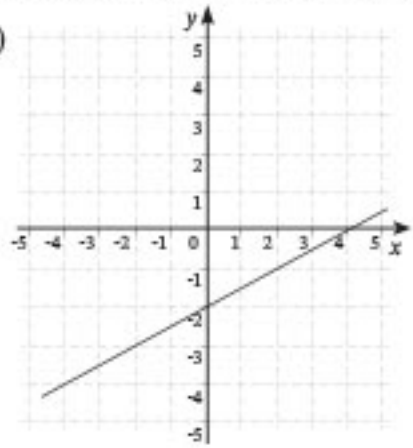
25. Janë dhënë funksionet lineare:
$y = -x + 6$, $y = 7x + 26$, $y = -46$, $y = -35x + 4$, $y = 9x$, $y = x + 1$,
$y = -x + 23$, $y = 54x + 43$, $y = -397x$, $y = 200$, $y = x + 100$.
Shkruani të gjitha:
a) funksionet rritëse. Cili prej tyre rritet më shpejt? b) funksionet rënëse. Cili prej tyre zbret më shpejt?

26. Shkruani funksionin linear, grafiku i të cilit është paralel me grafikun e funksionit linear $y = 2x + 1$ dhe pritet me grafikun e funksionit linear $y = x + 3$ në boshtin y.

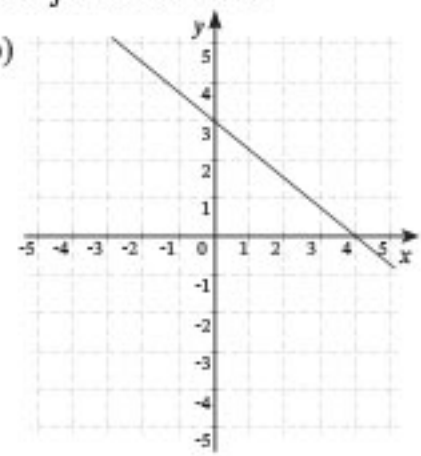
27. Vizatoni grafikun e funksionit linear $y = -x + 2$, e më pas përgjigjuni kërkesave në vijim:
a) Sa është koeficienti i drejtimit? b) Në cilën pikë grafiku i tij e pret boshtin y?
c) Sa janë zerot e funksionit? ç) Përshkruaj rrjedhën e funksionit,
d) Gjeni vlerën e ndryshores së pavarur, nëse vlera e funksionit është 5,
dh) Gjeni vlerën e funksionit, nëse ndryshorja e pavarur merr vlerën -2.

28. Shkruani funksionin linear të dhënë me grafikun e tij në vizatimin 4:

a)



b)



Vizatimi 4

29. Në kompaninë A për marrjen me qira të makinave, qiraja ditore është 500 denarë, dhe paguhen shtesë 40 denarë për kilometër të përshkuar. Në kompaninë B, qiraja ditore është 400 denarë, dhe shtesë paguhen 50 denarë për kilometër të përshkuar.

a) Shpjegoni në cilën kompani marrja me qira është më e favorshme në varësi të numrit të kilometrave të përshkuar.

b) Në cilën kompani marrja me qira është më e favorshme për një rrugë të gjatë 300 km?

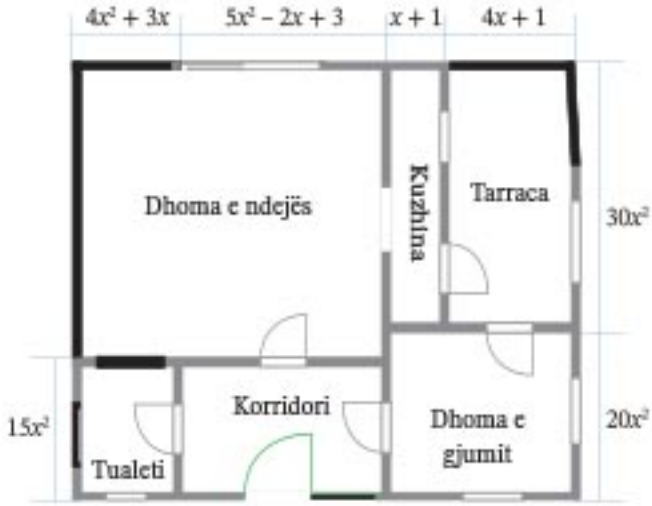
c) Sa do të kursehen nëse për një rrugë prej 500 km zgjidhet oferta më e favorshme?

30. Sonja dëshiron të shumojë narcisat në kopshtin e saj. Nga secila rrënjë do të nxjerrë 5 qepujka të reja të formuara, dhe do ta mbajë edhe bimën e vjetër.

a) Shkruani funksionin për varësinë e numrit të narcisave pas shumimit y nga numri i narcisave para shumimit x.

b) Sa bimë do të ketë Sonja pas shumimit të 7 narcisave?

31. Në vizatimin 5 është dhënë plani i një apartamenti, në të cilin të gjitha gjatësitë janë shprehur në metra.



Vizatimi 5

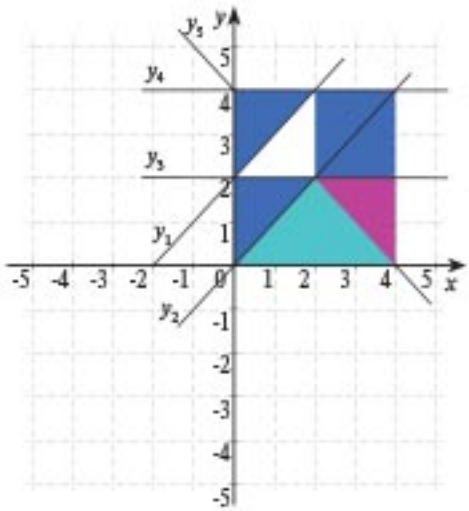
a) Sipas planit të dhënë, ndërtoni një shprehje në trajtë të rregullt për:
- Syprinën e secilës prej dhomave,
- Syprinën e të gjithë apartamentit,
- Perimetrin e secilës prej dhomave,

b) Sa metra katrorë pllaka nevojiten gjithsej për shtrimin e dyshemesë në tarracë, tualet dhe korridor, nëse $x = 0{,}4$?

c) Sa metra dërrasa dyshemeje nevojiten për dyshemenë e dhomës së gjumit, nëse hapjet për dyer janë nga 0,8?

ç) Sa metra katrorë parket nevojiten për dyshemenë e dhomës së ndenjes dhe të gjumit, nëse $x = 0{,}4$?

32. Shkruani formulat e funksioneve lineare: y_1, y_2, y_3, y_4 dhe y_5, të cilat janë përdorur për krijimin e figurës në vizatimin 6.



Vizatimi 6

33. Në të njëjtin sistem koordinativ, vizatoni grafikët e funksioneve lineare:

$y = 2x$, $y = -2x$, $y = x - 8$, $y = -x - 8$, $y = 2x - 8$, $y = -\frac{x}{2} - 2$ dhe $y = -\frac{x}{2} + 6$.

Krijoni një vizatim artistik, duke i ngjyrosur me ngjyra të ndryshme pjesët e rrafshit që janë të kufizuar nga grafikët e vizatuar.

Tema 4:

MATJA

Rezultatet e të nxënit:

Gjatë studimit të kësaj teme do të aftësoheni të:

- përdorni njësitë matëse për kohën në zgjidhjen e problemeve me llogaritje ose me grafikë.
- zgjidhni njësitë matëse të përshtatshme për matjen, vlerësimin, llogaritjen dhe zgjidhjen e problemeve në kontekste të ndryshme, duke përfshirë njësitë për gjatësinë, syprinën dhe vëllimin.

1. NJËSITË MATËSE PËR KOHËN

Aktivitet

Mehmedi vrapon nga 30 minuta çdo mëngjes. Sa orë në javë vrapon Mehmedi?

Një nga masat më të përdorura për matjen e kohës është dita. Ajo është koha e nevojshme që Toka të rrotullohet një herë rreth boshtit të saj.

Njësi matëse më të vogla se dita janë: **ora (h), minuta (min) dhe sekonda (s).**
Njësi matëse më të mëdha se dita janë: **java, muaji, viti.**
Java është koha që përmban 7 ditë. Muaji është koha që përmban 28, 29, 30 ose 31 ditë, por gjatë llogaritjeve do të marrim se **muaji ka 30 ditë.**

Viti është koha e nevojshme që Toka të rrotullohet një herë rreth Diellit dhe është 365 ditë dhe 6 orë. Për lehtësi llogaritjeje, është vendosur që tre vite radhazi të kenë nga 365 ditë, dhe çdo i katërti të ketë 366 ditë. Vitet që kanë nga 365 ditë i quajmë **të thjeshtë**, ndërsa viti që ka 366 ditë quhet **i brishtë**. Në vitin e brishtë, muaji shkurt ka 29 ditë, ndërsa në vitet e thjeshtë ai ka nga 28 ditë.
Gjatë llogaritjeve do të marrim se **viti ka 365 ditë.**

Përdoren edhe njësi matëse më të mëdha se viti, dhe ato janë: **dekada**, që ka 10 vjet, **shekulli** që ka 100 vjet, si dhe **mijëvjeçari** që ka 1000 vjet.
Viti ka 12 muaj ose 52 javë dhe 1 ditë, ndërsa në vitet e brishtë 52 javë dhe 2 ditë.
Gjatë llogaritjeve do të marrim se **viti ka 52 javë.**

Koha prej **një sekonde** është njësia bazë matëse për kohën.

Rikujtoni, midis njësive matëse për kohën ekziston lidhja e mëposhtme:

njësia matëse	lidhja me njësitë më të vogla matëse
sekondi (s)	njësia bazë
minuti (m)	1 min= 60 s
ora (h)	1 h = 60 min = 3600 s
dita	1 ditë = 24h = 1440 min = 86400 s
java	1 javë = 7 ditë = 168 h = 10080 min = 604800 s
muaji	1 muaj llogaritet 30 ditë
viti	1 vit = 12 muaj = 365 ditë
dekada	1 dekadë = 10 vite = 120 muaj = 3650 ditë
shekulli	1 shekull = 100 vite
mijëvjeçari	1 mijëvjeçar = 10 shekuj = 1000 vite

Ekzistojnë edhe njësi matëse më të vogla se sekonda, si të dhjetat (e dhjeta e sekondës), të qindtat (e qindta e sekondës) dhe të mijtat (e mijta e sekondës). Ato përdoren më shpesh në garat sportive.

Shembulli 1

Sa orë ka në: a) 5 ditë, b) 570 min, c) 1 muaj?

a) Një ditë ka 24 orë, pra 5 ditë do të kenë $5 \cdot 24$ h = 120 h.

b) $570 = 9 \cdot 60 + 30 = 9$ h 30 min.

c) Marrim se 1 muaj ka 30 ditë, pra 1 muaj = $30 \cdot 24$ h = 720 h.

Shembulli 2

Sa minuta ka në: a) 1 ditë dhe 3 orë, b) 2700 s?

a) 1 ditë dhe 3 orë janë $(24 + 3)$ h = 27 h = $27 \cdot 60$ min = 1620 min, b) 2700 : 60 = 45 min.

Detyra 1

Sa minuta ka në: a) 2 ditë dhe 2 orë, b) 3180 s?

Shembulli 3

Sa sekonda ka në: a) 5 h 14 min, b) 3,5 orë?

a) 5 h 14 min = $(5 \cdot 60 + 14)$ min = 314 min = $314 \cdot 60$ s = 18840 s,

b) 3,5 h = $3{,}5 \cdot 60$ min = 210 min = $210 \cdot 60$ s = 12600 s.

Detyra 2

Sa sekonda ka në: a) 3 h 27 min, b) 3,2 orë?

Shembulli 4

Sa orë, minuta dhe sekonda ka në 9256 s?

1 min = 60 s dhe 1 h = 60 min

Fitojmë 9256 s = 154 min 16 s = 2 h 34 min 16 s.

Përfundojmë se 9256 s = 2 h 34 min 16 s.

Detyra 3

Sa orë, minuta dhe sekonda ka në: a) 8410 s, b) 12568 s?

Shembulli 5

Sara ka 14 vjet e 7 muaj. Nëna e saj është më e madhe se ajo për 374 muaj. Sa vite ka nëna e Sarës?

Dallimin në moshë prej 374 muajsh do ta shndërrojmë në vite dhe muaj:

$$\begin{array}{r} 374 : 12 = 31 \\ -\underline{36} \\ 14 \\ -\underline{12} \\ 2 \end{array}$$

Pra, nëna është më e madhe se Sara për 31 vjet e 2 muaj.
Nëna e Sarës ka $14 + 31 = 45$ vjet dhe $7 + 2 = 9$ muaj.

Detyra 4

Rekordi botëror në maratonë për femra, i vendosur në vitin 1963 për SHBA-të, ishte 3 orë 37 minuta e 7 sekonda. Rekordi aktual botëror, i vendosur në vitin 2024 për Keninë, është përmirësim i të mëparshmit për 1 orë 27 minuta e 13 sekonda.
Sa është rekordi i ri botëror në: a) orë, minuta dhe sekonda, b) sekonda?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Sa sekonda ka në: a) 15 h 23 min, b) 6 h 15 min 35 s?
2. Sa orë dhe minuta ka në: a) 523 min, b) 1000 min?
3. Shndërroni në vite: a) 3 shekuj dhe 8 dekada, b) 1 mijëvjeçar, 6 shekuj dhe 4 dekada.
4. Çfarë është më e madhe?
   a) 6 muaj apo 3800 orë,
   b) 3 vjet e 2 muaj apo 1500 ditë,
   c) 7 orë e 43 minuta apo 450 minuta,
   ç) 5 orë 15 minuta e 35 sekonda apo 200 000 sekonda?
5. Radhitni sipas madhësisë numrat, duke filluar nga më i vogli: 730 ditë, 2 vjet, 90 javë dhe 32 muaj.
6. Nika ka 12 vjet 3 muaj e 5 ditë. Sa vite, muaj dhe ditë do të ketë Nika pas 85 muajsh?
7. Ana dhe Ema së bashku kanë 358 muaj. Ana ka 15 vjet e 4 muaj. Sa vjeçare është Ema?
8. Në programin televiziv, maratoni i filmit filloi në orën 9:15 të pasdites dhe përfundoi të nesërmen në orën 6:45 të mëngjesit. Llogaritni sa minuta zgjati maratoni.

Hulumtim

Hulumtoni në internet sa kohë zgjat viti, muaji dhe dita në disa trupa tjerë qiellorë. Më pas, zgjidhi detyrat. Për llogaritjet përdorni kalkulator.

a) Nëse niseni nga Marsi për në Tokë, me një anije kozmike e cila lëviz më shpejt se aeroplanët e tokës, do të arrini në Tokë për 2400 orë 180 minuta dhe 360 sekonda (të matura në kohën tokësore). Shndërroni këtë kohë në ditë, orë dhe minuta.

b) Lina ka 13 vite 5 muaj e 12 ditë, të matura në kohën tokësore. Sa vite, muaj dhe ditë ka Lina të llogaritura në kohën marsiane?

c) Marko ka 14 vite 8 muaj e 22 ditë, të matura në kohën tokësore. Sa vite, muaj dhe ditë ka Marko të llogaritura në kohën saturniane?

2. GRAFIKËT NË KONTEKST TË KOHËS

Grafiku rrugë-kohë

Aktivitet

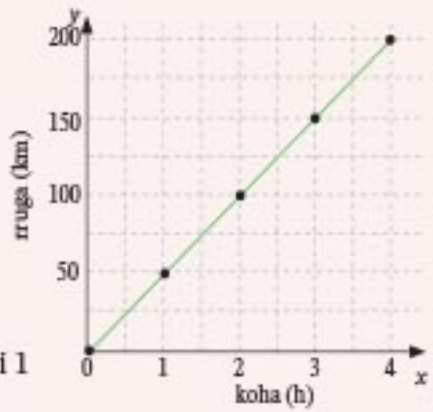
Në grafikun në vizatimin 1 është paraqitur udhëtimi i një automobili.

a) Për sa kohë automobili përshkoi 100 kilometra?

b) Sa kilometra përshkoi makina për një kohë prej 3 orësh?

c) Sa kilometra përshkoi makina për një kohë prej 1 ore?

ç) Me çfarë shpejtësie lëviz makina?



Vizatimi 1

Me grafikun rrugë-kohë paraqitet varësia e rrugës së përshkuar nga një objekt nga koha e kaluar. Grafikun e vizatojmë në sistemin koordinativ ashtu që kohën e paraqesim në boshtin x, dhe distancën (rrugën) në boshtin y.

Grafiku rrugë-kohë na ndihmon të bëjmë analizën e lëvizjeve të objekteve dhe njerëzve. Përkatësisht, nga grafiku mund të lexojmë sa larg ka arritur një objekt për një kohë të caktuar, nëse objekti qëndron në vend, lëviz, përshpejton ose ngadalëson, dhe mund të gjejmë edhe shpejtësinë me të cilën lëviz objekti në një fazë të caktuar.

Skanoni kodin dhe shqyrtoni grafikun e lëvizjes.

Shembulli 1

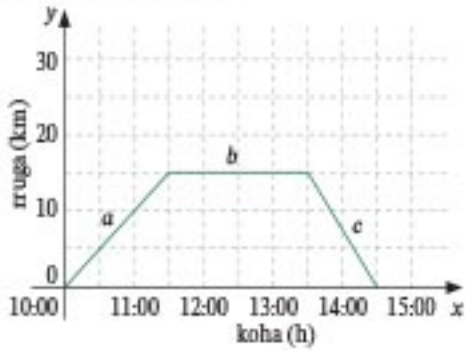
Grafiku në vizatimin 2 paraqet udhëtimin e Emës me biçikletë në një takim dhe kthimin.

a) Sa kohë udhëtoi Ema nga shtëpia deri te vendi i takimit?

b) Sa kohë ajo qëndroi në takim?

c) Kur voziti Ema më shpejt, në shkuarje apo në kthim?

ç) Me çfarë shpejtësie lëvizte në secilën nga fazat?



Vizatimi 2

a) Ema u nis në orën 10:00 dhe arriti në 11:30, që do të thotë udhëtoi një orë e gjysmë.

b) Nga grafiku shohim se nga 11:30 deri në 13:30, Ema ndodhet në të njëjtën distancë nga shtëpia. Pra, qëndroi në takim 2 orë.

c) Rrugën e shkuarjes (faza *a*) Ema e kaloi për 1,5 orë, ndërsa të njëjtën rrugë në kthim (faza *c*) e kaloi për 1 orë, pra voziti më shpejt në kthim.

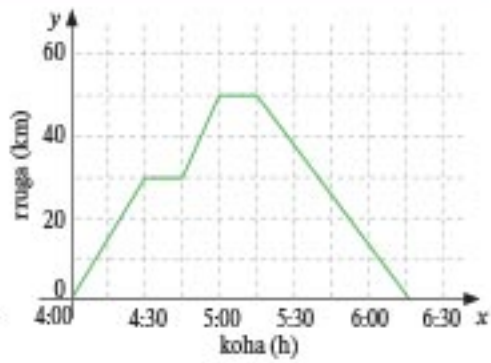
ç) Në fazën *a* përshkoi 15 km për 1,5 orë, që do të thotë shpejtësia është $15 : 1{,}5 = 10$ km/h. Në fazën *b* shpejtësia është 0 km/h (qëndrim në vend), ndërsa në fazën *c* për 1 orë përshkoi 15 km, pra shpejtësia ishte 15 km/h.

Detyra 1

Në grafikun në vizatimin 3 është paraqitur udhëtimi i një taksie e cila merr pasagjerin në orën 4:00, e dërgon në aeroport në orën 5:00 dhe kthehet.

a) Sa kilometra gjithsej përshkoi taksia?

b) Sa kohë taksia qëndroi në vend?



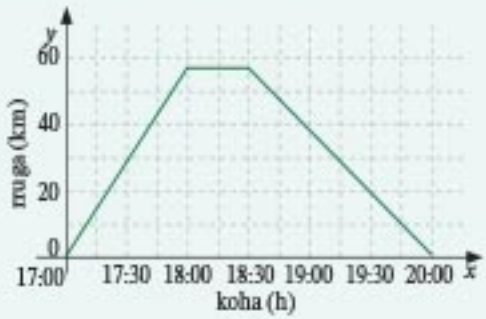
Vizatimi 3

c) Sa kohë kaloi taksia duke vozitur nga pika e nisjes deri te aeroporti?
ç) Në cilën fazë të udhëtimit taksia voziti më shpejt?

Shembulli 2

Marko u nis nga shtëpia në orën 17:00. Voziti 1 orë dhe përshkoi 58 kilometra deri në qytetin fqinj. Atje qëndroi gjysmë ore. Më pas u nis prapa dhe udhëtoi 1,5 orë deri në shtëpi. Vizatoni grafikun që paraqet udhëtimin e Markos.

Në vizatimin 4 është paraqitur grafiku i udhëtimit të Markos.



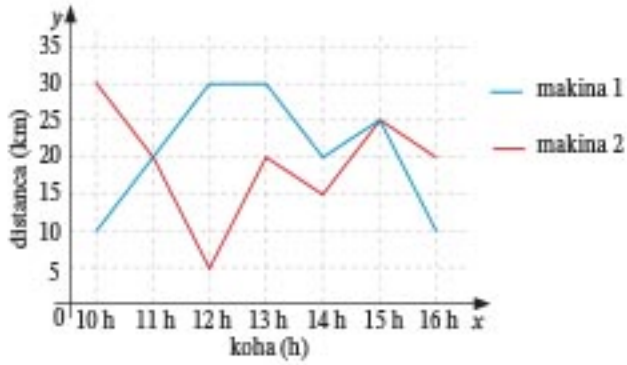
Vizatimi 4

Shembulli 3

Në grafikun në vizatimin 5 është paraqitur lëvizja e dy taksive gjatë një periudhe gjashtëorëshe pune, përmes distancës së makinave nga stacioni i taksive.

a) Sa herë gjatë periudhës gjashtëorëshe ato kanë qenë në të njëjtën distancë nga stacioni? Në cilën orë?

b) Cila makinë përshkoi më shumë rrugë gjatë periudhës së gjashtë orëve?



Vizatimi 5

a) Nga grafiku shohim se linjat e lëvizjes së makinave priten në dy vende, që do të thotë në orën 11:00 dhe në orën 15:00 ato do të jenë në distancë të njëjtë nga stacioni.

b) Makina 1 përshkoi 20 km + 10 km + 5 km + 15 km = 50 km.
Makina 2 përshkoi 10 km + 15 km + 15 km + 5 km + 10 km + 5 km = 60 km.

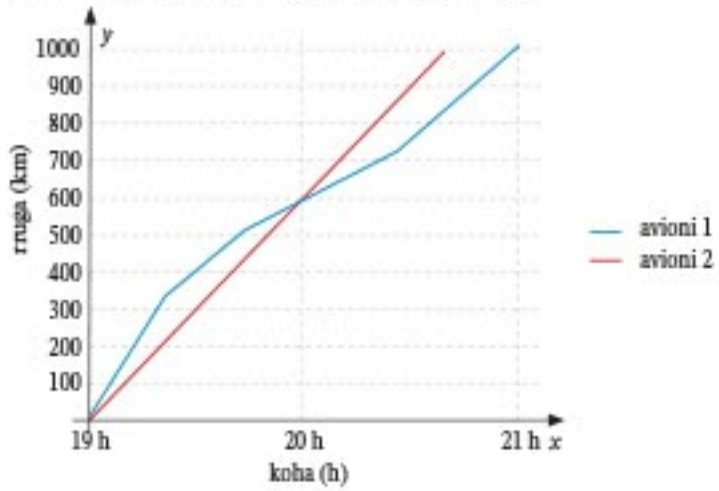
Detyra 2

Në grafikun në vizatimin 6 është paraqitur rruga e dy linjave ajrore që nisen njëkohësisht.

a) Sa herë gjatë periudhës së fluturimit ato kanë qenë në të njëjtën distancë nga aeroporti? Në cilën orë?

b) Cili nga avionët arriti më herët dhe për sa kohë?

c) Cili avion përshkoi më shumë rrugë gjatë periudhës së fluturimit?



Vizatimi 6

Grafikë të tjerë në kontekst kohor

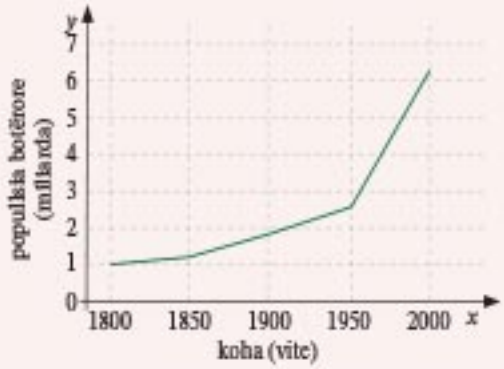
Aktivitet

Me kalimin e kohës rritet numri i banorëve të planetit. Kjo rritje është paraqitur në vizatimin 7.

a) Për sa banorë është rritur popullsia botërore nga 1800 deri në vitin 2000?

b) Për sa banorë është rritur popullsia botërore nga 1800 deri në vitin 1950?

c) Në cilën periudhë është vërejtur rritja më e madhe e popullsisë dhe për sa?



Vizatimi 7

Shumë aktivitete të përditshme, si dhe dukuri natyrore dhe shoqërore, zhvillohen gjatë intervaleve të ndryshme kohore.

Skanoni kodin dhe shqyrtoni grafikët e lëvizjes.

Në atë rast, madhësitë që i karakterizojnë aktivitetet dhe dukuritë ndryshojnë me kalimin e kohës. Ato ndryshime i përshkruajmë duke krijuar grafik të ndryshimit të madhësisë në varshmëri të kohës së kaluar.

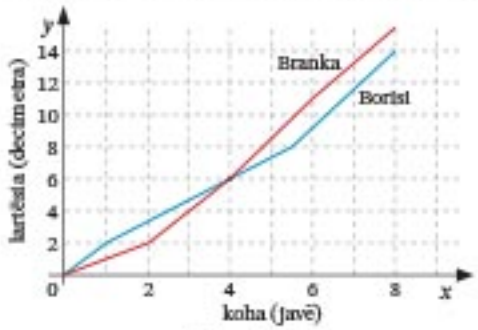
Shembulli 4

Branka dhe Borisi mbjellin domate në oborrin e tyre, secili në pjesën e vet të kopshtit. Branka i ujit bimët 3 deri në 5 herë në javë, ndërsa Borisi mendon se duhet të ujiten vetëm 1 deri në 2 herë në javë. Secili prej tyre i mat lartësitë e bimëve të tyre. Diagrami për rritjen e domateve të tyre është dhënë në vizatimin 8.

a) Kush ka të drejtë në lidhje me ujitjen? Si arritët në këtë përfundim?

b) Pas sa kohësh domatet e Brankës dhe domatet e Borisit patën të njëjtën lartësi?

c) Në cilin interval kohor ishin më të mëdha domatet e Brankës, e në cilin domatet e Borisit?



Vizatimi 8

a) Në të drejtë është Branka. Bimët e saj arritën lartësi më të madhe.

b) Vërejmë se grafikët priten pas 4 javësh. Pra, pas 4 javësh bimët e Borisit dhe të Brankës patën të njëjtën lartësi.

c) Domatet e Borisit ishin më të larta në 4 javët e para, ndërsa domatet e Brankës në 4 javët e fundit.

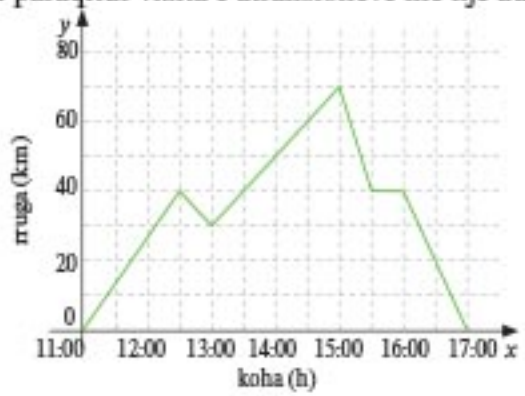
Detyra 3

Në tabelë janë dhënë temperaturat mesatare mujore në Berovë, Prilep dhe Shkup gjatë një viti. Vizatoni grafikun që paraqet ndryshimin e temperaturës në 6 muajt e parë të vitit.

	janar	shkurt	mars	prill	maj	qershor
Berovë	2	1	6	8	12	22
Prilep	5	4	15	20	22	28
Shkup	8	4	18	23	25	29

DETYRA PËR USHTRIME

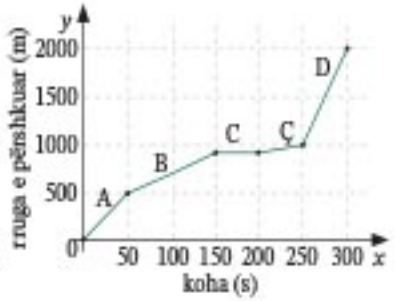
1. Në grafikun në vizatimin 9 është paraqitur vizita e atraksioneve me një autobus turistik.



Vizatimi 9

a) Sa kilometra gjithsej përshkoi autobusi?
b) Sa ka zgjatur pushimi?
c) Nga cila deri në cilën orë autobusi voziti më shpejt?
ç) Me çfarë shpejtësie voziti nga ora 13 deri në 15?

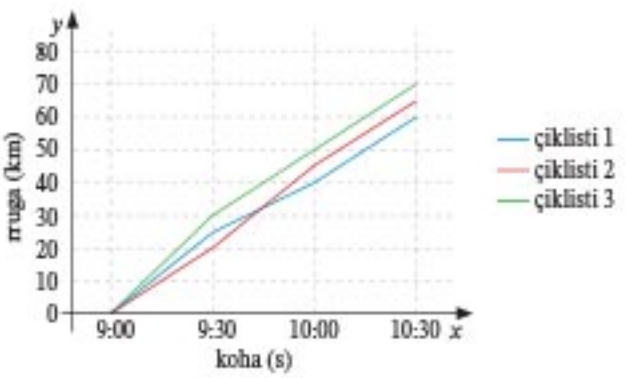
2. Një çiklist ngjitet në një kodër, e më pas zbret poshtë. Lëvizja e tij zhvillohet në 5 faza: A – vozitje në rrugë të sheshtë, B – vozitje përpjetë, C – pushim, Ç – shtyrje e biçikletës dhe D – vozitje e tatëpjetë, të paraqitura me grafikun në vizatimin 10:



Vizatimi 10

a) Sa minuta zgjati vozitja?
b) Sa kohë çiklisti e shtyu biçikletën?
c) Sa rrugë përshkoi pas 250 minutash?
ç) Në cilën fazë përshkoi më shumë rrugë?
d) Në cilën fazë çiklisti lëvizi më shpejt?

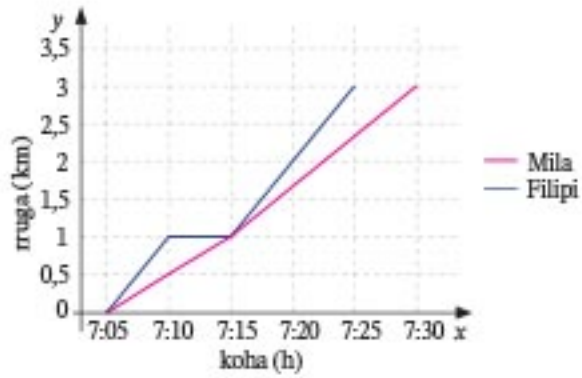
3. Në grafikun në vizatimin 11 është paraqitur rruga e tre çiklistëve që stërviteshin në një shteg kodrinor.



Vizatimi 11

a) Cili nga çiklistët voziti më shpejt në 30 minutat e para?
b) Sa rrugë përshkoi secili prej tyre?
c) Cili voziti më ngadalë nga 9:30 deri në 10:00?

4. Në grafikun në vizatimin 12 janë paraqitur udhëtimet e Milës dhe Filipit nga shtëpia e tyre deri në shkollë.
Në boshtin x është dhënë koha (nga 7:05 deri në 7:30), ndërsa në boshtin y është dhënë distanca nga shtëpia (në kilometra).
Mila ecën në këmbë, ndërsa Filipi me biçikletë dhe gjatë rrugës ndalon në shitore, e më pas vazhdon.



Vizatimi 12

a) Cili prej tyre ka arritur i pari në shkollë?
b) Sa kohë iu desh Milës për të arritur në shkollë?
c) Në çfarë kohe Filipi ndaloi në shitore dhe sa kohë qëndroi atje?

5. Elena u nis nga shtëpia në orën 8:00. Voziti 30 minuta deri te vendi i saj i punës që është 15 km larg. Atje qëndroi deri në orën 13:30. Në orën 13:45 arriti në shtëpi. Vizatoni grafikun me të cilin do të paraqitni udhëtimin e Elenës në punë.

6. Marina dhe Irina shkuan në pushim dimëror me familjet e tyre. Donin të përgatisnin një projekt për shkollë, prandaj ranë dakord të regjistronin të dhënat për distancën në të cilën ndodheshin nga pika e nisjes për një kohë të caktuar. Vajzat mblodhën të dhënat e mëposhtme:

Marina

koha (h)	1	2	3	4	5	6
rruga (km)	100	180	180	290	380	470

Irina

koha (h)	1	2	3	4	5	6
rruga (km)	80	150	230	230	320	400

Vizatoni grafikët e rrugëtimit të dy vajzave në të njëjtin sistem koordinativ dhe përgjigjuni:
a) Në cilën orë familja e Irinës bëri pushim?
b) Makina e cilës prej tyre ka lëvizur më shpejt në orën e fundit të udhëtimit?
c) Në cilën fazë të udhëtimit makina e Marinës ka lëvizur më shpejt?

7. Në tabelë është dhënë numri i sanduiçëve dhe numri i lëngjeve të shitura në një shitore sanduiçësh gjatë një jave. Vizatoni diagramin e varësisë së numrit të sanduiçëve dhe lëngjeve të shitura nga koha.

dita	e hënë	e martë	e mërkurë	e enjte	e premte	e shtunë	e diel
sanduiçe	58	70	65	95	86	54	47
lëngje	53	85	87	78	52	62	56

8. **Detyrë projektuese**

Nxënësit e klasës së tetë të një shkolle në Shkup do të shkojnë në një ekskursion njëditor mësimor-shkencor në Shtip. Plani është të vizitojnë: Bezistenin e Shtipit, kështjellën Isar, lokacionin arkeologjik Bargala dhe muzeun e qytetit të Shtipit. Gjithashtu, duhet të planifikohet një pushim për drekë. Bëni një plan kohor të udhëtimit dhe paraqiteni me grafik. Gjatë kësaj:

1) Informohuni për kohën e nisjes dhe kthimit;
2) Kërkoni të dhëna për distancën Shkup-Shtip, si dhe për vendndodhjen e vendeve që duhen vizituar dhe distancën midis tyre;
3) Llogaritni sa kohë do të nevojitet për të përshkuar distancat midis vendeve sipas planit;
4) Planifikoni radhitjen e vizitave bazuar në të dhënat e hulumtuara për vendndodhjen dhe distancën e vendeve;
5) Ndërtoni një tabelë me distancat nga Shkupi deri te vendet që duhen vizituar dhe orën e mbërritjes në secilin prej tyre;

	nisja	Bezisteni	Isar	dreka	Bargala	muzeu
koha						
distanca						

6) Paraqitni me grafik të dhënat nga tabela.

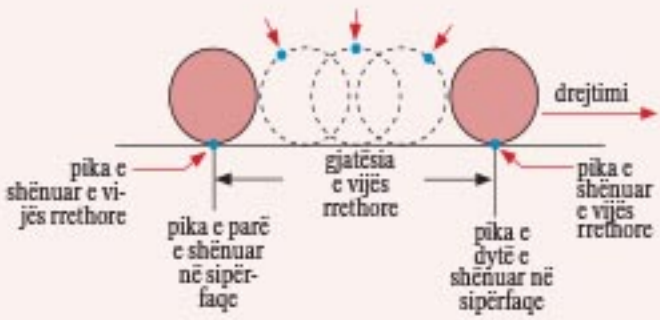
3. GJATËSIA E VIJËS RRETHORE

Aktivitet

Për aktivitetin do t'ju nevojiten: vizore, laps, objekte nga jeta e përditshme me formë cilindrike si kanaçe, monedhë ose gotë.

Skenoni kodin dhe shqyrtoni perimetrin e vijës rrethore.

Në fillim, matni me kujdes diametrin e vijës rrethore nga objekti i zgjedhur, shënoni një pikë në atë vijë rrethore dhe në sipërfaqen ku do ta lëvizni objektin. Në fund të rrotullimit të plotë, shënoni pikën e dytë në sipërfaqe (siç tregohet në vizatimin 1). Distanca nga pika e parë e shënuar në sipërfaqe deri te pika e dytë e shënuar në sipërfaqe është pikërisht gjatësia e vijës rrethore. Përsëriteni eksperimentin me disa objekte të ndryshme rrethore dhe plotësoni tabelën. Krahasoni rezultatet me shokët e klasës. Çfarë vëreni?



Vizatimi 1

objekti rrethor	gjatësija e vijës rrethore	diametri i vijës rrethore	herësi i gjatësisë me diametrin
. . .			

Gjatë kryerjes së aktivitetit, me siguri vërejtët se herësi i gjatësisë së vijës rrethore me diametrin e vijës rrethore është afërsisht i barabartë për çdo vijë rrethore.

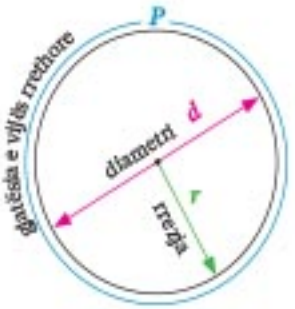
Herësi i gjatësisë së vijës rrethore P dhe diametrit të saj d është i njëjti numër për çdo vijë rrethore dhe shënohet me shkronjën greke π (lexohet "pi"), pra $\frac{P}{d} = \pi$.

Gjatësia e vijës rrethore është e barabartë me prodhimin e diametrit të vijës rrethore dhe numrit π.

Pra, gjatësia e vijës rrethore P njehsohet me formulat:

$P = d\pi$ ose $P = 2\pi r$

ku d është diametri i vijës rrethore dhe r është rrezja e vijës rrethore (vizatimi 2).



Vizatimi 2

Numri π është numër dhjetor i pafundëm jo periodik dhe quhet edhe numri i Ludolfit. Në fillim shkencëtarët, e më vonë kompjuterët e fuqishëm, kanë llogaritur një numër të fundëm dhjetoresh të tij, por për përdorim praktik përdoret vlera e tij e përafërt $\pi \approx 3{,}14$ ose $\pi = \frac{22}{7}$.

Nëse vijën rrethore e shohim si kufi të rrethit, atëherë gjatësia e saj P konsiderohet **perimetër i rrethit**.

Shembulli 1

Njehsoni gjatësinë e vijës rrethore, nëse: a) $r = 10{,}5$ cm, b) $d = 0{,}8$ m.

a) $P = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}5$ cm $= 3{,}14 \cdot 21$ cm $= 65{,}94$ cm, b) $P = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8$ m $= 2{,}512$ m.

Detyra 1

Njehsoni gjatësinë e vijës rrethore, nëse: a) $r = 2{,}3$ m, b) $d = 7\frac{2}{5}$ m.

Detyra 2

Ana dhe Marko vrapojnë në park përgjatë shtegut rrethor, rrezja e të cilit është 14 m.

a) Njehsoni gjatësinë e shtegut përgjatë të cilit vrapojnë.

b) Sa metra gjithsej do të vrapojë secili prej tyre nëse vrapojnë 3 xhiro?

Aktivitet

Si mundeni nga formula:

a) $P = d\pi$ të llogaritni diametrin e vijës rrethore?

b) $P = 2\pi r$ të llogaritni rrezen e vijës rrethore?

Shembulli 2

Një shirit çeliku i gjatë 1 m është përkulur në vijë rrethore. Sa është diametri i vijës rrethore të formuar?

Diametri i vijës rrethore është $d = \frac{P}{\pi} \approx \frac{1\text{m}}{3{,}14} \approx 0{,}32$ m.

Shembulli 3

Njehsoni rrezen e rrethit me perimetër $4{,}5\pi$ cm.

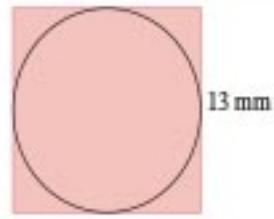
Rrezja e rrethit është $r = \dfrac{P}{2\pi} = \dfrac{4{,}5\,\text{cm} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \dfrac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}.$

Detyra 3

Në park planifikohet të bëhet një lulishte në formë rrethi. Gjatësia e gardhit që do të rrethojë lulishten duhet të jetë 31,4 m. Sa duhet të jetë rrezja e lulishtes?

Shembulli 4

Një stoli e vogël ka formë katrori me brinjë $a = 13$ mm (vizatimi 3). Në katror duhet të vendoset një tel në formë vije rrethore që i prek brinjët e atij katrori. Sa milimetra tel nevojiten për të punuar stolinë?



Vizatimi 3

Nga kushti i detyrës, për diametrin e vijës rrethore gjejmë se $d = a = 13$ mm.
Njehsojmë gjatësinë e vijës rrethore

$$P = d \cdot \pi \approx 13\,\text{mm} \cdot 3{,}14 = 40{,}82\,\text{mm}.$$

Pra, gjatësia e telit është 40,82 mm.

Detyra 4

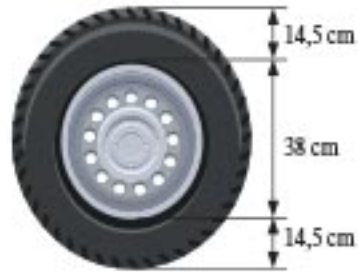
Rreth një lulishte katrore është mbjellë bar si në vizatimin 4. Njehsoni gjatësinë e gardhit mbrojtës përreth rrethit, nëse diagonalja e lulishtes katrore është 2,5 m.



Vizatimi 4

Detyra 5

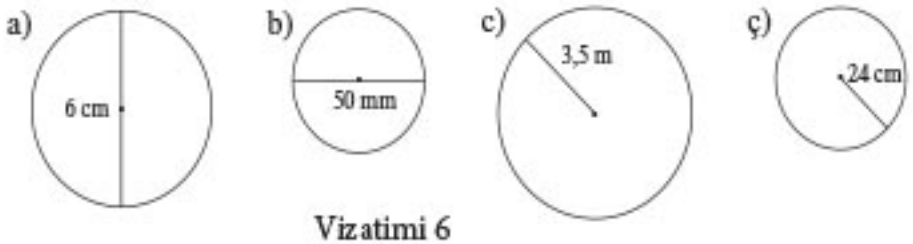
Dimensionet e një rrote makine janë dhënë në vizatimin 5. Rrumbullakoni në metrin më të afërt rrugën që do të përshkojë rrota, nëse bën 15 rrotullime?



Vizatimi 5

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni gjatësinë e vijave rrethore të dhëna në vizatimin 6.



Vizatimi 6

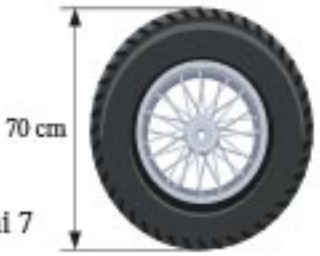
2. Kopjoni tabelën në fletoren tuaj dhe plotësojeni me madhësitë e kërkuara për vijën rrethore:

r	5 cm	8 mm				
d			1 m	6 dm		
P					25,12 cm	3π dm

3. Nxënësit në laboratorin e shkencave natyrore ndërtojnë një orë me diell. Ata duan të vendosin një tel metalik përreth orës me rreze 20 cm. Sa metra tel metalik do t'u nevojitet?

4. Shkencëtarët planifikojnë të lëshojnë një satelit që do të lëvizë rreth Tokës në një orbitë rrethore në lartësi 500 km mbi sipërfaqen e Tokës. Rrezja e Tokës është afërsisht 6371 km.
   a) Njehsoni rrezen e orbitës së satelitit.
   b) Njehsoni gjatësinë e orbitës përgjatë së cilës do të lëvizë sateliti.

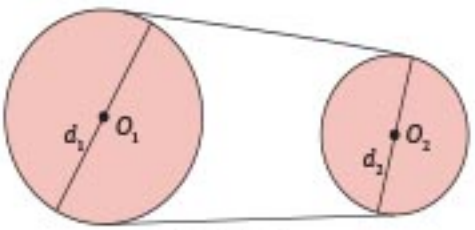
5. Një gomë automobili ka diametër 70 cm (vizatimi 7).
   a) Njehoni perimetrin e saj.
   b) Sa kilometra do të përshkojë, nëse bën 20 000 rrotullime të plota?
   c) Sa herë do të rrotullohet rrota nëse automjeti përshkon një rrugë prej 45 km?



Vizatimi 7

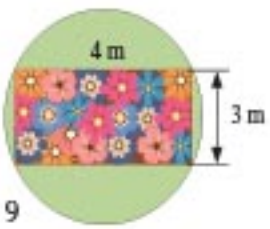
6. Një pishinë e sapondërtuar për aktivitete shkollore në formë rrethi ka perimetër 94,2 m. Njehsoni diametrin e pishinës.

7. Dy rrotulla të një makine kanë diametra $d_1 = 60$ cm dhe $d_2 = 45$ cm dhe janë të lidhura me një rrip (vizatimi 8). Rrotulla e madhe rrotullohet nga motori dhe bën 180 rrotullime në 1 minutë, dhe përmes rripit, me rrotullimin e saj, rrotullohet edhe rrotulla e vogël. Sa rrotullime në minutë do të bëjë rrota e vogël?



Vizatimi 8

8. Një lëndinë në formë rrethi është vendosur rreth një lulishteje drejtkëndore (vizatimi 9). Lëndina duhet të rrethohet me 2 rreshta shiriti mbrojtës. Sa është gjatësia e shiritit të nevojshëm për rrethimin e lëndinës, nëse brinjët e lulishtes drejtkëndore janë 3 m dhe 4 m?



Vizatimi 9

9. Dy rrota identike janë vendosur në një pistë të drejtë ashtu që qendrat e tyre janë në distancë prej 9,31 m (vizatimi 10). Rrezja e secilës prej rrotave është 3,5 cm. Rrotat lëvizin njëkohësisht njëra drejt tjetrës dhe bëjnë nga 1 rrotullim të plotë për 1 sekondë. Pas çfarë kohe do të përplasen? Përdorni $\pi \approx \frac{22}{7}$.



Vizatimi 10

Hulumtim

1. Bëni një fletushkë për numrin π në të cilën do të vendosni fakte interesante nga historia e matematikës për këtë numër dhe rëndësinë e tij.



Figura 1

2. Rrota matëse (figura 1) është një mjet që përdoret për matjen e distancave. Ai përbëhet nga një rrotë, një dorezë dhe një aparat që numëron rrotullimet e plota të rrotës. Siguroni një rrotë matëse me perimetër 1 m. Njehsoni rrezen e rrotës, e më pas verifikoni llogaritjen me matje.
Përdorni rrotën matëse për të matur distanca, për shembull në oborrin e shkollës, fushën e sportit ose gjatësinë e gardhit rreth shkollës.
Sa do të ishte gabimi në matjen e një kilometri, nëse rrota juaj matëse ka rreze më të vogël për: a) 1 cm, b) 1 mm, c) 0,1 mm?

4. GJATËSIA E HARKUT RRETHOR

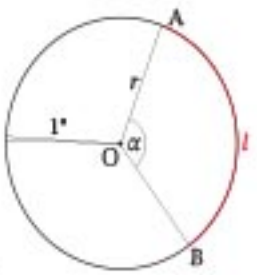
Aktivitet

Vizatoni tre orë me akrepa dhe me numrat nga 1 deri në 12 të shënuara në vijat rrethore. Shënoni harkun në vijën rrethore që tregon shtegun që përshkon maja e akrepit të vogël në:

a) orën e parë nga ora 16:00 deri në 22:00,
b) orën e dytë nga ora 12:00 deri në 16:00,
c) orën e tretë nga ora 12:00 deri në 15:00.

Për secilin nga rastet e përmendura, përcaktoni cila pjesë e vijës rrethore është harku rrethor dhe sa shkallë ka këndi qendror përkatës?

Le të njehsojmë gjatësinë l të harkut rrethor $\overset{\frown}{AB}$ në vijën rrethore me rreze r, nëse këndi qendror përkatës është α (Vizatimi 1).
Një kënd qendror prej 1° i përgjigjet një hark rrethor, gjatësia e të cilit do të jetë $\frac{1}{360}$ e gjatësisë së vijës rrethore, pra



Vizatimi 1

$$l_{1^\circ} = \frac{1}{360} \cdot P = \frac{L}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi r \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ}.$$

Një kënd qendror prej 2° i përgjigjet një hark rrethor dy herë më i gjatë se ai i mëparshmi, pra

$$l_{2^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r \cdot 2^\circ}{180^\circ}, \text{ etj.}$$

Në këtë mënyrë, përfundojmë se një kënd qendror α i përgjigjet një hark rrethor me gjatësi:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Në një vijë rrethore me rreze r, gjatësia e harkut rrethor l që i përgjigjet këndit qendror α, llogaritet me formulën:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Shembulli 1

Njehsoni gjatësinë e harkut rrethor të vijës rrethore me rreze 12 cm, që i përgjigjet këndit qendror $\alpha = 18^\circ$.

Sipas formulës për llogaritjen e gjatësisë së harkut rrethor, gjejmë se:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18^\circ}{180^\circ} = 3{,}768\ \text{cm}.$$

Detyra 1

Njehsoni gjatësinë e harkut rrethor që i përgjigjet këndit qendror prej 140° në vijën rrethore me rreze 3,2 dm.

Detyra 2

Njehsoni gjatësitë e harqeve rrethorë të dy vijave rrethore koncentrike me rreze $r_1 = 3$ cm dhe $r_2 = 5$ cm, që i përgjigjen të njëjtit kënd qendror $\alpha = 122^\circ\ 30'$.

Detyra 3

Marko dëshiron të vendosë një gardh me tel rreth një kopshti të vogël në formë rrethi me rreze 4 m. Sa metra tel duhet të blejë Marko, nëse dëshiron që gardhi të jetë vetëm në gjysmën e vijës rrethore?

Aktivitet

Nga formula $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$ si mund të njehsoni:

a) rrezen r, nëse janë dhënë l dhe α,

b) këndin qendror α, nëse janë dhënë r dhe l?

Shembulli 2

Njehsoni rrezen e vijës rrethore në të cilën harkut rrethor $l = 11$ cm i përgjigjet këndi qendror $\alpha = 42° 30'$.

Këndi qendror i dhënë duhet shndërruar në shakllë: $\alpha = 42° 30' = 42{,}5°$.
Nga formula për llogaritjen e gjatësisë së harkut rrethor, gjejmë se rrezja e vijës rrethore është:

$$r = \frac{180° \, l}{\pi \alpha} \approx \frac{180° \cdot 11\text{cm} \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5°} = 14{,}8 \text{ cm, ku } \frac{1}{\pi} \text{ është shkruar si } \frac{7}{22}.$$

Detyra 4

Angela në oborr dëshiron të bëjë një shteg që është pjesë e një vije rrethore. Gjatësia e shtegut është 15 m, dhe këndi qendror i vijës rrethore që e zë shtegu është 120°. Sa është rrezja e vijës rrethore që formon shtegun?

Shembulli 3

Jovani vendos një pjerrinë rrethore për biçikleta. Gjatësia e harkut rrethor të pjerrinës është 8 m, ndërsa rrezja e vijës rrethore, pjesë e së cilës është pjerrina, është 5 m. Sa është këndi qendror α i vijës rrethore, pjesë e së cilës është pjerrina?

Sipas formulës për llogaritjen e gjatësisë së harkut rrethor, gjejmë se këndi qendror α i vijës rrethore, pjesë e së cilës është pjerrina, është:

$$\alpha = \frac{180° l}{\pi r} \approx \frac{180° \cdot 8\text{m}}{3{,}14 \cdot 5\text{m}} = 91{,}7° \cdot$$

Detyra 5

Njehsoni këndin qendror të vijës rrethore me rreze 10 cm, nëse gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet atij këndi është 6,28 cm.

Shembulli 4

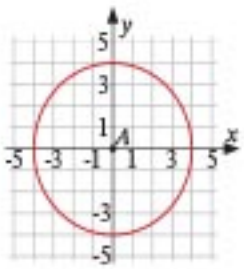
Pa përdorimin e formulës për gjatësinë e harkut rrethor, përcaktoni gjatësinë e vijës rrethore në të cilën një këndi qendror prej 40° i përgjigjet një hark rrethor me gjatësi 6 dm.

Meqenëse $\alpha = 40° = \frac{1}{9} \cdot 360°$, gjatësia e vijës rrethore është $P = 9 \cdot l = 6\text{ dm} \cdot 9 = 54\text{ dm}$.

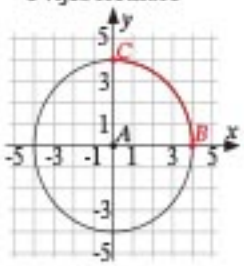
Detyra 6

Njehsoni gjatësinë e harkut rrethor të shënuar me ngjyrë të kuqe në vizatimin 2.

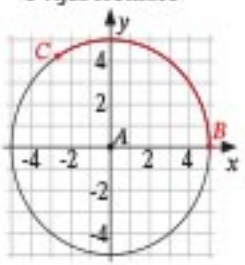
a) E gjithë vija rrethore



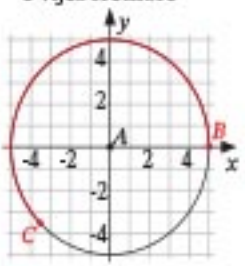
b) Një e katërta e vijës rrethore



c) Një e treta e vijës rrethore



ç) Pesë të tetat e vijës rrethore



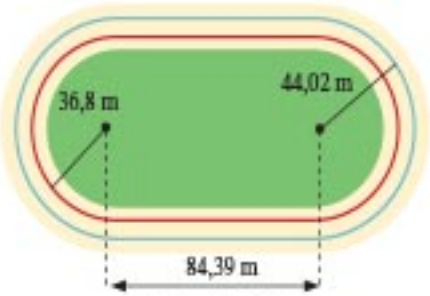
Vizatimi 2

Shembulli 5

Në një pistë atletike vrapojnë dy vrapues - njëri përgjatë shtegut të kaltër, dhe tjetri përgjatë shtegut të kuq. Këndet që u përgjigjen harqeve rrethore janë nga 180°, dhe rrezet e vijave rrethore për secilin vrapues janë dhënë në vizatimin 3.

a) Çfarë distance përshkon secili vrapues nëse vrapojnë një xhiro të plotë përgjatë shtegut?

b) Rrumbullako në metrin më të afërt ndryshimin midis gjatësive të vrapuara.



Vizatimi 3

Shtegu i secilit vrapues përbëhet nga 2 shtigje të drejta dhe 2 shtigje gjysmërrethore.

Shtegu i kuq është $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 36{,}8\text{ m}) \approx 399{,}88\text{ m}$.

Shtegu i kaltër është $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 44{,}02\text{ m}) \approx 445{,}23\text{ m}$.

Ndryshimi i gjatësisë së shtegut të kaltër me gjatësinë e shtegut të kuq, i rrumbullakuar në metrin më të afërt, është:

$$445{,}23\text{ m} - 399{,}88\text{ m} = 45{,}35\text{ m} \approx 45\text{ m}.$$

Detyra 8

Mateu duhet të mbjellë dhe të rrethojë një kopsht në formën e tre të katërtave të rrethit në këndin e shtëpisë së tij (figura 1). Gardhi ka gjatësi 38 m. Sa duhet të jetë rrezja e kopshtit që të mund të rrethojë të gjithë kopshtin? Rrumbullakoni rezultatin në numrin e plotë të metrave.



Figura 1

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni:
   a) gjatësinë e harkut rrethor në vijën rrethore me rreze $r = 12$ cm dhe kënd qendror përkatës $\alpha = 120°$,
   b) gjatësinë e harkut rrethor në vijën rrethore me diametër $d = 8$ cm dhe kënd qendror përkatës $\alpha = 22° 30'$,
   c) këndin qendror që i përgjigjet harkut rrethor me gjatësi $l = 3{,}14$ cm dhe rreze të vijës rrethore $r = 2$ cm,
   ç) rrezen e vijës rrethore në të cilën këndi qendror $\alpha = 108°$ i përgjigjet harkut rrethor me gjatësi $l = 9{,}42$ cm.

2. Studiuesit hartografuan një copë akulli që është një e teta e një sipërfaqeje rrethore akulli polar me rreze 1000 km. Sa është gjatësia e pjesës së lakuar të akullit?

3. Çfar gjatësie ka harku rrethor në vijën rrethore me gjatësi 6,8 cm, këndi qendror i të cilit është 135°?

4. Sa është rrezja e Tokës, nëse gjatësia e meridianit të Tokës është afërsisht 40 000 km?

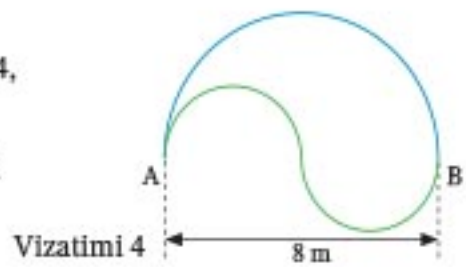
5. Në orën e biologjisë, nxënësit mësojnë për formën e enëve të gjakut. Ata matën një pjesë të lakimit të një harku të madh arterial dhe përcaktuan se gjatësia e tij është 12 cm, dhe këndi qendror që i përgjigjet harkut është 90°. Sa është rrezja e vijës rrethore, pjesë e së cilës është lakimi i arteries?

6. Një rrëshqitëse në këndin e lojërave për fëmijë ka një kthesë rrethore me gjatësi harku 12 m dhe kënd qendror 120°. Sa është rrezja e kthesës?

7. Jovani vendos një gardh rreth një kopshti rrethor me lule. Ai mati se gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet një këndi qendror prej 60° është 5,24 metra. Sa metra gardh nevojiten për të rrethuar të gjithë kopshtin?

8. Cilit kënd qendror i përgjigjet harku rrethor, gjatësia e të cilit është e barabartë me rrezen e vijës rrethore?

9. Cili është shtegu më i shkurtër nga A në B në vizatimin 4, shtegu i katër apo ai i gjelbër?



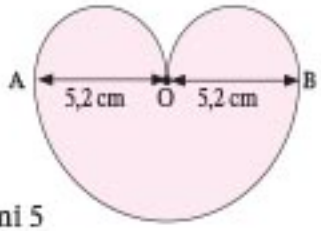
Vizatimi 4

10. Një kënd periferik prej 36° zë një hark rrethor me gjatësi 2,5 m. Njehsoni perimetrin e vijës rrethore.

11. Gjatësia e meridianit të Tokës është 40003,423 km. Njehsoni gjatësinë e harkut që i përgjigjet: a) 1°, b) 1'. (Gjatësia e harkut të meridianit të Tokës që i përgjigjet 1' quhet **milje detare**).

12. Një shirit metalik është përkulur në formën e një vije rrethore me rreze 4 cm. Për nevojat e një punishteje llamarine, ai shirit u hap në një hark rrethor me rreze 10 cm. Cili kënd qendror i përgjigjet harkut rrethor të fituar?

13. Kartolina përbëhet nga tre gjysmërrathë, ku *O* është qendra e gjysmërrethit të madh (vizatimi 5). Sara dëshiron të dekorojë distancën rreth kartolinës me një shirit. Sa shirit i nevojitet Sarës.

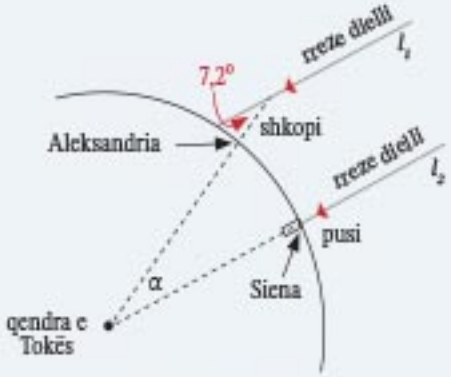


Vizatimi 5

Hulumtim

Më shumë se 2000 vjet më parë, shkencëtari grek Eratosteni vlerësoi perimetrin e Tokës, duke supozuar se rrezet e diellit janë paralele. Në mesditë gjatë solsticit të verës, në Siena (Asuanin e sotëm), Dielli binte vertikalisht (pa krijuar hije në pus), ndërsa në Aleksandri, një shkop vertikal hidhte hije me kënd 7,2° (vizatimi 6). Distanca përgjatë meridianit nga Siena në Aleksandri ishte rreth 5000 stade ("stadia" është njësi matëse e lashtë egjiptiane për gjatësinë).

a) Sa është këndi qendror α midis dy qyteteve?
b) Shpjegoni se si Eratosteni vlerësoi perimetrin e Tokës.
c) Vlerësoni perimetrin e Tokës në stade.
ç) Nëse 1 stadi = 157,5 m, njehsoni sa kilometra është perimetri i Tokës.



Vizatimi 6

5. PERIMETRI I FORMAVE 2D TË PËRBËRA

Aktivitet

Një fermë në formë drejtkëndëshi me përmasa 400 m me 350 m është e rrethuar me 4 rreshta tel (figura 1).
Njehsoni:
a) perimetrin e fermës,
b) gjatësinë totale të telit për rrethim,
c) sa kushton teli për rrethim nëse çmimi i tij është 140 denarë për metër.

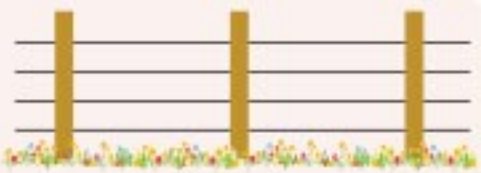
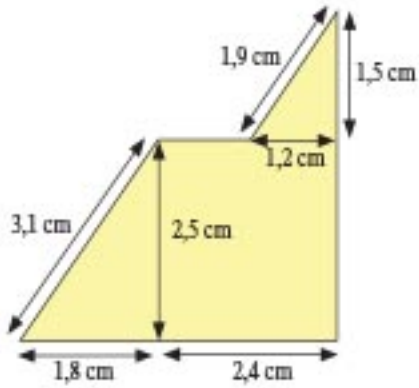


Figura 1

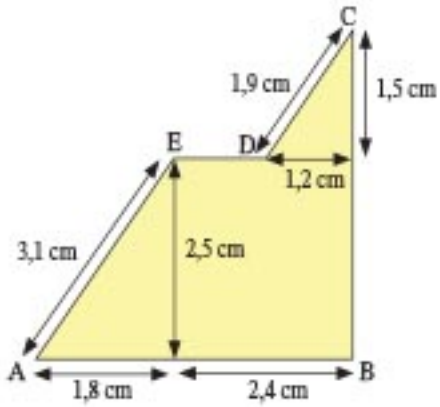
Shpesh në jetën e përditshme lind nevoja për të njehsuar shuma të gjatësive të formave 2D të thjeshta ose të përbëra. Në atë rast, kujdesemi se nga cilat forma 2D ose pjesë të tyre përbëhet forma 2D e përbërë dhe përdorim formula tashmë të njohura për llogaritjen e perimetrit.

Shembulli 1

Njehsoni perimetrin e formës 2D të përbërë të paraqitur në vizatimin 1.



Vizatimi 1



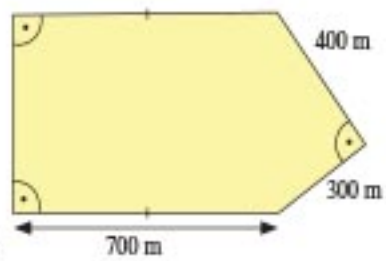
Vizatimi 2

Sipas vizatimit 2, gjejmë se $\overline{DE} = 2{,}4\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 1{,}2\text{ m}$.
Perimetri është shuma e gjatësive të brinjëve të formës 2D të përbërë:

$$P = 1{,}5\text{ m} + 1{,}9\text{ m} + 1{,}2\text{ m} + 3{,}1\text{ m} + 1{,}8\text{ m} + 2{,}4\text{ m} + 2{,}5\text{ m} = 14{,}4\text{ m}.$$

Detyra 1

Konstantini në mëngjes vrapon rreth qendrës tregtare më të afërt. Dimensionet e saj janë dhënë në vizatimin 3. Sa xhiro duhet të bëj përreth qendrës tregtare për të vrapuar gjithsej 13 km?



Vizatimi 3

Shembulli 2

Në vizatimin 4 është paraqitur një dritare e përbërë nga një katror dhe një gjysmërreth. Njehsoni perimetrin e saj.

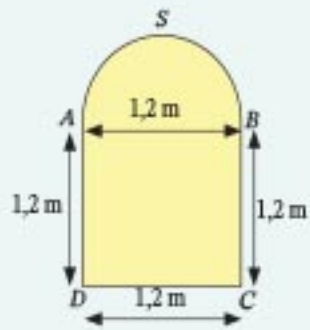
Perimetri i dritares është shuma e gjatësive të brinjëve AD, DC dhe BC dhe gjatësisë së gjysmërrethit ASB. Meqë

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = 1{,}2\text{ m}$$

dhe gjysmërrethi ka diametër 1,2 m, fitojmë

$$P = 3 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \pi \approx 3 \cdot 1{,}2\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\text{ m} \cdot 3{,}14 =$$

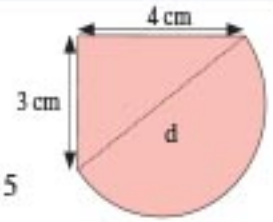
$$= 3{,}6\text{ m} + 1{,}884\text{ m} = 5{,}484\text{ m}.$$



Vizatimi 4

Shembulli 3

Varësja e paraqitur në vizatimin 5 duhet të skajohet me tel ari përgjatë skajit. Njehsoni gjatësinë e telit të artë që duhet të përdoret.



Vizatimi 5

Varësja përbëhet nga një trekëndësh kënddrejtë dhe një gjysmërreth. Diametri i rrethit është

$$d=\sqrt{(3\text{cm})^2+(4\text{cm})^2}=\sqrt{9\text{cm}^2+16\text{cm}^2}=\sqrt{25\text{cm}^2}=5\text{cm}.$$

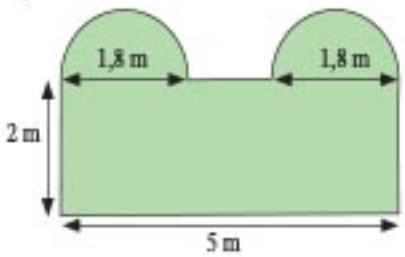
Perimetri i varëses është shuma e gjatësive të kateve të trekëndëshit kënddrejtë dhe gjysmëperimetrit të rrethit:

$$P\approx 3\text{cm}+4\text{cm}+\frac{5\text{cm}\cdot 3{,}14}{2}=14{,}85\ \text{cm}\approx 15\ \text{cm}.$$

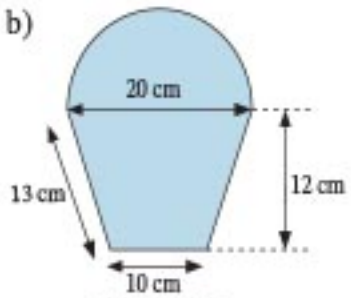
Detyra 2

Njehsoni perimetrin e formave 2D të dhëna në vizatimin 6.

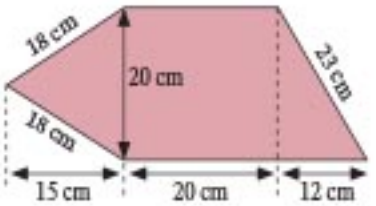
a)



b)



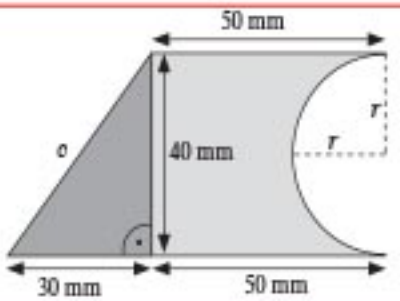
c)



Vizatimi 6

Detyra 3

Njehsoni perimetrin e elementit mekanik të dhënë në vizatimin 7.



Vizatimi 7

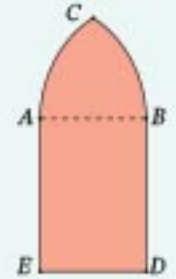
Shembulli 4

Çfarë gjatësie shufre PVC do të nevojitet për të bërë një dritare me formë si në vizatimin 8. Pikat A, B dhe C janë kulme të një trekëndëshi barabrinjës, A është qendër për harkun rrethor $\overset{\frown}{BC}$, B është qendër për harkun rrethor $\overset{\frown}{AC}$, $\overline{ED}=0{,}5$ m dhe $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}$.

Meqenëse A, B dhe C janë kulme të një trekëndëshi barabrinjës, harqet rrethore janë mbi këndet $60°$ ($\alpha=60°$, $r=\overline{AB}=0{,}5$ m, $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}=2\cdot 0{,}5=1$ m).
Perimetri i formës është:

$$P\approx 1+0{,}5+1\text{m}+2\cdot\frac{0{,}5\text{m}\cdot 60°\cdot 3{,}14}{180°}=2{,}5\text{m}+2\cdot 0{,}52\text{m}=3{,}54\ \text{m}.$$

Për të bërë dritaren nevojiten 3,52 m shufre PVC.



Vizatimi 8

Shembulli 5

Në vizatimin 9 është paraqitur një lëndinë në formë trapezi dhe një lulishte rrethore brenda saj.
Lëndina dhe lulishtja duhet të rrethohen me 2 shtresa litari dekorativ, çmimi i të cilit është 78 denarë për metër. Sa para duhet të paguajë ndërmarrja "Qyteti i Rregulluar" për rrethimin me litar?

Gjatësia e 1 shtrese litari që nevojitet për rrethim është:

$P = P_t + P_e \approx 3\text{ m} + 3{,}75\text{ m} + 3{,}25\text{ m} + 2{,}5\text{ m} + 1{,}5\text{ m} \cdot 3{,}14 = 17{,}21\text{ m}$

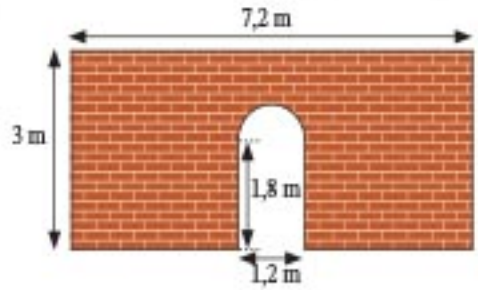
Për 2 shtresa nevojiten afërsisht $17{,}21 \cdot 2 = 34{,}42$ m litar.

Shuma që duhet të paguajë ndërmarrja është:

$34{,}42\text{ m} \cdot 78\text{ den.} = 2684{,}76\text{ den.} \approx 2685$ denarë.

Detyra 4

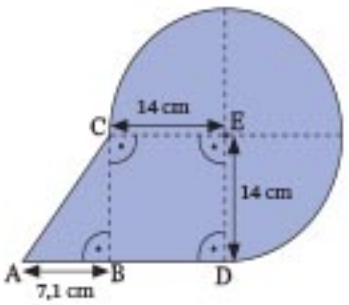
Njehsoni çfarë gjatësie kornizash dekorative do të nevojiten për të skajëzuar një mur me formë dhe dimensione si në vizatimin 10.



Vizatimi 10

Detyra 5

Njehsoni perimetrin e formës së paraqitur në vizatimin 11.

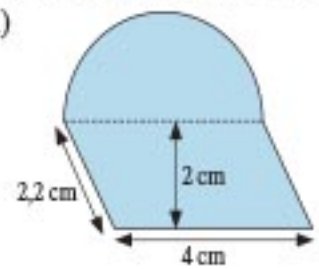


Vizatimi 11

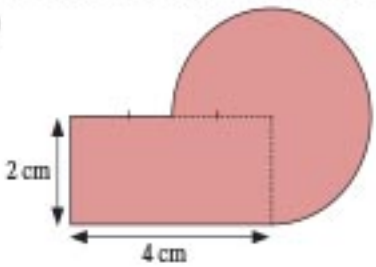
DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni perimetrin e formave 2D të përbëra të paraqitura në vizatimin 12:

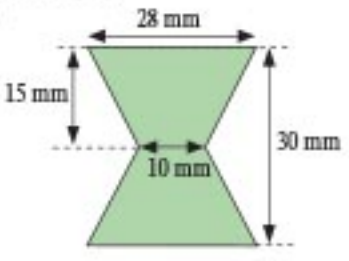
a)



b)

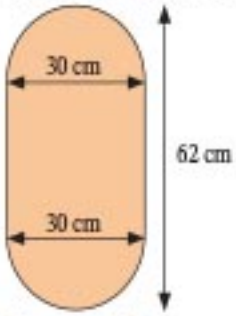


c)

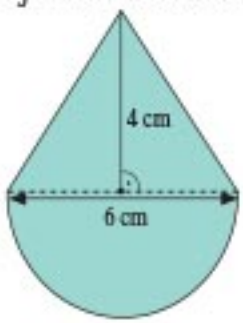


Vizatimi 12

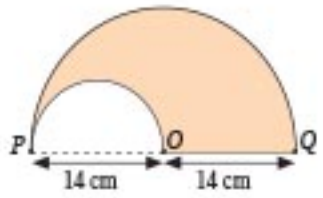
2. Në vizatimin 13 është paraqitur një dritare avioni. Gjeni perimetrin e saj.



Vizatimi 13



Vizatimi 14



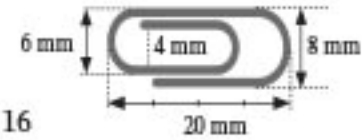
Vizatimi 15

3. Në vizatimin 14 është dhënë një zbukurim i qëndisur për veshje që duhet të qepet përgjatë skajeve me shirit dekorativ. Njehsoni gjatësinë e shiritit që do të përdoret për dekorim.

4. Një punëtor mekanik pret një gjysmërreth të madh me diametër 28 cm. Më pas, punëtori pret një gjysmërreth më të vogël nga ai më i madhi dhe e largon (vizatimi 15). Diametri i pjesës gjysmërrethore që është larguar është 14 cm. Gjeni perimetrin e formës së fituar.

   Përdorni $\pi \approx \frac{22}{7}$.

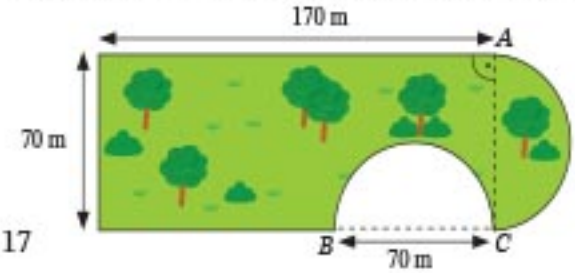
5. Në një fabrikë të materialeve të zyrës prodhohen kapëse (vizatimi 16).
   Sa kapëse mund të prodhohen nga një tel çeliku me gjatësi 10 m?



Vizatimi 16

6. Në vizatimin 17 është paraqitur një park në formë drejtkëndëshi me një gjysmërreth të shtuar në njërën anë dhe një gjysmërreth tjetër të hequr në anën tjetër. Gjeni gjatësinë e shtegut rreth parkut.

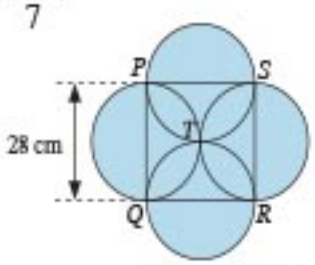
   Përdorni $\pi \approx \frac{22}{7}$.



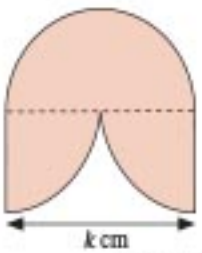
Vizatimi 17

7. Teli është përkulur për të marrë formën 2D të dhënë në vizatimin 18. Forma përbëhet nga katër vija rrethore identike. Secila vijë rrethore pritet me dy tjerat. Katër vijat rrethore priten në një pikë të përbashkët T, e cila është qendra e katrorit *PQRS*. Gjeni gjatësinë e telit.

   Përdorni $\pi \approx \frac{22}{7}$.



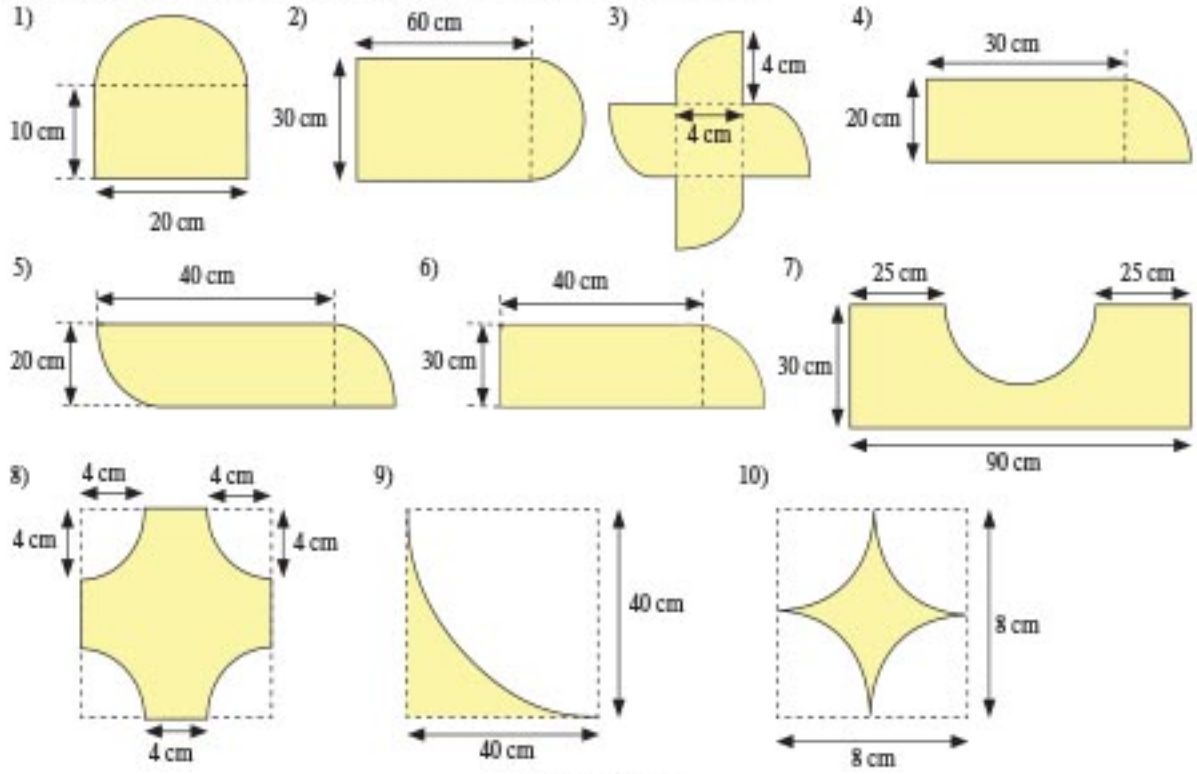
Vizatimi 18



Vizatimi 19

8. Perimetri i formës 2D të dhënë në vizatimin 19 është 97,29 dm. Gjeni vlerën e *k*.

9. Njehsoni perimetrin e formave 2D të dhëna në vizatimin 20:



Vizatimi 20

Hulumtim

Kutia e laptopit me dimensione si në figurën 1 është e paketuar me 3 shirita plastike, ashtu që të dy skajet e secilit shirit në vendin ku bashkohen mbivendosen me gjatësi 5 cm. Llogaritni sa shirit plastike nevojitet për paketimin e 200 kutive?

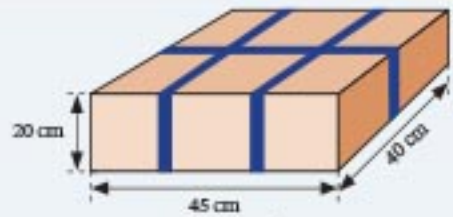
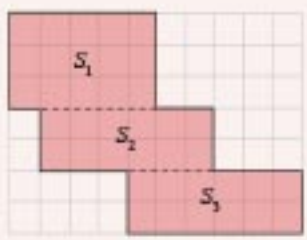


Figura 1

6. SYPRINA E PARALELOGRAMIT

Aktivitet

Sa është syprina *S* e formës në vizatimin 1? Sa janë syprinat e formave në vizatimin 2? A janë format të puthitshme?



Vizatimi 1



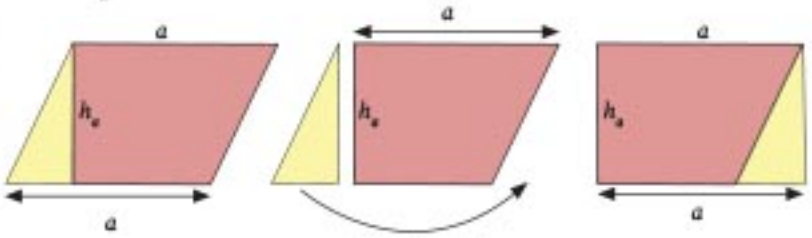
Vizatimi 2

Format në vizatimin 2 nuk janë të puthitshme, por përbëhen nga i njëjti numër (16) katrorësh të puthitshëm. Për to themi gjithashtu se janë me **syprina të barabarta**.
Në jetën e përditshme shpesh gjendemi në situata në të cilat lind nevoja për të përcaktuar syprinën e një forme 2D. Gjatë kësaj, gjithmonë mbështetemi në vetitë e mëposhtme të syprinës:

1. Numri matës i syprinës së çdo forme 2D është numër pozitiv.
2. Format 2D të puthitshme kanë syprina të barabarta.
3. Nëse forma 2D përbëhet nga më shumë pjesë që nuk mbivendosen, atëherë syprina e saj është shuma e syprinave të atyre pjesëve.

Për të përcaktuar syprinën e paralelogramit, do të përdorim vizatimin 3.

Paralelogramin në vizatim e "presim" përgjatë njërës prej lartësive të tij dhe trekëndëshin e "prerë" e zhvendosim për të fituar një paralelogram tjetër. Meqenëse lartësia h_a është normale me brinjën a, paralelogrami i fituar është drejtkëndësh me brinjë a dhe h_a. Syprina e tij është prodhimi i gjatësive a dhe h_a. Drejtkëndëshi i fituar është me syprinë të barabartë me paralelogramin.

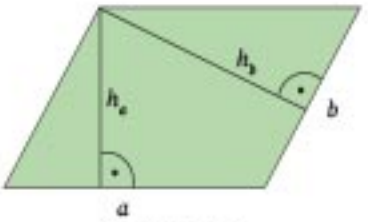


Vizatimi 3

Skenoni kodin

Në vizatimin 4 është dhënë një paralelogram me brinjë a dhe b. Janë tërhequr lartësitë h_a dhe h_b, të brinjëve përkatëse a dhe b. Syprina e paralelogramit është e barabartë me prodhimin e gjatësisë të brinjës dhe lartësisë përkatëse, pra

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$



Vizatimi 4

Syprina e paralelogramit është e barabartë me prodhimin e cilësdo brinje dhe lartësisë përkatëse.

Prandaj, syprina S e paralelogramit llogaritet me formulat:

$$S = a \cdot h_a \text{ ose } S = b \cdot h_b,$$

ku a dhe b janë brinjët, ndërsa h_a dhe h_b janë lartësitë përkatëse të brinjëve të paralelogramit.

Shembulli 1

Njëra brinjë e paralelogramit është 5 cm, dhe lartësia e lëshuar drejt saj është 3 cm. Sa është syprina e paralelogramit?

Sipas kushteve të detyrës, kemi se $a = 5$ cm dhe $h_a = 3$ cm. Syprina e paralelogramit është

$$S = a \cdot h_a = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

Aktivitet

Nga formula $S = a \cdot h_a$ si mund të njehsoni:
a) brinjën a, nëse janë dhënë S dhe h_a, b) lartësinë h_a, nëse janë dhënë a dhe S?

Shembulli 2

Njëra brinjë e paralelogramit është e gjatë 15 cm, dhe lartësia përkatëse është e gjatë 8 cm.
a) Sa është lartësia që i përgjigjet brinjës tjetër me gjatësi 12 cm?
b) Krahasoni gjatësitë e brinjëve dhe lartësitë përkatëse. Çfarë vëreni?

a) Sipas kushteve të detyrës, kemi se $a = 15$ cm, $h_a = 8$ cm dhe $b = 12$ cm. Syprina e paralelogramit është:
$S = a \cdot h_a = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$.
Sipas formulës $S = b \cdot h_b$ marrim
$$h_b = \frac{S}{b} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$
b) Vërejmë se lartësia drejt brinjës më të gjatë të paralelogramit është më e shkurt se lartësia drejt brinjës më të shkurtër të paralelogramit.

Detyra 1

Njehsoni lartësinë h_b të paralelogramit, nëse janë të njohura gjatësitë e brinjëve $a = 4$ cm, $b = 5$ cm dhe gjatësia e lartësisë së tij $h_a = 3$ cm.

Detyra 2

Gjatësitë e brinjëve të një paralelogrami janë 10 dm dhe 1,2 m. Sa është lartësia më e gjatë, nëse lartësia më shkurt është 45 cm?

Detyra 3

Si do të ndryshojë syprina e paralelogramit, nëse:
a) njëra brinjë e tij rritet 2 herë, b) njëra brinjë e tij zvogëlohet 3 herë

Shembulli 3

Një fermë bujqësore planifikon të mbjellë një parcelë në formë paralelogrami me një çift brinjësh të gjata nga 1200 m dhe distancë midis tyre 750 m. Nëse fara kushton 82,5 denarë për hektar, sa do të jetë çmimi total për mbjelljen e gjithë parcelës?

Syprina e arës është:
$S = 1200 \text{ m} \cdot 750 \text{ m} = 900\,000 \text{ m}^2 = 90 \text{ hm}^2$ $(1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2)$
Çmimi total për mbjelljen e gjithë parcelës është $90 \cdot 82{,}5$ den. $= 7425$ denarë.

Detyra 4

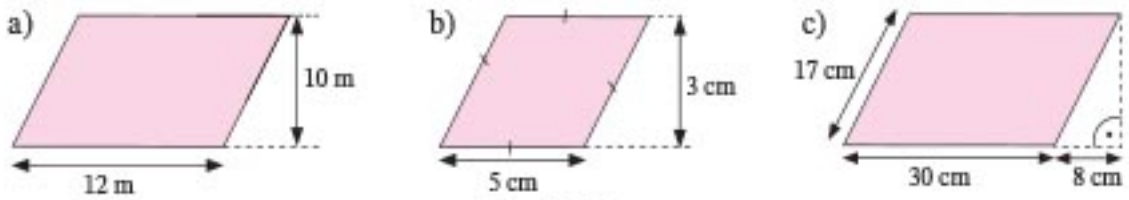
Një firmë ndërtimi duhet të shtrojë pllaka në një pjesë të parkingut që ka formë paralelogrami. Gjatësia e njërës brinjë është 80 m, dhe distanca midis brinjëve është 60 m. Nëse shtrimi i pllakave kushton 125 denarë për metër katror, sa do të jetë çmimi total për shtrimin e të gjithë parkingut?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Rishkruani dhe plotësoni tabelën në të cilën janë dhënë vlerat për disa elemente të paralelogramit.

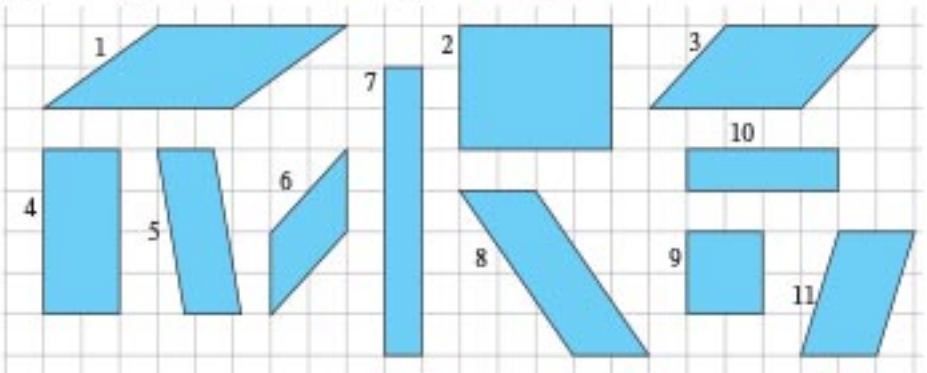
a	b	h_a	h_b	S
9 cm	12 cm			36 cm²
12 mm	7,5 mm	5 mm		
		9 cm	0,3 dm	18 cm²
12 cm			6 dm	24 dm²

2. Njehsoni syprinën e paralelogrameve në vizatimin 5:



Vizatimi 5

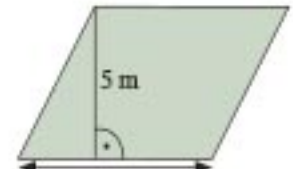
3. Syprina e një paralelogrami është 36 cm², dhe lartësitë e tij janë 4 cm dhe 6 cm. Njehsoni perimetrin e tij.
4. Syprina e një rombi është 24 cm², perimetri i tij është 24 cm. Njehsoni lartësinë e rombit.
5. Njehsoni syprinën e një rombi me perimetër 36 cm, nëse lartësia është për 2 cm më e vogël se brinja.
6. Cilët nga paralelogramët në vizatimin 6 janë me syprina të barabarta?



Vizatimi 6

7. Mësuesi i kërkoi nxënësve të tij të shkruajnë syprinën e paralelogramit nga vizatimi 7. Mira shkroi 12 m², ndërsa Jovani shkroi 35 m. Të dy gabuan.

a) Shpjegoni gabimin e secilit prej tyre.
b) Shkruani përgjigjen e saktë.



Vizatimi 7

8. Saidi ka një arë në formë rombi me gjatësi gardhi 96 m dhe distancë midis brinjëve të kundërta 18 m. Ai ka një qese me pleh prej 15 kg, në etiketën e së cilës shkruan "Përdorni 35 g pleh për metër katror". A ka Saidi mjaftueshëm pleh për të gjithë arën?

9. Një rrobaqepëse duhet të bëjë një perde në formë paralelogrami. Gjatësia e brinjës së poshtme të perdes është 2,4 m, dhe lartësia përkatëse është 1,8 m. Sa është syprina e pëlhurës që i nevojitet për të bërë perden?

10. Një mjeshtër bën një zbukurim të murit të përbërë nga pllaka në formë paralelogrami. Secila pllakë ka një brinjë të gjatë 45 cm, dhe lartësinë përkatëse 30 cm.
a) Njehsoni syprinën e një pllake në centimetra katrorë dhe në metra katrorë.
b) Nëse muri që duhet të mbulohet ka sipërfaqe 4,5 m², sa pllaka nevojiten për të gjithë murin?
c) Nëse një pllakë kushton 85 denarë, sa do të jetë çmimi total për vendosjen e të gjitha pllakave?

Hulumtim

1. Është dhënë katrori *MNPQ*. Konstruktoni një paralelogram me brinjë *MN* dhe kënd të ngushtë 60° i cili ka syprinë të barabartë me katrorin. Arsyetoni procedurën.
2. Duke përdorur softuer gjeometrik, vizatoni një paralelogram, përcakto syprinën e tij dhe hulumtoni si ndryshon ajo me ndryshimin e brinjëve dhe lartësive. Vizatoni disa paralelogramë me syprina të barabarta me paralelogramin e parë të vizatuar.

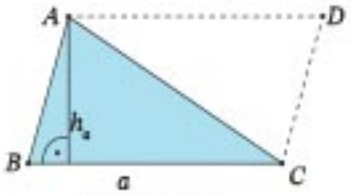
7. SYPRINA E TREKËNDËSHIT

Aktivitet

Vizatoni një paralelogram *ABCD* dhe tërhiqni një diagonale dhe të dy lartësitë e tij. Trekëndëshat e fituar a janë të puthitshëm dhe pse? Shënoni lartësinë e secilit prej trekëndëshave të fituar.

Trekëndëshi ABC me bazë a dhe lartësi përkatëse h_a është "plotësuar" deri në paralelogramin $ABCD$ (vizatimi 1). Ai përbëhet nga dy trekëndësha të puthitshëm ABC dhe CDA. Prandaj, syprina e secilit prej tyre është e barabartë me gjysmën e syprinës së paralelogramit $ABCD$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a .$$



Vizatimi 1

Pra, syprina S e një trekëndëshi me bazë a dhe lartësi h_a është

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Skenoni kodin për syprinën e trekëndëshit.

Në mënyrë të ngjashme, mund të përfundojmë se edhe për dy brinjët e tjera b dhe c, dhe lartësitë përkatëse h_b dhe h_c, vlejnë formulat:

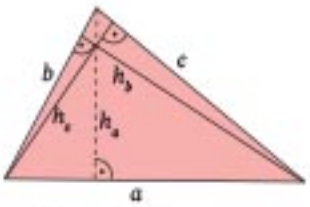
$$S = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ dhe } S = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Syprina e trekëndëshit është e barabartë me gjysmën e prodhimit të gjatësive të cilësdo brinje dhe lartësisë përkatëse.

Prandaj, syprina e trekëndëshit S njehsohet me formulat (vizatimi 2):

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ ose } S = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ ose } S = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

ku a, b dhe c *janë brinjët*, ndërsa h_a, h_b dhe h_c janë lartësitë përkatëse të brinjëve të trekëndëshit.



Vizatimi 2

Shembulli 1

Njehsoni syprinën e një trekëndëshi me brinjë $a = 18$ cm, dhe lartësi $h_a = 10$ cm.

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{18\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

Detyra 1

Njehsoni syprinën e një trekëndëshi, nëse janë dhënë:

a) $b = 1{,}2$ dm dhe $h_b = 0{,}8$ dm,

b) $c = 3\frac{2}{5}$ m dhe $h_c = 7{,}6$ m.

Aktivitet

Nga formula $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ ai mundeni të njehsoni:

a) brinjën a, nëse janë dhënë S dhe h_a,

b) lartësinë h_a, nëse janë dhënë a dhe P?

Shembulli 2

Njehsoni gjatësinë e brinjës së një trekëndëshi me syprinë $S = 39\ \text{cm}^2$, nëse lartësia e lëshuar drejt brinjës a është 7,8 cm.

Sipas kushteve të detyrës, kemi se $h_a = 7{,}8\ \text{cm}$ dhe $S = 39\ \text{cm}^2$. Sipas formulës $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ për brinjën a marrim

$$a = \frac{2S}{h_a} = \frac{2 \cdot 39\text{cm}^2}{7{,}8\text{cm}} = 10\,\text{cm}.$$

Detyra 2

Nga një mozaik trekëndor, Anja formon një të ri, në formë trekëndëshi me të njëjtën syprinë. Nëse gjatësia e brinjës së mozaikut të parë është 9 cm, dhe lartësia përkatëse është 6 cm, sa do të jetë lartësia e mozaikut të dytë, nëse brinja e tij është 12 cm?

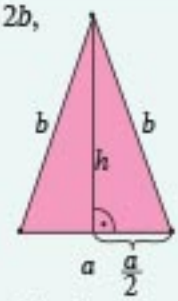
Shembulli 3

Njehsoni syprinën e një trekëndëshi barakrahës me perimetër

$P = 36$ cm dhe bazë $a = 8$ cm (Vizatimi 3).

Sipas formulës për njehsimin e perimetrit të një trekëndëshi barakrahës $P = a + 2b$, fitojmë

$$b = \frac{P - a}{2} = \frac{36\text{cm} - 8\text{cm}}{2} = 14\ \text{cm}.$$



Vizatimi 3

Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës, për lartësinë h të lëshuar drejt brinjës a, gjejmë se

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(14\text{cm})^2 - (4\text{cm})^2} = \sqrt{180\text{cm}^2} \approx 13{,}4\,\text{cm}.$$

Vlerën e $\sqrt{180}$ e llogarisim me kalkulator me sustën përkatëse.

Marrim një vlerë të përafërt, në këtë rast të rrumbullakuar në një shifër dhjetore.

Syprina e kërkuar e trekëndëshit barakrahës është

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{8\text{cm} \cdot 13{,}4\text{cm}}{2} = 53{,}6\ \text{cm}^2.$$

Detyra 3

Një lëndinë ka formë trekëndëshi barakrahës me krahë 5 m dhe lartësi drejt bazës 3 m. Sa ujë për ujitje nevojitet gjatë një jave, nëse për një sipërfaqe prej 3 m^2 nevojiten 5 l ujë çdo ditë?

Detyra 4

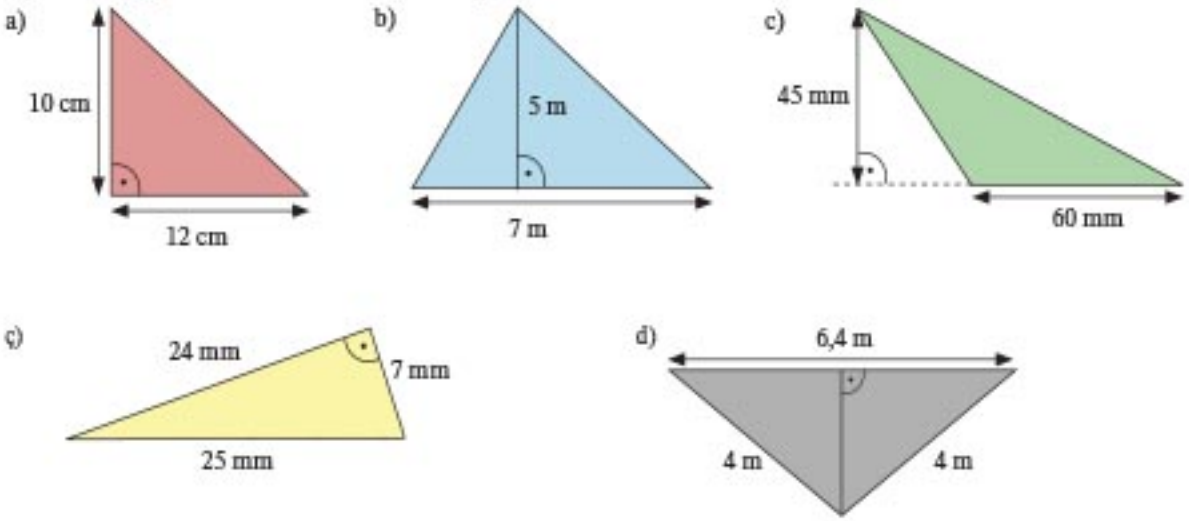
Njehsoni syprinën e pëlhurës së nevojshme për të bërë velin e anijes (vizatimi 4). Sa do të kushtojë materiali nëse 1 m² ka çmim 326 denarë?



Vizatimi 4

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni syprinën e trekëndëshave nga vizatimi 5:



Vizatimi 5

2. Për një trekëndësh ABC të dhënë, njehsoni:

a) b, nëse $S = 64$ cm² dhe $h_b = 8$ cm, b) h_c, nëse $S = 8$ cm² dhe $c = 3{,}2$ cm.

3. Një paralelogram me brinjë a dhe lartësi përkatëse h_a dhe një trekëndësh me brinjë $2a$ kanë syprina të barabarta. Sa është lartësia e trekëndëshit?

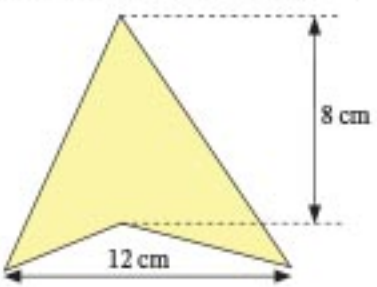
4. Si do të ndryshojë syprina e trekëndëshit, nëse brinja:

a) rritet 3 herë, dhe lartësia përkatëse mbetet e pandryshuar,
b) zvogëlohet 6 herë, dhe lartësia përkatëse rritet 2 herë.

5. Njehsoni perimetrin e një trekëndëshi këndrejtë, nëse syprina e tij është 54 cm² dhe njëri katet është 2 cm.

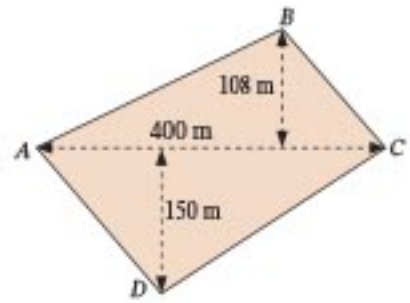
6. Nxirrni formulën për syprinën e një trekëndëshi barabrinjës duke përdorur Teoremën e Pitagorës.

7. Emblema e një shkolle është në formën e dhënë në vizatimin 6.
Njehsoni syprinën e saj.



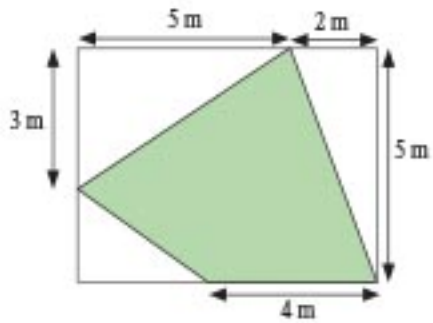
Vizatimi 6

8. Në vizatimin 7 është dhënë fusha e një fermeri. Ai dëshiron ta shesë me çmim prej 1280 denarë për metër katror. Njehsoni çmimin e fushës.



Vizatimi 7

9. Njehsoni sa para do të nevojiten për farat për mbjelljen e arës me formë si në vizatimin 8, nëse farat për 1 m² janë 37 denarë.



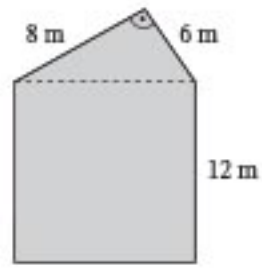
Vizatimi 8

10. Ju jeni pjesë e një ekipi që duhet të rregullojë një hapësirë parkimi në afërsi të shkollës tuaj. Parkingu ka formë pesëkëndëshe e cila është dhënë në vizatimin 9.

a) Sa do të kushtojë asfaltimi total nëse çmimi për 1 m² është 2350 denarë?

b) Përreth tri brinjëve më të gjata të parkingut, është parashikuar një shirit i vogël i gjelbër, 1 m i gjerë, me bar dhe bimë të tjera zbukuruese. Sa duhet të paguhet shtesë për shiritin e gjelbër, nëse për 1 m² rregullim hortikulturor duhet të paguhen 1200 denarë?

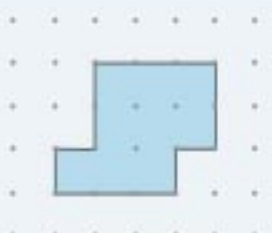
c) Propozoni edhe zgjidhje të tjera të mundshme për hapësirën (ndriçim, automat uji, etj.).



Vizatimi 9

Hulumtim

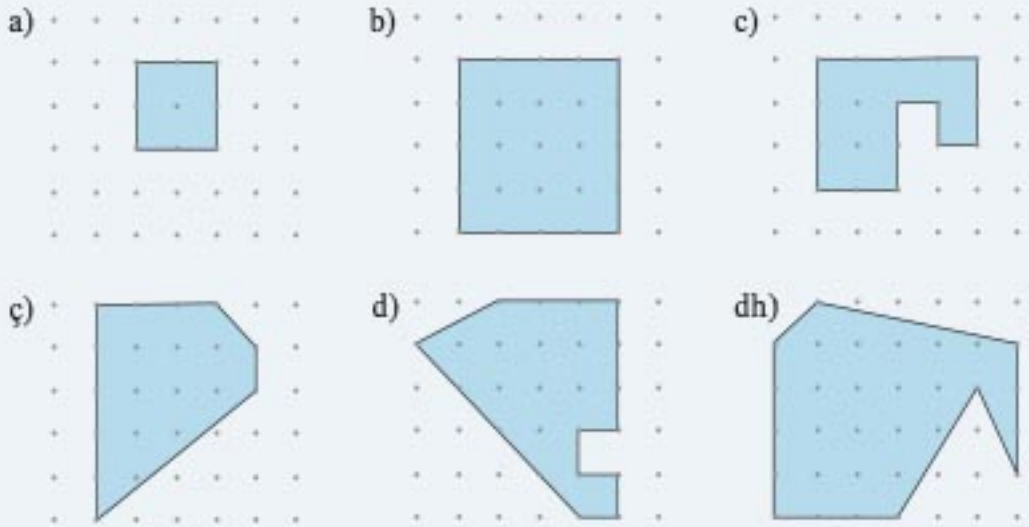
Shqyrtoni formën 2D që është vizatuar në letër me pika të vendosura në kulmet e katrorëve të vegjël. Pikat që ndodhen në brinjët e formës 2D janë pika kufitare, ndërsa ato që janë në brendësi të formës 2D janë pika të brendshme. Në vizatimin 10, numri i pikave kufitare është $G = 14$, ndërsa numri i pikave të brendshme është $V = 3$



Vizatimi 10

Mundohuni të plotësoni tabelën e dhënë sipas vizatimit 11.

Forma 2D	G	$\frac{G}{2}$	V	$\frac{G}{2}+V$	Syprina S



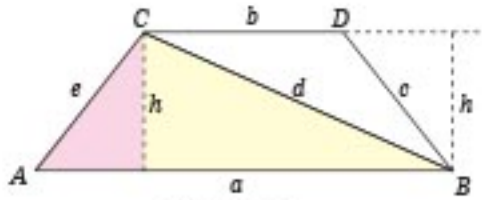
Vizatimi 11

Shqyrtoni dy kolonat e fundit të tabelës dhe propozoni një rregull që lidh S, G dhe V. Vizatoni disa forma 2D të ndryshme në letër me pika dhe verifikoni saktësinë e rregullit.

8. SYPRINA E TRAPEZIT

Aktivitet

Vizatoni një trapez në një copë letre dhe shënoni bazat e tij me a dhe b, ndërsa lartësinë me h. Prejeni trapezin përgjatë njërës prej diagonaleve të tij, për ta ndarë në dy trekëndësha.
a) Sa është lartësia e trekëndëshave, e lëshuar drejt brinjës a, përkatësisht drejt brinjës b?
b) Njehsoni syprinën e dy trekëndëshave.



Vizatimi 1

Syprina e trapezit *ABCD*, të paraqitur në vizatimin 1, është shuma e syprinave të trekëndëshave *ABC* dhe *BDC*, pra

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BDC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

Syprina e trapezit është e barabartë me prodhimin e gjysmës së shumës së gjatësive të bazave të tij dhe lartësisë.

Pra, syprina S e trapezit llogaritet sipas formulës:

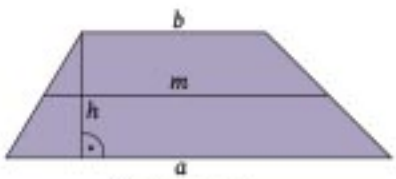
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h ,$$

ku a dhe *b* janë bazat dhe *h* është lartësia e trapezit.

Skanoni kodin.

Meqenëse gjysma e shumës së gjatësive të bazave të trapezit është e barabartë me gjatësinë e vijës së mesme të trapezit $m = \frac{a+b}{2}$, formula e mësipërme për syprinën e trapezit merr formën

$$S = m \cdot h.$$



Vizatimi 2

Shembulli 1

Njehsoni syprinën e trapezit, me baza $a = 2{,}5$ dm dhe $b = 8$ dm, dhe lartësi $h = 3$ dm.

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2{,}5\,\text{dm} + 8\,\text{dm}}{2} \cdot 3\,\text{dm} = 15{,}75\ \text{dm}^2.$$

Detyra 1

Njehsoni syprinën e trapezit me vijë të mesme $m = 12$ cm dhe lartësi $h = 0{,}72$ dm.

Shembulli 2

Janë dhënë baza a = 13 cm, syprina $S = 50\ \text{cm}^2$ dhe lartësia $h = 5$ cm të trapezit. Njehsoni bazën tjetër.

Nga formula për njehsimin e syprinës së trapezit $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ fitojmë

$$b = \frac{2S}{h} - a = \frac{2 \cdot 50\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}} - 13\,\text{cm} = 7\,\text{cm}.$$

Detyra 2

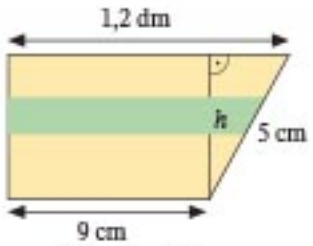
Njehsoni vijën e mesme të një trapezi me syprinë 1800 cm² dhe lartësi 9 dm.

Detyra 3

Bazat e trapezit janë 8,5 cm dhe 5,8 cm, dhe syprina e tij është 42,9 cm². Njehsoni lartësinë e trapezit.

Shembulli 3

Lirimi dëshiron të ndërtojë flamuj prej letre në formën e një trapezi këndrejtë për tifozët e garës shkollore (vizatimi 3). Bazat janë 1,2 dm dhe 9 cm, ndërsa krahu më i gjatë është 5 cm. Sa centimetra katrorë letër i nevojiten për të bërë 40 flamuj të tillë?



Vizatimi 3

Së pari, le t'i shndërrojmë të gjitha gjatësitë në të njëjtat njësi matëse.
1,2 dm = 12 cm.
Flamuri ka formë trapezi.
Sipas Teoremës së Pitagorës, për lartësinë e trapezit fitojmë

$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(12\,\text{cm}-9\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-9\,\text{cm}^2}=\sqrt{16\,\text{cm}^2}=4\,\text{cm}.$$

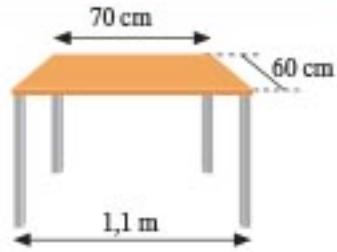
Syprina e trapezit është

$$S=\frac{12\,\text{cm}+9\,\text{cm}}{2}\cdot 4\,\text{cm}=\frac{21\,\text{cm}}{2}\cdot 4\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Lirimit i nevojiten 40 · 42 cm² = 1680 cm² letër.

Detyra 4

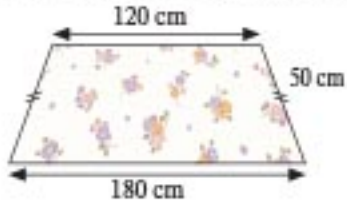
Në klasë kishte 25 banka me sipërfaqe druri në formë trapezi barabrinjës (vizatimi 4). Sipërfaqja e drurit duhet të lyhet me ngjyrë mbrojtëse. Sa metra katrorë gjithsej duhet të lyhen me ngjyrë?



Vizatimi 4

Detyra 5

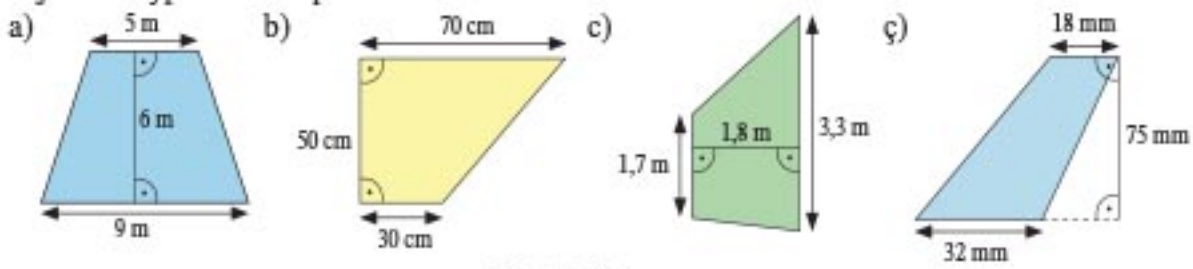
Vesna dëshiron të bëjë një fund nga materiali në vizatimin 5. Njehsoni syprinën e materialit.



Vizatimi 5

DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni syprinën e trapezeve të dhënë në vizatimin 6.



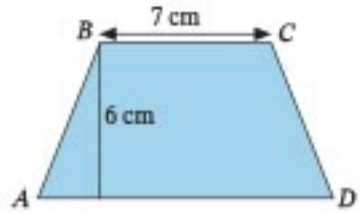
Vizatimi 6

2. Rishkruani në fletoren tuaj dhe plotësoni tabelën me madhësitë e kërkuara për trapezin:

a	42 cm	8 dm		35 cm
b	34 cm	6 dm	20 cm	
h	25 cm		9 cm	12 cm
S		42 dm²	225 cm²	336 cm²

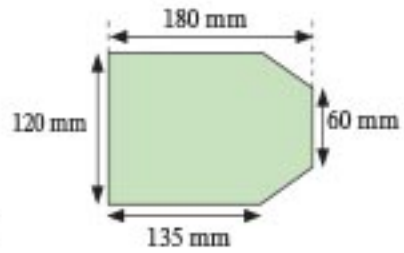
3. Njehsoni vijën e mesme të trapezit me syprinë 280 dm² dhe lartësi 14 dm.

4. Njehsoni gjatësinë e brinjës AD të trapezit $ABCD$ në vizatimin 7, nëse syprina e tij është $S = 57$ cm².



Vizatimi 7

5. Një copë e hollë metalike në një punishte elementesh mekanike ka formë dhe dimensione si në vizatimin 8. Njehsoni syprinën e njërës faqe të copës metalike.



Vizatimi 8

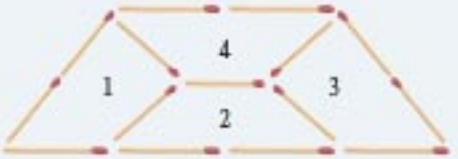
6. Një arë, e cila kishte formë trapezi me baza 142 m dhe 86 m dhe lartësi 42 m, u mboll me pambuk. Nga 1 dekar u mblodhën mesatarisht 95 kg pambuk. Sa kilogramë pambuk u mblodhën nga e gjithë ara?
Udhëzim: 1 dekar = 10 ari.

7. Elena dëshiron të rregullojë një pjesë të oborrit para shtëpisë së saj me një sipërfaqe lulesh në formë trapezi me baza 6 m dhe 3 m dhe lartësi 2,5 m. Elena dëshiron të mbjellë lule ashtu që çdo metër katror të ketë 12 fidanë.

a) Sa fidanë do t'i nevojiten për të gjithë sipërfaqen?
b) Nëse një fidan kushton 50 denarë, sa do të jetë shpenzimi total?
c) Sa metra zorrë do t'i nevojiten, nëse vendos një sistem ujitjeje që kalon përgjatë perimetrit të trapezit?
ç) Nëse secili fidan thith 0,2 kg dioksid karboni në ditë, sa dioksid karboni gjithsej do të thithet në një ditë nga të gjitha lulet e mbjella?

Hulumtim

Në vizatimin 10 është paraqitur një trapez i përbërë nga nëntë shkopinj. Ndani trapezin në katër trapeze të puthitshëm me ndihmën e pesë shkopinjve të tjerë.

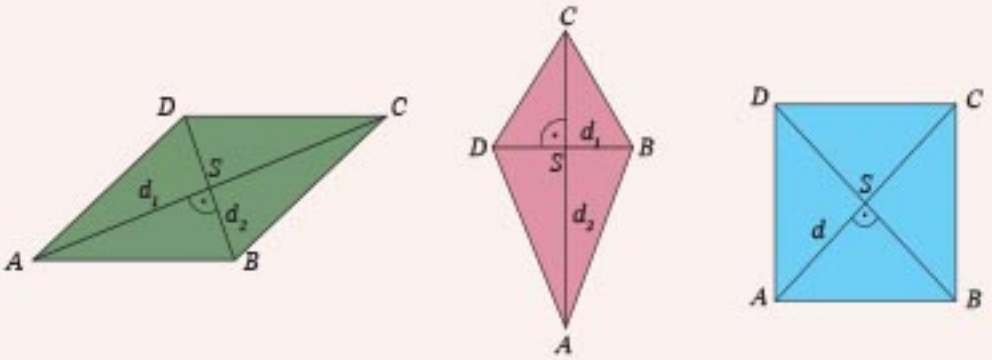


Vizatimi 9

9. SYPRINA E ROMBIT, DELTOIDIT DHE KATRORIT

Aktivitet

Vizatoni një romb, një deltoid dhe një katror. Tërhiqni diagonalet e tyre. Çfarë pozite reciproke kanë diagonalet në secilin nga katërkëndëshat e vizatuar?



Vizatimi 1

Diagonalja AC është bosht simetrie për secilin nga katërkëndëshat në vizatimin 1. Prandaj, për secilin nga katërkëndëshat vlen $\Delta ABC \cong \Delta ADC$. Kjo do të thotë se

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC}.$$

Përveç kësaj, syprina e secilit katërkëndësh është shuma e syprinave të këtyre dy trekëndëshave, pra

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BS}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{\cancel{2}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Syprina e rombit, deltoidit dhe katrorit është e barabartë me gjysmën e prodhimit të gjatësive të diagonaleve të tyre.

Prandaj, syprina S e rombit dhe deltoidit njehsohen sipas formulës:

$$S=\frac{d_1\cdot d_2}{2},$$

ku d_1 dhe d_2 janë diagonalet e rombit, përkatësisht të deltoidit.

Në mënyrë të veçantë, syprina e katrorit llogaritet sipas formulës:

$$S=\frac{d^2}{2},$$

ku d është diagonalja e katrorit.

Shembulli 1

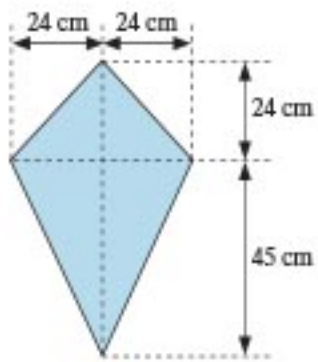
Njehsoni syprinën e rombit me diagonale $d_1 = 4{,}5$ cm dhe $d_2 = 8{,}3$ cm.

Syprina e rombit është

$$S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{4{,}5\,\text{cm}\cdot 8{,}3\,\text{cm}}{2}=18{,}675\ \text{cm}^2.$$

Detyra 1

Njehsoni syprinën e një fluturakeje në formë deltoidi të dhënë në vizatimin 2.



Vizatimi 2

Aktivitet

Nga formula për syprinën e deltoidit $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ si mundeni të njehsoni gjatësinë e njërës diagonale, nëse janë dhënë syprina S dhe gjatësia e diagonales tjetëra?

Shembulli 2

Njehsoni gjatësinë e diagonales së panjohur të një deltoidi, nëse syprina e tij është 90 cm² dhe diagonalja tjetër është e gjatë 7,5 cm.

Sipas formulës për llogaritjen e syprinës së deltoidit $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ fitojmë

$$d_2=\frac{2S}{d_1}=\frac{2\cdot 90\,\text{cm}^2}{7{,}5\,\text{cm}}=24\ \text{cm}.$$

Detyra 2

Njehsoni gjatësinë e diagonales së një katrori me syprinë 150 cm².

Shembulli 3

Njehsoni syprinën e një rombi me brinjë 5 cm, nëse njëra prej diagonaleve është 8 cm.

Diagonalet e rombit janë reciprokisht normale (Vizatimi 3).
Duke zbatuar Teoremën e Pitagorës, marrim

$$\frac{d_2}{2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-\left(\frac{8\,\text{cm}}{2}\right)^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}$$

nga ku gjejmë se $d_2 = 3\,\text{cm} \cdot 2 = 6\,\text{cm}$.

Syprina e rombit është

$$S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{8\,\text{cm}\cdot 6\,\text{cm}}{2}=24\,\text{cm}^2.$$

Detyra 3

Njehsoni sa metra tel nevojiten për të rrethuar një arë në formë rombi me syprinë 36 dam², nëse njëra diagonale e tij është 9 dam.

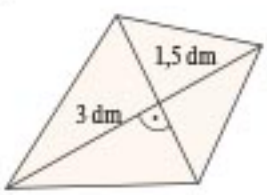
Detyra 4

Njehsoni sa pllaka në formë katrori me brinjë 60 cm nevojiten për të shtruar një shesh i cili ka formë deltoidi. Dy brinjët më të gjata të sheshit janë 50 m dhe formojnë një kënd prej 60°, ndërsa brinjët më të vogla formojnë kënd të drejtë.

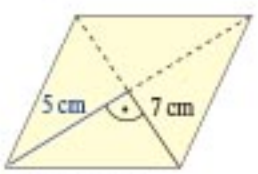
DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni syprinën e katërkëndëshave të dhënë në vizatimin 4:

a)



b)



c)



Vizatimi 4

2. Njehsoni lartësinë e një rombi, diagonalet e të cilit janë 16 cm dhe 12 cm

3. Syprina e një deltoidi është 9 dm^2, dhe njëra diagonale e tij është 1,5 dm. Sa është diagonalja tjetër e deltoidit?

4. Një deltoid dhe një katror kanë syprina të barabarta. Njehsoni diagonalen e katrorit, nëse diagonalet e deltoidit janë 16 cm dhe 4 cm.

5. Tea dëshiron të bëjë një poster dekorativ në formë deltoidi me brinjë 28 cm dhe 46 cm. Njëra diagonale, e cila nuk është bosht simetrie, është 35 cm. Sa është syprina e posterit?
Shënim: Për llogaritjen e rrënjës katrore përdorni kalkulator.

6. Nxënësit e një shkolle fillore vendosën të dizajnojnë një panel të vogël diellor për shkollën. Secila pllakë diellore është në formë rombi me diagonale 80 cm dhe 60 cm.
   a) Nëse për mbulimin e çatisë së pavijonit shkollor nevojiten 250 pllaka, sa është sipërfaqja totale që do të mbulojnë të gjitha pllakat?
   b) Nëse një metër katror i sipërfaqes së mbuluar me pllaka diellore krijon energji prej 15 Wh në ditë, sa energji do të krijohet nga sipërfaqja totale për një ditë?

Hulumtim

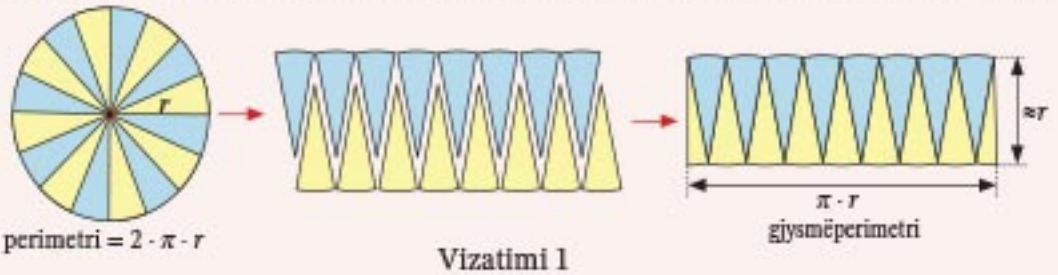
1. Në letër milimetrike, vizatoni 2 segmente që priten në kënd të drejtë. Më pas, skajet e tyre merrni si kulme të një katërkëndëshi.
   a) Njehsoni syprinën e katërkëndëshit duke numëruar katrorët e vegjël të letrës milimetrike.
   b) Njehsoni syprinën me formulën për katërkëndëshin me diagonale reciprokisht normale. Krahasoni të dy rezultatet. Çfarë vëreni?
   c) Vizatoni katërkëndësha të tjerë në letër milimetrike. Njehsoni syprinën e tyre duke numëruar katrorët e vegjël të letrës milimetrike. Verifikoni rezultatet duke njehsuar sipas formulës për syprinën e katërkëndëshit me diagonale reciprokisht normale.

2. Shpjegoni si mund të njehsohet syprina e një trapezoidi me diagonale normale duke e ndarë trapezoidin në dy trekëndësha?

10. SYPRINA E RRETHIT

Aktivitet

Pritni një rreth nga letra, ndajeni në 16 pjesë të barabarta, e më pas formoni një formë si në vizatimin 1.



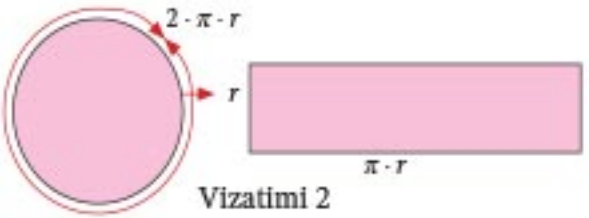
Vizatimi 1

Çfarë ju kujton forma e fituar? Ajo ka syprinë të barabartë me rrethin.
Si do ta përcaktoni syprinën e saj?

Në jetën e përditshme, shumë herë hasim nevojën për të llogaritur syprinën e një rrethi ose të pjesëve të tij.

Skanoni kodin dhe shikoni një mënyrë tjetër për të arritur te formula për syprinën e rrethit.

Le të supozojmë se një rreth me rreze r është ndarë, për shembull, në 1000 copë të barabarta, të cilat do t'i radhisim si më sipër. Forma e fituar do të jetë edhe "më afër" një drejtkëndëshi, pra syprina e tij do të jetë $S \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$ (Vizatimi 2).



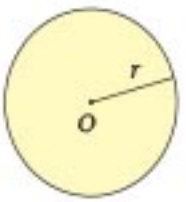
Vizatimi 2

Syprina e rrethit është e barabartë me prodhimin e numrit π me katrorin e rrezes së tij.

Prandaj, syprina e rrethit S njehsohet sipas formulës:

$$S = \pi r^2,$$

ku r është rrezja e rrethit (vizatimi 3).



Vizatimi 3

Shembulli 1

Njehsoni syprinën e një rrethi me rreze 4 cm.

Duke zëvendësuar vlerat e dhëna në formulën për njehsimin e syprinës së rrethit, fitojmë

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot (4\text{ cm})^2 = 50{,}24\text{ cm}^2.$$

Shpesh shkruajmë edhe $S = \pi r^2 = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi = 16\pi\text{ cm}^2$.

Detyra 1

Njehsoni syprinën e rrethit me: a) rreze 1 dm, b) rreze 3,2 m, c) diametër 10 cm.

Aktivitet

Nga formula $S = \pi r^2$ si mund të llogarisni rrezen r, nëse është dhënë syprina S?

Shembulli 2

Njehsoni diametrin e rrethit me syprinë $S = 113{,}04\ \text{cm}^2$.

Me ndihmën e formulës për njehsimin e syprinës së rrethit, gjejmë se

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{113{,}04\,\text{cm}^2}{3{,}14}} = \sqrt{36\,\text{cm}^2} = 6\ \text{cm}.$$

Atëherë për diametrin fitojmë $d = 2r \approx 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$.

Detyra 2

Njehsoni diametrin e tiganit për petulla, nëse syprina e një petulle të pjekur në tigan është $1962{,}5\ \text{cm}^2$.

Shembulli 3

Njehsoni syprinën e rrethit me perimetër $P = 4\pi$ cm.

Nga formula për gjatësinë e vijës rrethore $P = 2r\pi$, gjejmë se $r = \frac{P}{2\pi} = \frac{4\pi\,\text{cm}}{2\pi} = 2\ \text{cm}$.

Atëherë për syprinën e rrethit fitojmë $S = \pi \cdot r^2 = (2\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$.

Detyra 3

Njehsoni syprinën e rrethit me perimetër 25,12 dm.

Detyra 4

Njehsoni perimetrin e rrethit me syprinë 314 dm^2.

Detyra 5

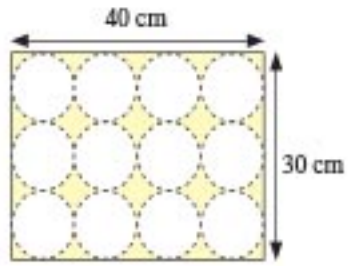
Sa herë duhet të rritet rrezja e një rrethi që syprina e tij të rritet 25 herë?

Detyra 6

Kur një tullumbace uji shpërthen në tokë, ajo krijon një rreth me ujë me diametër përafërsisht 26 cm. Njehsoni përafërsisht syprinën e sipërfaqes së tokës që është e lagur.

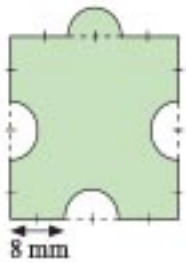
DETYRA PËR USHTRIME

1. Sa herë do të rritet syprina e rrethit, nëse rrezja e tij rritet:
   a) 3 herë, b) 7 herë?
2. Një tryezë rrethore me diametër 80 cm është e mbuluar me një mbulesë katrore me syprinë 1600 cm^2. A është tryeza plotësisht e mbuluar me mbulesën?
3. Janë dhënë dy rrathë me rreze 6 cm dhe 4 cm. Gjeni rrezen e rrethit, syprina e të cilit është e barabartë me:
   a) shumën e syprinave të dy rrathëve,
   b) ndryshimin e syprinave të dy rrathëve.
4. Një gomar është i lidhur në një shtyllë me litar të gjatë 3,6 m. Në çfarë sipërfaqe mund të lëvizë gomari?
5. Dy vija rrethore me rreze $r_1 = 5{,}4$ cm dhe $r_2 = 3$ cm preken nga brenda. Njehsoni syprinën e pjesës së rrafshit ndërmjet dy vijave rrethore.
6. Jani punon në një ëmbëltore ku çdo ditë bëhen ëmbëlsira në formë rrethore që priten nga një copë brumi me dimenzione 30 cm dhe 40 cm siç tregohet në vizatimin 4. Njehsoni syprinën e pjesës së paprerë të copës së brumit.



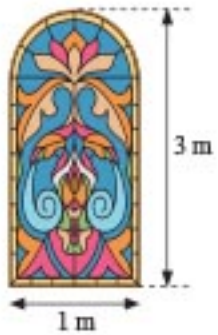
Vizatimi 4

7. Njehsoni syprinën e një cope nga një mozaik (puzzle) (vizatimi 5) dhe rrumbullakoni zgjidhjen në milimetrin katror më të afërt.



Vizatimi 5

8. Çmimi i xhamit të vitrazhit është 1150 denarë për 1 m^2. Maja është arkitekte dhe dizajnon një hapësirë në të cilën vendos 4 dritare me vitrazh (vizatimi 6). Buxheti me të cilin disponon është 14 000 denarë. Verifikoni nëse Maja ka shumë të mjaftueshme për të realizuar projektin e saj.



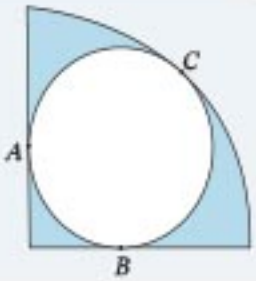
Vizatimi 6

Hulumtim

Një rreth me rreze r është brendashkruar në një çerek rrethi me rreze R, ashtu që preket në pikat A, B dhe C (vizatimi 7)

a) Gjeni lidhjen midis rrezeve R dhe r.

b) Gjeni raportin e syprinës së formës së ngjyrosur ndaj syprinës së rrethit të bardhë.



Vizatimi 7

11. SYPRINA E SEKTORIT RRETHOR, SEGMENTIT RRETHOR DHE UNAZËS RRETHORE

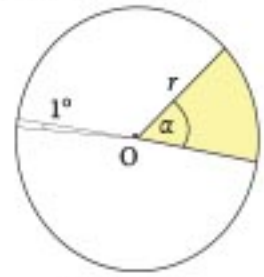
Aktivitet

a) Vizatoni dy rrathë me rreze të çfarëdoshme. Në njërin vizatoni një sektor rrethor, dhe në tjetrin një segment rrethor. Më pas, shënoni këndet qendrore dhe harqet rrethorë përkatës.

b) Vizatoni dy vija rrethore koncentrike dhe ngjyrosni hapësirën midis tyre. Emërtoni formën e fituar.

Sektori rrethor në rrethin me rreze r, këndi qendror i të cilit është 1° (vizatimi 1), ka syprinë të barabartë me $\frac{1}{360}$ e syprinës së rrethit, pra

$$S_{1^\circ}=\frac{\pi r^2}{360}=\frac{\pi r^2\cdot 1^\circ}{360^\circ}.$$



Vizatimi 1

Sektori rrethor në rrethin me rreze r, këndi qendror i të cilit është 2° ka syprinë dy herë më të madhe se sektori rrethor me kënd qendror 1°, pra $S_{2^\circ}=S_{1^\circ}\cdot 2$. Sipas kësaj, fitojmë

$$S_{2^\circ}=\frac{\pi r^2\cdot 1^\circ}{360^\circ}\cdot 2=\frac{\pi r^2\cdot 2^\circ}{360^\circ}.$$

Duke menduar në këtë mënyrë, mund të përfundojmë se një sektor rrethor në një rreth me rreze r, këndi qendror i të cilit është α, ka syprinë

$$S=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}.$$

Dimë se gjatësia e harkut që i përgjigjet sektorit rrethor është $l=\frac{\pi r\alpha}{180^\circ}$, pra formula për llogaritjen e syprinës së sektorit rrethor mund të shkruhet në formën

$$S=\frac{\pi r\alpha}{180^\circ}\cdot\frac{r}{2}=\frac{l\cdot r}{2}.$$

Syprina e sektorit rrethor është e barabartë me gjysmën e prodhimit të gjatësisë së harkut rrethor përkatës dhe rrezes.

Prandaj, syprina e sektorit rrethor S llogaritet sipas formulës:

$$S=\frac{l\cdot r}{2},$$

ku l është gjatësia e harkut rrethor përkatës dhe r është rrezja e rrethit.

Shembulli 1

Njehsoni syprinën e një sektori rrethor që i përgjigjet një këndi qendror 57°, në një rreth me rreze 6 cm.

Duke zëvendësuar numrat matës të r dhe α në formulën për sektorin rrethor, fitojmë

$$S=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}\approx\frac{3{,}14\cdot(6\,\text{cm})^2\cdot 57^\circ}{360^\circ}=17{,}898\ \text{cm}^2.$$

Detyra 1

Njehsoni syprinën e një sektori rrethor, nëse $r = 5$ cm dhe $l = 6{,}8$ cm.

Aktivitet

Nga formula $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}$ Nga formula S:

a) rrezen r, nëse janë dhënë S dhe α,

b) këndin qendror α, nëse janë dhënë r dhe S?

Shembulli 2

Një sektor rrethor me rreze 7 cm ka syprinë 64,2 cm². Njehsoni madhësinë e këndit qendror të sektorit.

Sipas formulës për llogaritjen e syprinës së sektorit rrethor, për këndin α fitojmë

$$\alpha=\frac{360^\circ S}{\pi r^2}\approx\frac{360^\circ\cdot 64{,}2\,\text{cm}^2}{3{,}14\cdot(7\,\text{cm})^2}=150^\circ.$$

Detyra 2

Në furrën "Pika e ëmbël" shiten copa byreku në formë sektori rrethor. I gjithë byreku ka formë rrethore me rreze 20 cm dhe pritet në 8 copa të barabarta.

a) Sa është këndi qendror i një cope byreku?

b) Sa është syprina e një cope byreku?

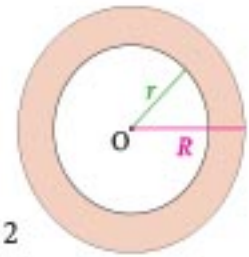
Detyra 3

Sa është rrezja e rrethit në të cilin një këndi qendror prej 70° i përgjigjet një sektor me syprinë 15,26 cm²

Në vizatimin 2 janë paraqitur dy rrathë koncentrikë. Le ta shënojmë rrezen e rrethit të madh me R dhe rrezen e rrethit të vogël me r.

Syprinën e unazës rrethore do ta marrim nëse nga syprina e rrethit të madh zbresim syprinën e rrethit të vogël, pra

$$S = \pi R^2 - \pi r^2, \quad S = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$



Vizatimi 2

Shembulli 3

Njehsoni syprinën e një unaze rrethore, nëse rrezet e vijave rrethore që e kufizojnë janë $R = 9$ cm dhe $r = 5{,}7$ cm.

Sipas formulës për syprinën e unazës rrethore, gjejmë se

$$S = \pi(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot ((9\,\text{cm})^2 - (5{,}7\,\text{cm})^2) = 152{,}3214\,\text{cm}^2.$$

Detyra 4

Në mes të oborrit të shkollës ka një shatërvan me formë rrethore. Rreth shatërvanit, nxënësit do të bëjnë një lulishte në formë unaze rrethore. Rrezja e jashtme e lulishtes është 3 m, dhe rrezja e brendshme (buzë shatërvanit) është 1,5 m.

a) Njehsoni syprinën e lulishtes.

b) Nëse për rregullimin e 1 m² nevojiten 5 bimë, sa bimë do të nevojiten për të gjithë lulishten?

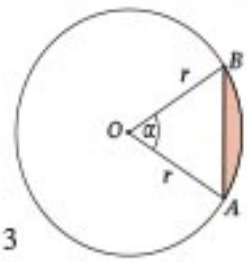
Detyra 5

Gjatësitë e dy vijave rrethore koncentrike janë 4π cm dhe 10π cm. Njehsoni syprinën e unazës rrethore të kufizuar nga vijat rrethore.

Detyra 6

Dy vija rrethore me rreze $r_1 = 5{,}4$ cm dhe $r_2 = 3$ cm preken nga brenda. Njehsoni syprinën e pjesës së rrafshit të kufizuar nga vijat rrethore.

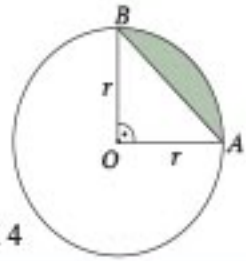
Syprina e një segmenti rrethor mund të njehsohet si ndryshim i syprinës së sektorit rrethor me kënd qendror α dhe syprinës së trekëndëshit barakrahës ABO (vizatimi 3).



Vizatimi 3

Shembulli 4

Njehsoni syprinën e segmentit rrethor me kordë AB, nëse këndi qendror është $\alpha = 90°$ dhe rrezja e rrethit është $r = 13$ cm (Vizatimi 4).



Vizatimi 4

Syprina e segmentit rrethor është

$$S_{\text{segment}} = S_{\text{sektor}} - S_{\triangle ABO} \approx \frac{3{,}14 \cdot (13\,\text{cm})^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{13\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}}{2} = 48{,}165\ \text{cm}^2.$$

Detyra 7

Njehsoni syprinën e një segmenti rrethor në një rreth me rreze r = 9 cm, nëse gjatësia e harkut rrethor përkatës është $l = 14{,}13$ cm.

DETYRA PËR USHTRIME

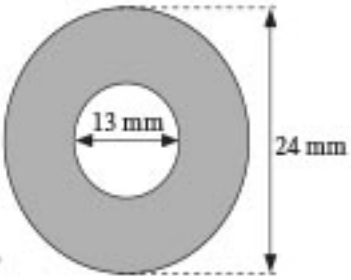
1. Njehsoni syprinën e një sektori rrethor, nëse janë dhënë:
a) $r = 3$ cm dhe $\alpha = 30°$, b) $r = 4{,}5$ dm dhe $\alpha = 45° 30'$, c) $r = 5$ cm dhe $l = 6{,}8$ cm.

2. Cilën pjesë të syprinës së një rrethi përfaqëson një sektor rrethor, këndi qendror i të cilit është
a) 45°, b) 60°, c) 90°, ç) 120°?

3. Syprina e një sektori rrethor përfaqëson:
a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{3}{4}$, ç) $\frac{5}{9}$,
e syprinës së rrethit. Sa është këndi qendror që i përgjigjet sektorit rrethor?

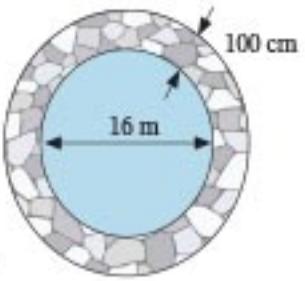
4. Syprinat e dy rrathëve koncentrikë janë 4π cm² dhe 36π cm². Njehsoni gjerësinë e unazës rrethore.

5. Njehsoni syprinën e faqes së sipërme të elementit mekanik të dhënë në vizatimin 5.



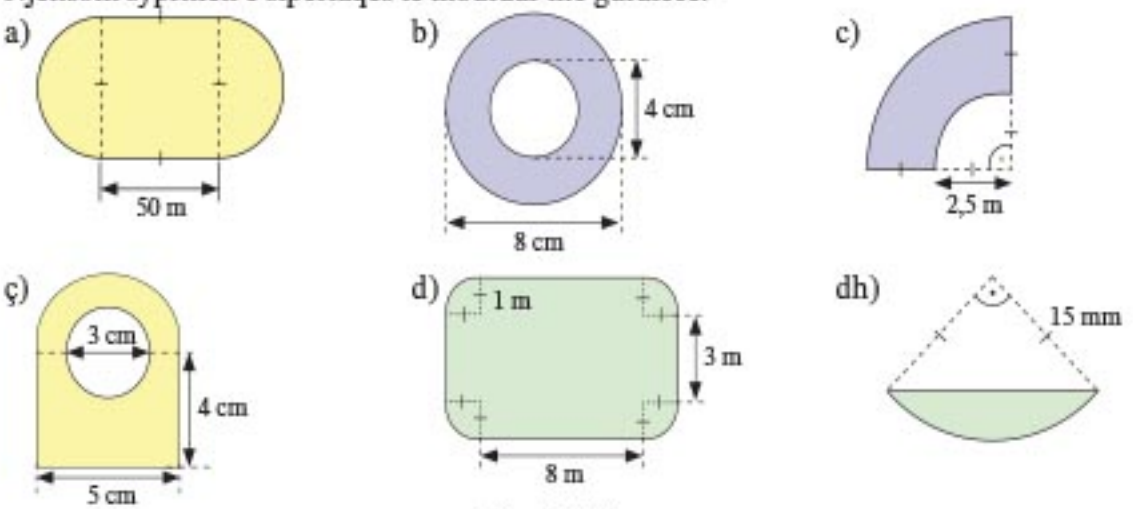
Vizatimi 5

6. Një pellg rrethor ka diametër 16 m (vizatimi 6).
a) Njehsoni syprinën e plastikës së nevojshme për të veshur fundin e pellgut.
b) Përreth pellgut duhet të vendoset një shirit me gjerësi 100 cm, i mbushur me guralecë.
Njehsoni syprinën e sipërfaqes të mbuluar me guralecë.



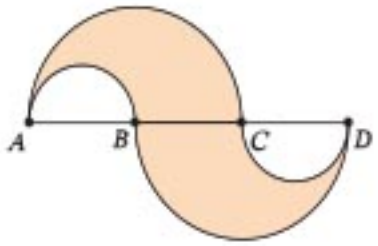
Vizatimi 6

7. Njehsoni syprinën e sipërfaqes të mbuluar me guralecë.

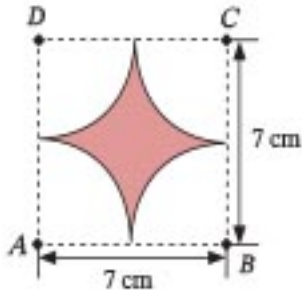


Vizatimi 7

8. Katër ekipe nxënësish po hartojnë një propozim embleme për uniformat shkollore. Secili grup propozon dizajnin e vet. Emblema duhet të bëhet nga pëlhura dhe të jetë sa më ekonomike. Cila emblemë do të bëhet me konsumin më të vogël të pëlhurës?
Propozimet dhe sqarimet nga ekipet:



Vizatimi 8a



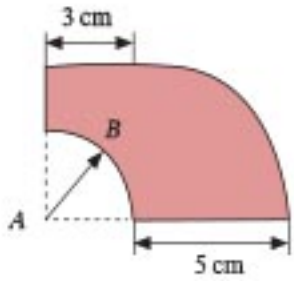
Vizatimi 8b

Ekipi 1 e ndërton emblemën e paraqitur në vizatimin 8a, me kusht që $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3$ cm.

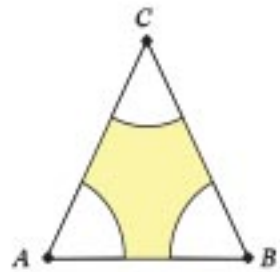
Ekipi 2 e ndërton emblemën e paraqitur në vizatimin 8b, me kusht që $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 7$ cm.

Ekipi 3 e ndërton emblemën e paraqitur në vizatimin 8c, me kusht që harku rrethor më i madh të ketë rreze 5 cm, dhe harku rrethor më i vogël të ketë rreze $\overline{AB} = 3$ cm.

Ekipi 4 e ndërton emblemën e paraqitur në vizatimin 8d, me kusht që harqet rrethore me qendra në kulmet e trekëndëshit barabrinjës ABC me brinjë 7 cm, të kenë rreze 2 cm.



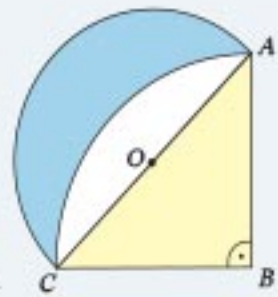
Vizatimi 8c



Vizatimi 8g

Hulumtim

Tregoni se syprina e formës së kufizuar nga dy harqet rrethore, e ngjyrosur me ngjyrë të kaltër në vizatimin 9, është e barabartë me syprinën e trekëndëshit kënddrejtë barakrahës ACB, të ngjyrosur me ngjyrë të verdhë.



Vizatimi 9

12. SYPRINA E PRIZMIT DHE PIRAMIDËS

Syprina e prizmit

Aktivitet

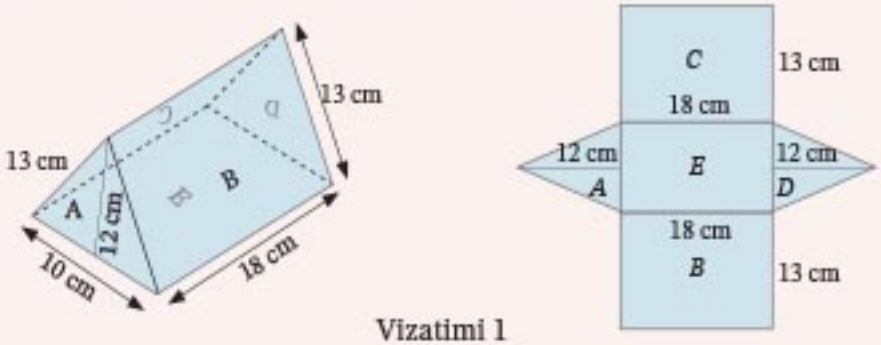
Shqyrtoni prizmin dhe rrjetën e tij të dhënë në vizatimin 1.

a) Nga cilët shumëkëndësha përbëhet rrjeta e prizmit trekëndor?

b) Vëreni se faqja A e prizmit është e puthitshme me faqen D, B është e puthitshme me C, E nuk është e puthitshme me asnjë nga faqet tjera të prizmit.

c) Çfarë paraqet shuma e syprinave të të gjithë shumëkëndëshave të rrjetës së prizmit? Si mund të përcaktohet syprina e prizmit?

ç) Njehsoni syprinën e prizmit të dhënë me ndihmën e rrjetës së tij.



Vizatimi 1

Nga përkufizimi i prizmit, është e qartë se syprina e tij mund të njehsohet si shumë e syprinave të të gjitha faqeve të tij.

Syprina e prizmit është shuma e syprinave të dy bazave dhe syprinës së sipërfaqes anësore.

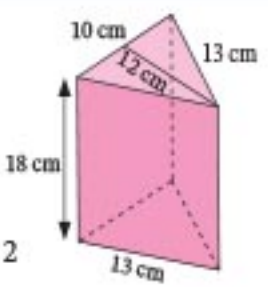
Sipas kësaj, syprina e prizmit S llogaritet sipas formulës:

$$S = 2B + M,$$

ku B është syprina e bazës dhe M është syprina e sipërfaqes anësore të prizmit.

Shembulli 1

Njehsoni syprinën e prizmit të dhënë në vizatimin 2.



Vizatimi 2

Baza e prizmit është një trekëndësh barakrahës me bazë 10 cm dhe lartësi përkatëse 12 cm, prandaj syprina e saj është

$$B = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\ \text{cm}^2.$$

Sipërfaqja anësore e prizmit përbëhet nga 3 faqe anësore që janë drejtkëndësha. Dy prej tyre janë të puthitshëm, me përmasa 13 cm dhe 18 cm, dhe i treti me përmasa 10 cm dhe 18 cm. Prandaj, syprina e sipërfaqes anësore është

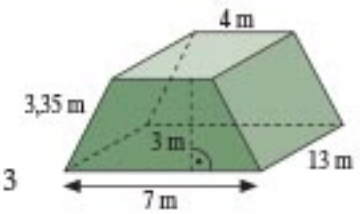
$$M = 2 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 468\,\text{cm}^2 + 180\,\text{cm}^2 = 648\ \text{cm}^2.$$

Syprina e prizmit është

$$S = 2B + M = 2 \cdot 60\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2.$$

Shembulli 2

Njehsoni syprinën e prizmit të dhënë në vizatimin 3.



Vizatimi 3

Baza e prizmit është një trapez me syprinë

$$B = \frac{7\,\text{m} + 4\,\text{m}}{2} \cdot 3\,\text{m} = 16{,}5\,\text{m}^2.$$

Syprina e sipërfaqes anësore është

$$M = 7\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 4\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 2 \cdot 3{,}35\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} = 230{,}1\,\text{m}^2$$

Sipas formulës për llogaritjen e syprinës së prizmit, kemi

$$S = 2B + M = 2 \cdot 16{,}5\,\text{m}^2 + 230{,}1\,\text{m}^2 = 263{,}1\,\text{m}^2.$$

Detyra 1

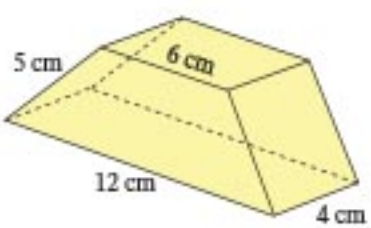
Njehsoni syprinën e prizmit me bazë trekëndësh kënddrejtë me katete $a = 5$ cm dhe $b = 12$ cm, nëse lartësia e tij është $H = 17{,}4$ cm.

Detyra 2

Njehsoni syprinën e një prizmi katërkëndor me bazë romb, diagonalet e të cilit janë $d_1 = 8$ cm dhe $d_2 = 6$ cm, nëse lartësia e tij është $H = 0{,}74$ dm.

Detyra 3

Një kuti ka formë dhe dimensione si në vizatimin 4. Njehsoni syprinën e kartonit të nevojshëm për të ndërtuar kutinë.



Vizatimi 4

Syprina e piramidës

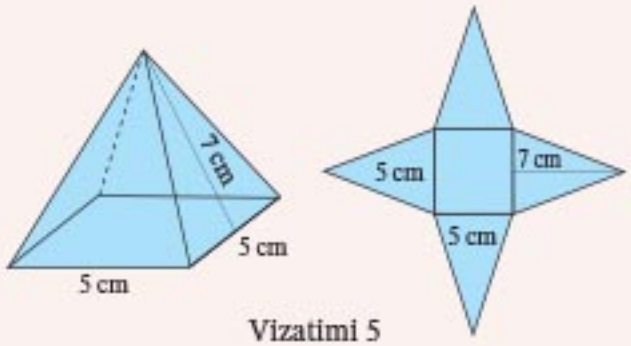
Aktivitet

Shqyrtoni piramidën dhe rrjetën e saj të dhëna në vizatimin 5.

a) Nga cilët shumëkëndësha përbëhet rrjeta e piramidës katërkëndore?

b) Çfarë paraqet shuma e syprinave të të gjithë shumëkëndëshave të rrjetës së piramidës? Si mund të përcaktohet syprina e piramidës?

c) Njehsoni syprinën e piramidës së dhënë me ndihmën e rrjetës së saj.



Vizatimi 5

Nga përkufizimi i piramidës, dhe në përgjithësi nga rrjeta e piramidës, vërehet se syprina e saj mund të njehsohet si shumë e syprinave të të gjitha faqeve.

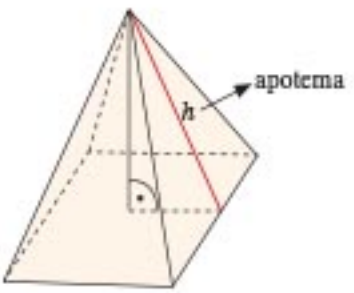
Syprina e piramidës është shuma e syprinës së bazës dhe syprinës së sipërfaqes anësore.

Prandaj, syprina e piramidës S njehsohet sipas formulës:

$$S = B + M,$$

ku B është syprina e bazës dhe M është syprina e sipërfaqes anësore të piramidës.

Lartësia e një faqeje anësore të lëshuar nga maja e piramidës së rregullt drejt brinjës përkatëse të bazës quhet **apotemë e piramidës** (vizatimi 6).



Vizatimi 6

Shembulli 3

Njehsoni syprinën e një piramide të rregullt katërkëndore me brinjë të bazës $a = 12$ cm dhe apotemë $h = 16$ cm.

Baza e piramidës është katror syprina e të cilit është

$$B = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2.$$

Sipërfaqja anësore përbëhet nga 4 trekëndësha barakrahës me bazë 12 cm dhe lartësi 16 cm. Syprina e saj është

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 384\text{ cm}^2.$$

Sipas formulës për njehsimin e syprinës së piramidës, fitojmë

$$S = B + M = 144\text{ cm}^2 + 384\text{ cm}^2 = 528\text{ cm}^2.$$

Shembulli 4

Syprina e sipërfaqes anësore të piramidës së rregullt trekëndore me brinjë të bazës $a = 12$ cm është $M = 144$ cm². Njehsoni apotemën e piramidës.

Sipërfaqja anësore e piramidës trekëndore përbëhet nga 3 trekëndësha barakrahës të puthitshëm me bazë $a = 12$ cm dhe apotemë h që duhet njehsuar. Syprina e sipërfaqes anësore është $M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$ nga ku gjejmë se apotema është

$$h = \frac{2M}{3a} = \frac{2 \cdot 144\,\text{cm}^2}{3 \cdot 12\,\text{cm}} = \frac{288\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}} = 8\ \text{cm}.$$

Detyra 4

Në një shitore zbukurimesh, shitet një zbukurim qelqi në formë piramideje gjashtëkëndore. Syprina totale e zbukurimit është 900 cm². Secila faqe anësore ka syprinë prej 100 cm².

a) Sa faqe anësore ka piramida?

b) Sa është syprina e bazës?

c) Nëse baza është një gjashtëkëndësh i rregullt, sa është gjatësia e brinjës së bazës.

Shembulli 5

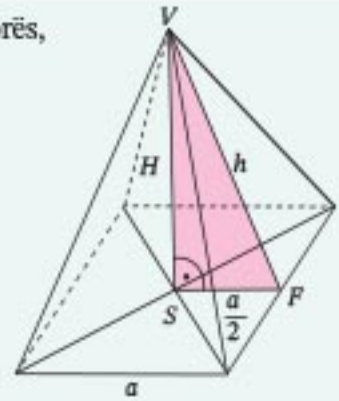
Njehsoni syprinën e piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazës $a = 5$ cm dhe lartësi $H = 6$ cm.

Nga trekëndëshi kënddrejtë FSV, me ndihmën e Teoremës së Pitagorës, do të njehsojmë apotemën (vizatimi 7)

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (2{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} = 6{,}5\,\text{cm}.$$

Sipas formulës për njehsimin e syprinës së piramidës, gjejmë se

$$S = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = (5\,\text{cm})^2 + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm} = 90\ \text{cm}^2.$$



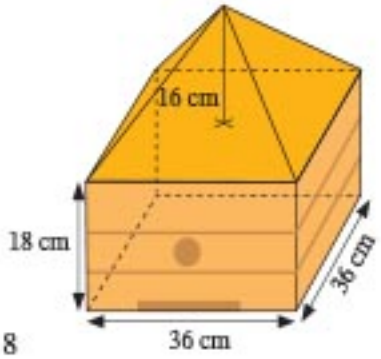
Vizatimi 7

Detyra 5

Një tendë kampingu ka formën e një piramide të rregullt katërkëndore. Lartësia e tendës është 3 m, dhe apotema është 5 m. Sa metra katrorë tokë nevojiten për të vendosur tendën?

Detyra 6

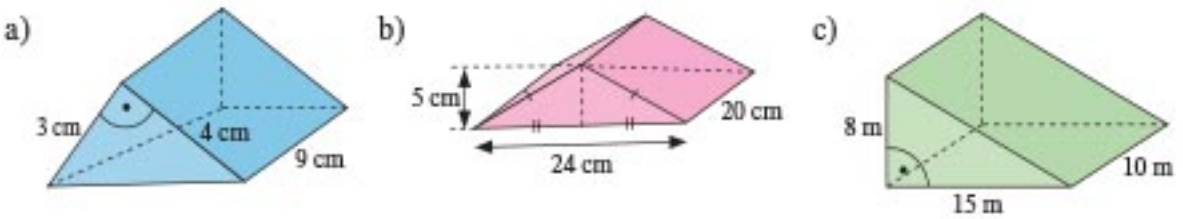
Bletari bëri një koshere për bletë në formë kuboidi me kapak në formë piramide (vizatimi 8). E gjithë kutia duhet të lyhet me ngjyrë të veçantë kundër ujit për mbrojtje nga shiu. Sa kuti me ngjyrë do të nevojiten për të lyer të gjithë sipërfaqen e jashtme të kosheres, nëse me një kuti ngjyrë mund të lyhen 150 cm²?



Vizatimi 8

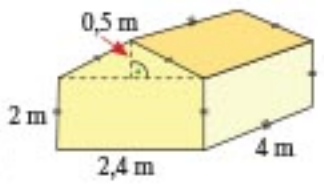
DETYRA PËR USHTRIME

1. Syprina anësore e një prizmi të rregullt gjashtëkëndor është 660 cm², ndërsa lartësia është 10 cm. Njehsoni syprinën e bazës.
2. Njehsoni syprinat e prizmave të dhënë në vizatimin 9:



Vizatimi 9

3. Kopshti botanik i paraqitur në vizatimin 10 është ndërtuar nga fletë plastike që kushton 350 denarë për metër katror. Sa kushton gjithsej fleta e plastikës?

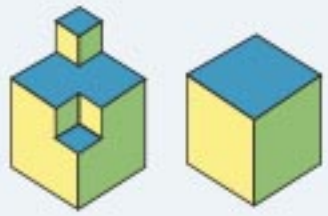


Vizatimi 10

4. Shkruani formulën për njehsimin e syprinës së:
   a) një piramide të rregullt trekëndore,
   b) një piramide të rregullt gjashtëkëndore.
5. Ambalazhi për qumësht me çokollatë, i bërë nga kartoni, ka formë tetraedri me brinjë 10 cm.
   a) Llogarit apotemën,
   b) Sa është syprina e kartonit për ndërtimin e ambalazhit?
6. Një çati ka formën e një piramide të rregullt gjashtëkëndore me apotemë 2 m dhe brinjë të bazës 2 m. Sa copë llamarine nevojiten për çatinë, nëse syprina e një cope është 2 m²?
7. Nxënësit në shkollën tuaj po marrin pjesë në një garë për dizajnimin e një atraksioni turistik ekologjik. Ekipi duhet të ndërtojë një pavijon në formë piramide që do të ndërtohet nga xhami i riciklueshëm. Piramida ka për bazë gjashtëkëndëshin e rregullt me brinjë 2 m dhe apotemë 3 m. Sa do të jetë kostoja për xhamin e përdorur nëse metri katror kushton 1200 denarë?

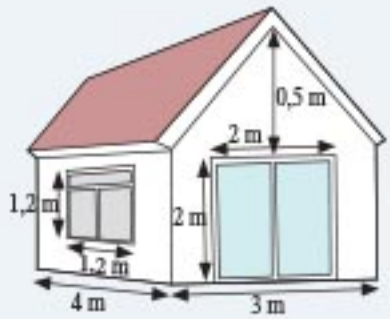
Hulumtim

1. Pjesa e hequr nga kubi është vendosur mbi të (vizatimi 11).
Krahasoni syprinat e dy formave 3D. A janë të barabarta?
Arsyetoni përgjigje.



Vizatimi 11

2. Për të ndërtuar një shtëpi të vogël për ruajtjen e mjeteve, nevojiten dërrasa druri, xham dhe llamarinë. Dimensionet e shtëpisë janë si në vizatimin 12, muret dhe çatia janë prej druri, dera është prej llamarine, ndërsa në dritare vendoset vetëm xham.
Njehsoni sa duhet të jetë buxheti i materialit për ndërtimin e shtëpisë.
Informohuni për çmimet në shitoret përkatëse ose në internet.
Hulumtoni çfarë materialesh tjera nevojiten (për shembull, për bashkimin e elementeve të ndërtimit, për lyerje dhe mbrojtje, etj.).



Vizatimi 12

13. VËLLIMI I PRIZMIT DHE PIRAMIDËS

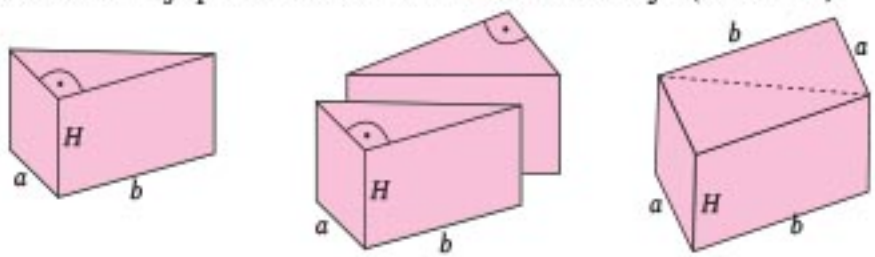
Vëllimi i prizmit

Aktivitet

Gjeni vëllimin e një kutie drithërash ose të ndonjë objekti tjetër në formë kuboidi nga jeta e përditshme. Çfarë paraqet vëllimi?

Le të ndjekim hapat që të çojnë te formula për njehsimin e vëllimit të një prizmi.

1. Le të gjejmë vëllimin e një prizmi me bazë trekëndësh kënddrejtë (vizatimi 1).



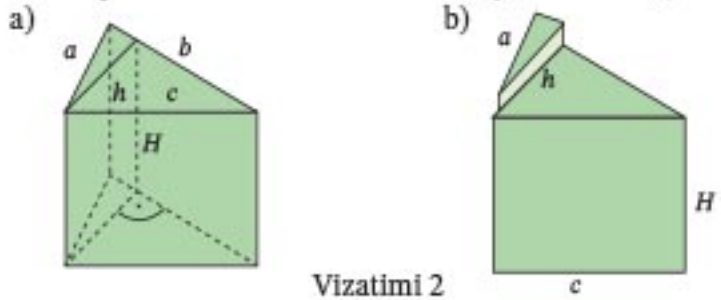
Vizatimi 1

Sipas vizatimit 1, vëllimi i prizmit trekëndor të dhënë mund të llogaritet si gjysma e vëllimit të një kuboidi me parametra a, b dhe H, pra

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2} = \frac{a \cdot b}{2} H = B \cdot H$$

ku B është syprina e bazës së prizmit (trekëndëshi kënddrejtë), dhe H është lartësia e prizmit.

2. Le të gjejmë vëllimin e prizmit me bazë trekëndësh të çfarëdoshëm (vizatimi 2).



Vizatimi 2

Këtë rast e reduktojmë në atë të mëparshmin, duke tërhequr një nga lartësitë e bazës. Në këtë mënyrë, marrim dy trekëndësha kënddrejtë me një katet të përbashkët. Tani prizmi trekëndor është i ndarë në dy prizma trekëndorë me baza trekëndësha kënddrejtë, pra vëllimi i tij do të jetë shuma e vëllimeve të dy prizmave

$$V = V_1 + V_2 = B_1 \cdot H + B_2 \cdot H = (B_1 + B_2) \cdot H = B \cdot H.$$

3. Le të gjejmë vëllimin e një prizmi me bazë shumëkëndësh të çfarëdoshëm (vizatimi 3).



Vizatimi 3

Në rastin kur baza e prizmit është një shumëkëndësh i çfarëdoshëm, tërheqim të gjitha diagonalet nga njëri kulm i shumëkëndëshit. Në këtë mënyrë, shumëkëndëshi ndahet në një numër të fundëm trekëndëshash. Për secilin nga trekëndëshat e fituar, zbatojmë procedurat që shqyrtuam më parë. Ngjashëm si më sipër, fitojmë

$$V = B \cdot H.$$

Vëllimi i prizmit është i barabartë me prodhimin e syprinës së bazës dhe lartësisë së prizmit.

Pra, vëllimi i prizmit V njehsohet sipas formulës:

$$V = B \cdot H,$$

ku B është syprina e bazës dhe H është lartësia e prizmit.

Shembulli 1

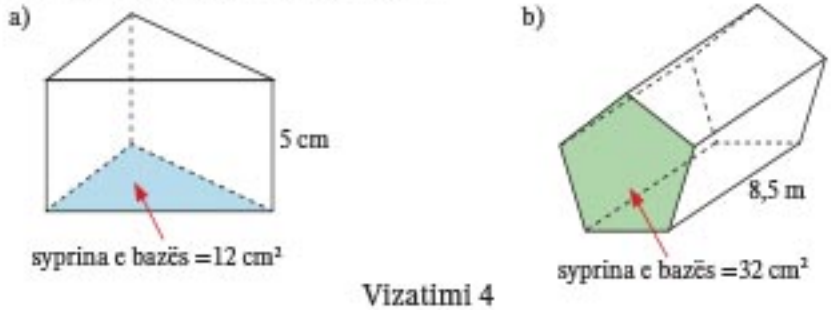
Njehsoni vëllimin e prizmit me bazë trekëndësh me brinjë $a = 4$ cm dhe lartësi drejt saj $h = 5$ cm, nëse lartësia e prizmit është $H = 6$ cm.

Sipas formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit, fitojmë

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot h}{2} \cdot H = \frac{4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 60\ \text{cm}^3.$$

Detyra 1

Njehsoni vëllimin e prizmave nga vizatimi 4:



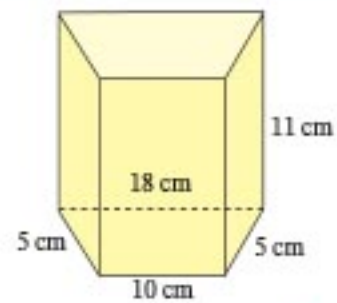
Vizatimi 4

Detyra 2

Ambalazhi i çokollatës ka formë prizmi të rregullt trekëndor me brinjë të bazës 5 cm dhe lartësi 18 cm. Sa është vëllimi i ambalazhit?

Shembulli 2

Njehsoni vëllimin e një prizmi katërkëndor me bazë trapez barakrahës me baza $a = 18$ cm, $b = 10$ cm dhe krah $c = 5$ cm, nëse lartësia e tij është $H = 11$ cm (vizatimi 5).



Vizatimi 5

Së pari do të përcaktojmë lartësinë e trapezit, i cili është baza e prizmit (vizatimi 6)

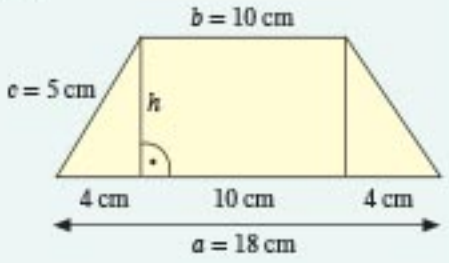
$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(4\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}.$$

Sipas formulës për njehsimin e syprinës së trapezit, për syprinën e bazës kemi

$$B=\frac{a+b}{2}h=\frac{18\,\text{cm}+10\,\text{cm}}{2}\cdot 3\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Sipas formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit, fitojmë

$$V=B\cdot H=42\ \text{cm}^2\cdot 11\ \text{cm}=462\ \text{cm}^3.$$



Vizatimi 6

Detyra 3

Njehsoni vëllimin e prizmit me bazë deltoid me diagonale $d_1=24$ cm dhe $d_2=13$ cm, nëse lartësia e tij është $H=7,2$ cm.

Aktivitet

Nga formula $V=B\cdot H$ si mund të llogarisni:
a) syprinën e bazës B, nëse janë dhënë V dhe H, b) lartësinë H, nëse janë dhënë V dhe B?

Shembulli 3

Në një akuarium të vogël në formë prizmi të rregullt katërkëndor janë derdhur 8,4 l ujë deri në lartësinë $H=2,1$ dm. Sa është brinja e bazës së akuariumit?

Baza e prizmit të rregullt katërkëndor është një katror. Sipas formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit, kem

$$V=B\cdot H=a^2\cdot H$$

Nga këtu, për gjatësinë e brinjës së bazës, fitojmë

$$a=\sqrt{\frac{V}{H}}=\sqrt{\frac{8,4\,\text{dm}^3}{2,1\,\text{dm}}}=\sqrt{4\,\text{dm}^2}=2\,\text{dm}\qquad (1\ l=1\ \text{dm}^3).$$

Detyra 4

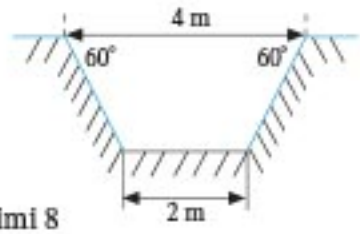
Në vizatimin 7 është dhënë një akuarium me dimensionet e tij. Sipërfaqja e ujit në akuarium është 5 cm më poshtë se lartësia e akuariumit. Sa litra ujë ka në akuarium?



Vizatimi 7

Detyra 5

Gjatë ndërtimit të një rruge në një terren me shumë ujë, u desh të hapej një kanal për kullimin e ujit. Prerja tërthore e tij është dhënë në vizatimin 8. Sa metra kub tokë janë nxjerrë gjatë hapjes së kanalit, nëse ai është i gjatë 2 km?



Vizatimi 8

Vëllimi i piramidës

Aktivitet

Ndërtoni modele kartoni të një prizmi dhe një piramideje me baza të puthitshme dhe lartësi të barabarta. Më pas, mbushni piramidën me ujë (rërë, oriz ose sheqer) dhe derdhni të gjithë sasinë në prizëm. Përsëriteni procesin derisa të mbushni prizmin.
Çfarë vëreni

Vëllimi i piramidës është i barabartë me një të tretën e prodhimit të syprinës së bazës dhe lartësisë së piramidës.

Pra, vëllimi i piramidës V njehsohet sipas formulës:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

ku B është syprina e bazës dhe H është lartësia e piramidës.

Shembulli 4

Sa metra kub është vëllimi i piramidës së Keopsit, e cila është e lartë 150 m, dhe baza e saj është një katror me brinjë 230 m?

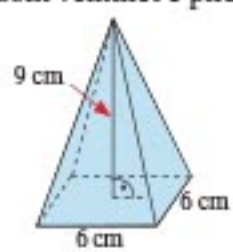
Sipas formulës për njehsimin e vëllimit të piramidës, kemi

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230\ \text{m})^2 \cdot 150\ \text{m} = 2645000\ \text{m}^3.$$

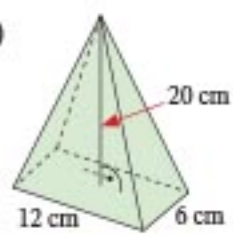
Detyra 6

Njehsoni vëllimet e piramidave të dhëna në vizatimin 9:

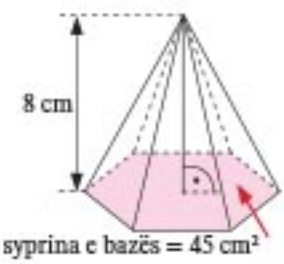
a)



b)



c)



Vizatimi 9

Aktivitet

Nga formula $V = \frac{1}{3} B \cdot H$, si mund të llogarisni:

a) syprinën e bazës B, nëse janë dhënë V dhe H, b) lartësinë H, nëse janë dhënë V dhe B?

Shembulli 5

Njehsoni lartësinë e piramidës me vëllim 12 cm³ dhe syprinë të bazës 4 cm².

Nga formula për llogaritjen e vëllimit të piramidës, gjejmë se

$$H = \frac{3 \cdot V}{B} = \frac{3 \cdot 12 \text{ cm}^3}{4 \text{ cm}^2} = 9 \text{ cm}.$$

Detyra 7

Njehsoni syprinën e bazës së piramidës me vëllim 8 cm³ dhe lartësi $H = 2$ cm.

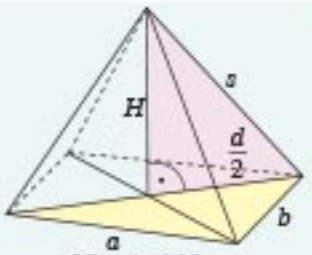
Shembulli 6

Njehsoni vëllimin e piramidës me bazë drejtkëndësh me dimensione $a = 24$ cm dhe $b = 32$ cm, nëse brinja anësore është 25 cm.

Diagonalja e bazës së piramidës është

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{576 \text{ cm}^2 + 1024 \text{ cm}^2} = \sqrt{1600 \text{ cm}^2} = 40 \text{ cm}.$$

Nga trekëndëshi kënddrejtë i formuar nga gjysma e diagonales së bazës drejtkëndore, brinjës anësore dhe lartësisë së piramidës, për lartësinë e piramidës fitohet (vizatimi 10)



Vizatimi 10

$$H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(25 \text{ cm})^2 - (20 \text{ cm})^2} = \sqrt{625 \text{ cm}^2 - 400 \text{ cm}^2} = \sqrt{225 \text{ cm}^2} = 15 \text{cm}.$$

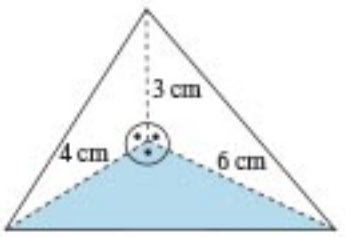
Sipas formulës për njehsimin e vëllimit të piramidës, gjejmë se vëllimi është

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{abH}{3} = \frac{24 \text{ cm} \cdot 32 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}}{3} = 3840 \text{ cm}^3$$

Detyra 7

Një zdrukthtar pret një copë në formë piramide trekëndore nga një copë tjetër druri, e cila kishte formë kuboidi. Dimensionet e copës së prerë të drurit janë dhënë në vizatimin 11.

Gjeni vëllimin e saj.

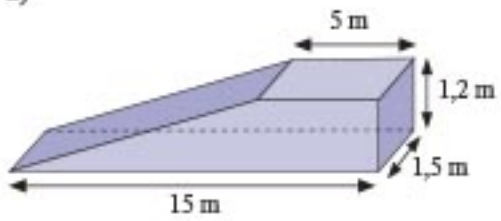


Vizatimi 11

DETYRA PËR USHTRIME

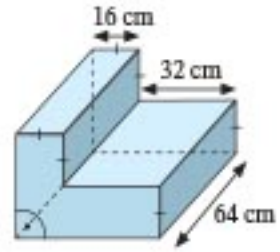
1. Njehsoni vëllimin e betonit që duhet të përdoret për ndërtimin e:
a) barrierës në vizatimin 12a, b) shkallëve në vizatimin 12b.

a)



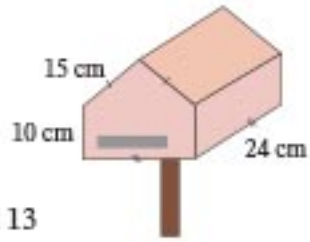
Vizatimi 12a

b)



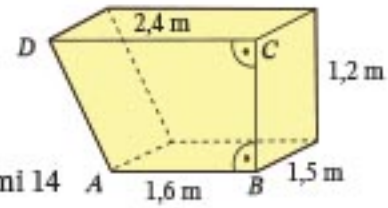
Vizatimi 12b

2. a) Gjeni vëllimin e ajrit në kutinë postare (vizatimii 13).
b) Në kuti janë vendosur tre zarfe me dimensione 23 cm me 12 cm me 5 mm. Sa është vëllimi i hapësirës së papërdorur në kuti?



Vizatimi 13

3. Në vizatimin 14 është dhënë një enë për kompostim. Sa metra kub kompost mban ena?



Vizatimi 14

4. Sa është vëllimi i prizmit, baza e të cilit është trapez barakrahës me brinjë $a = 7\frac{1}{2}$ cm, $b = 8\frac{1}{3}$ cm, $c = 2\frac{2}{3}$ cm, nëse lartësia e tij është $H = 5$ cm?

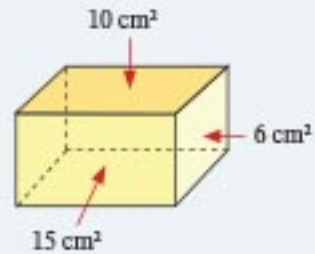
5. Vëllimi i një piramide të rregullt katërkëndore është 810 cm³, dhe lartësia e saj është 30 cm. Gjeni brinjën e bazës të piramidës.

6. Një piramidë katërkëndëshe e rregullt ka lartësi $H = 6$ cm dhe apotemë $h = 10$ cm. Njehsoni sipërfaqen dhe vëllimin e piramidës.

7. Sa litra ujë shiu mbledh një rezervuar uji në formë piramide, me bazë drejtkëndësh me dimensione 2,4 m, 3,2 m dhe brinjë anësore 2,5 m?

Hulumtim

Gjeni vëllimin e kuboidit në vizatimin 15 nëse janë dhënë syprinat e faqeve të tij.



Vizatimi 15

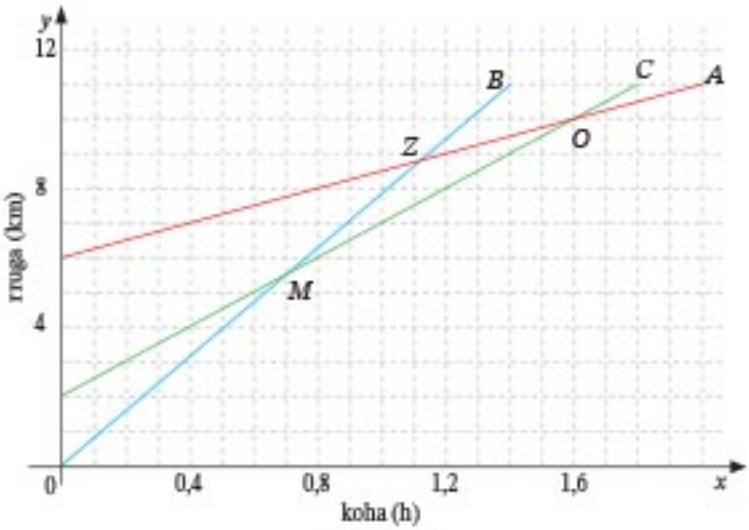
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Shndërroni: 10 vjet 9 muaj 20 ditë 15 orë në:
   a) vite, b) muaj, c) ditë, ç) orë.

2. Mimi ka $12\frac{3}{4}$ vite, ndërsa Emi ka $9\frac{1}{6}$ vite.
   a) Sa vite ka pasur secila prej tyre para 10 muajsh?
   b) Për sa vjet Mimi është më e madhe se Emi?

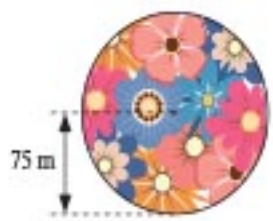
3. Vizatoni grafikun në të cilin do të paraqitni rrugën e një kamioni i cili nga qyteti A niset në orën 9 të mëngjesit, pas dy orësh bën një pushim gjysmë ore dhe në orën 14 arrin në qytetin B, i cili është 250 km larg nga qyteti A. Atje qëndron 1 orë. Më pas kthehet, vozit pa pushime dhe arrin në qytetin A në orën 19.

4. Tre grupe turistësh, A, B dhe C, bëjnë një vizitë panoramike në qytet me autobus. Pika M është muzeu historik, pika Z është kopshti zoologjik, dhe pika O është ndërtesa e operës (vizatimi 1).
   a) Sa larg janë ndërtesa e operës dhe muzeu historik?
   b) Cili nga grupet nuk kaloi pranë ndërtesës së operës?
   c) Para cilit objekt u takuan grupet B dhe C?
   ç) Cili grup udhëtoi më shpejt, dhe cili më ngadalë nëpër qytet?
   d) Cili nga grupet përshkoi rrugën më të gjatë, dhe cili më të shkurtër?
   dh) Sa kohë udhëtoi grupi C nga muzeu historik deri te ndërtesa e operës?



Vizatimi 1

5. Natalia dëshiron të rrethojë kopshtin e saj me lule (vizatimi 2). Sa metra gardh do t'i nevojiten Natalisë?



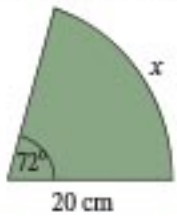
Vizatimi 2

6. Nga një tel i hollë, i gjatë 1 m, Sanja dëshiron të bëjë unaza për një gjerdan, të cilat kanë formë rrethore, ashtu që secila unazë ka diametër 1 cm. Sa unaza mund të bëjë Sanja dhe çfarë gjatësie do të ketë gjerdani i saj?

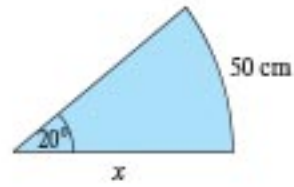
7. Akrepi i minutave të një ore është i gjatë 6 cm. Çfarë rruge do të përshkojë maja e akrepit nga mesdita deri në orën 13:30?

8. Njehsoni elementet e shënuara me x nga vizatimi 3.

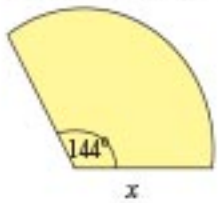
a) x - gjatësia e harkut rrethor



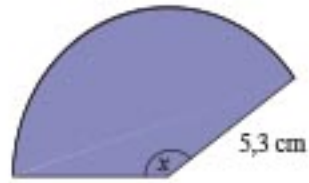
b) gjatësia e harkut rrethor = 50 cm



c) gjatësia e harkut rrethor = 10π cm

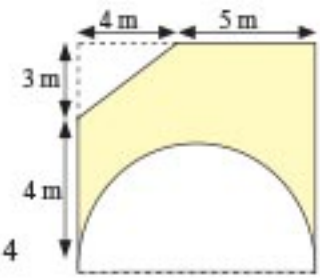


ç) gjatësia e harkut rrethor = 22,81 cm



Vizatimi 3

9. Gjeni perimetrin e formës së dhënë në vizatimin 4.



Vizatimi 4

10. Cili është vlerësimi për syprinën e dyshemesë së ashensorit:

a) 3 mm², b) 3 cm², c) 3 m², ç) 3 ha.

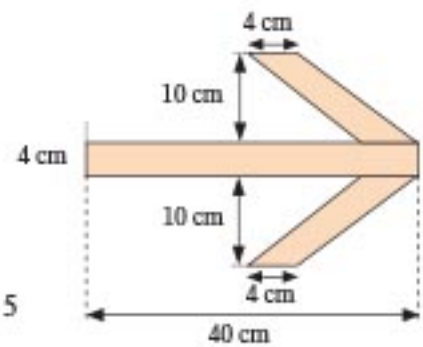
11. Shkruani njësinë matëse më të përshtatshme me të cilën do të shprehni syprinën e:

a) një DVD-je, b) një fushe tenisi, c) një monedhe prej 1 denari, ç) Spanjës.

12. Leonidi është mjeshtër për të bërë zbukurime druri. Ai ka një copë druri në formë rombi me perimetër 96 dm dhe distancë midis brinjëve të kundërta 10 dm. Ai ka një kuti me 400 ml ngjyrë druri, në etiketën e së cilës shkruan "Përdorni 50 ml ngjyrë për decimetër katror". A ka Leonidi mjaftueshëm ngjyrë për të lyer dy herë sipërfaqen e copës së drurit?

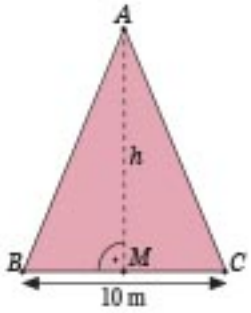
13. Çfarë lartësie ka një paralelogram me syprinë 840 cm², nëse njëra brinjë e tij është 3,5 dm?

14. Njehsoni syprinën e shigjetës në vizatimin 5.



Vizatimi 5

15. Gjeni syprinën e trekëndëshit në vizatimin 6, nëse $h = 14$ m.



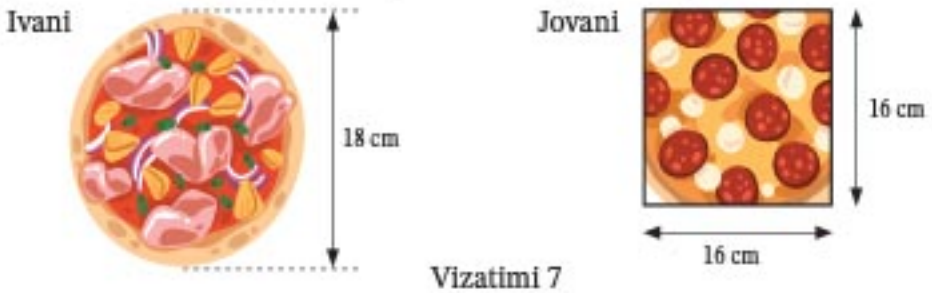
Vizatimi 6

16. Nëse syprina e trekëndëshit është 63 cm², përcaktoni lartësinë e trekëndëshit që është tërhequr drejt brinjës a = 18 cm?

17. Një tavolinë zyre ka formë trapezi me brinjë paralele $a = 160$ cm dhe $b = 120$ cm, dhe distanca midis tyre është 50 cm. Sa do të kushtojë mbulimi i tavolinës me xham, nëse çmimi është 1200 denarë për metër katror?

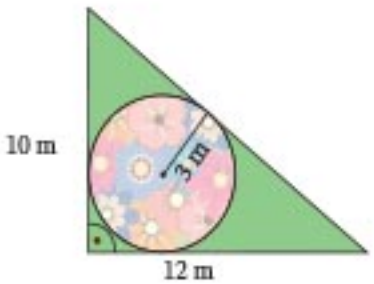
18. Një katror me diagonale 12 cm ka të njëjtën syprinë si një deltoid me një diagonale 16 cm. Sa është diagonalja tjetër e deltoidit?

19. Pica e kujt është më e madhe, e Ivanit apo e Jovanit (vizatimi 7)?



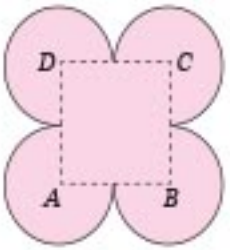
Vizatimi 7

20. Një lëndinë në park ka formë trekëndëshi, dhe brenda saj është mbjellë një lulishte në formë rrethi (vizatimi 8). Gjeni syprinën e pjesës së lëndinës pa lulishten.



Vizatimi 8

21. Njehsoni perimetrin dhe syprinën e formës në vizatimin 9, nëse katrori *ABCD* ka brinjë 7 cm.

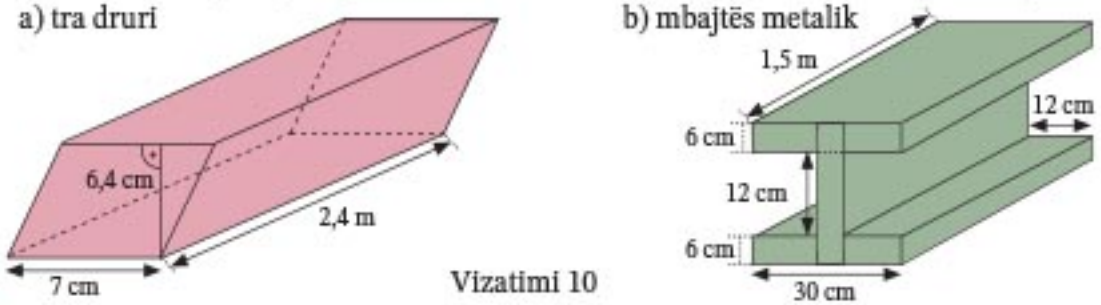


Vizatimi 9

22. Në vizatimin 10 janë paraqitur materiale ndërtimi. Gjeni syprinën dhe vëllimin e tyre.

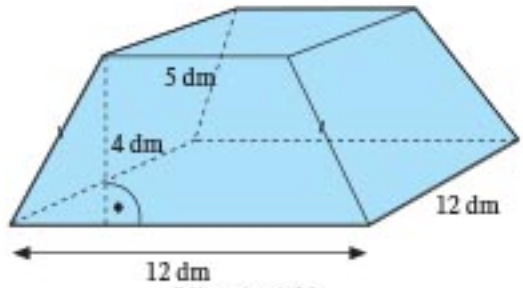
a) tra druri

b) mbajtës metalik



Vizatimi 10

23. Një enë plastike për ujë ka formë dhe përmasa si në vizatimin 11. Njehsoni syprinën e plastikës që nevojitet për të bërë enën (ana e sipërme është e hapur). Sa litra ujë mban ena nëse mbushet plotësisht?



Vizatimi 11

24. Çatia e një kasolle druri është piramidë me bazë katrore. Gjatësia e brinjës së bazës është 22 dm, dhe apotema është 14 dm. Petari dëshiron të lyejë çatinë e kasolles së tij prej druri dhe dëshiron të dijë sa ngjyrë duhet të blejë. Nëse 1 kuti ngjyrë mbulon 400 dm^2, sa kuti ngjyrë duhet të blejë Petari?

25. Kutia e ngjyrës që përdor Petari për të lyer kasollen e tij ka formë piramide, me bazë trekëndësh barakrahës, me syprinë 50 cm^2 dhe lartësi 18 cm. Sa mililitra ngjyrë ka në kuti?

Tema 5:

PUNA ME TË DHËNA

Rezultatet e të nxënit:

Gjatë studimit të kësaj teme do të aftësoheni të:

- krijoni një plan të hollësishëm dhe të arsyetuar për hulumtim, i cili do të përfshijë zgjedhjen e mostrës sipas tipareve të ndryshme dhe analizën e të dhënave.
- paraqitni dhe interpretoni rezultatet e hulumtimit, duke përfshirë paraqitjen me diagrame, tabela dhe përcaktimin e rangut, modës, medianës dhe mesatares aritmetike.
- zgjidhni lloje të ndryshme problemesh (për lojëra fati, probleme ekonomike ose analiza statistikore), duke përfshirë ngjarje që përjashtojnë njëra-tjetrën dhe ngjarje të njëpasnjëshme.

1. POPULLACIONI DHE MOSTRA

Aktivitet

Mblidhni të dhëna për rezultatet e arritura në testin e fundit të matematikës nga nxënësit e klasës suaj dhe paraqitini ato në tabelë. Si i mblodhët të dhënat?

Para se të mbledhim të dhëna për një hulumtim, së pari duhet ta shqyrtojmë **popullacionin** e synuar. Ai është grupi i objekteve, dukurive ose njerëzve për të cilët duam të marrim informacione.

Popullacioni është bashkësia e të gjitha elementeve (individëve, veçorive, rezultateve) të një dukurie që kanë një karakteristikë të përbashkët.

Karakteristika e përbashkët e elementeve të një popullacioni, e cila është objekt i vëzhgimit (matjes, shqyrtimit), quhet **tipar.**

Një element (objekt, njësi) i popullacionit quhet njësi statistikore e popullacionit.

Shembulli 1

Cili është popullacioni, cila është njësia statistikore dhe cilat janë tiparet e popullacionit gjatë vëzhgimit ose hulumtimit të:
a) gjinisë, moshës dhe punësimit të banorëve të një qyteti;
b) masës, moshës dhe racës së lopëve në një fermë;
c) abonimit dhe vlerës së faturës së përdoruesve të shërbimeve të një kompanie të telekomunikacionit.

a) Nëse vëzhgohen banorët e një qyteti:
- popullacioni përbëhet nga të gjithë banorët;
- njësia statistikore është një banor;
- tiparet e njësisë mund të jenë: gjinia, punësimi, mosha, vendlindja, ngjyra e syve, gjatësia e trupit e të ngjashme.

b) Nëse vëzhgohen lopët në një fermë:
- popullacioni përbëhet nga të gjitha lopët e asaj ferme;
- njësia statistikore është një lopë e asaj ferme;
- tiparet e njësisë mund të jenë: sasia e qumështit në litra që jep një lopë në ditë, mosha, raca, masa e të ngjashme.

c) Nëse vëzhgohen përdoruesit e shërbimeve të një kompanie të telekomunikacionit:
- popullacioni përbëhet nga të gjithë përdoruesit e asaj kompanie,
- njësia statistikore është një përdorues,

- tiparet e njësisë mund të jenë: lloji i abonimit (me parapagesë, me pagesë pas përdorimit), numri i thirrjeve telefonike të realizuara gjatë një periudhe të caktuar, kohëzgjatja e thirrjeve telefonike, vlera e faturave të lëshuara, struktura e abonentëve sipas moshës dhe gjinisë e të ngjashme.

Nga shembujt e dhënë mund të vëreni se tiparet janë madhësi të ndryshueshme dhe se vlera e tiparit të vëzhguar të një njësie nuk mund të përcaktohet paraprakisht.

Kur mbledhim të dhëna, mund të përdorim regjistrimin e plotë ose të marrim një mostër. Regjistrimi i plotë do të thotë se mbledhim të dhëna për çdo njësi të popullacionit. Për shembull, mund të bëhet regjistrimi i produkteve në një dyqan ose regjistrimi i banorëve të një shteti.



Vizatimi 1

Shembulli 2

Enesi dëshiron ta mësojë gjatësinë mesatare të nxënësve në shkollën e tij.
a) Cili është popullacioni dhe cili është tipari i këtij popullacioni?
b) Shpjegoni si është më praktike të veprojë Enesi për të kursyer kohë dhe mjete.

a) Popullacioni përbëhet nga të gjithë nxënësit e shkollës.
Për ta mësuar gjatësinë mesatare të nxënësve, regjistrimi i plotë do të përfshinte matjen e gjatësisë së çdo nxënësi në shkollën e tij.
Gjatësia është tipari i popullacionit të nxënësve.

b) Në varësi të numrit të përgjithshëm të nxënësve në shkollë, matja e gjatësisë së çdo nxënësi do të merrte kohë dhe do të ishte shumë jopraktike. Më ekonomike, sa i përket kohës dhe mjeteve për hulumtim, është të merret një mostër nga popullacioni. Në varësi të numrit të përgjithshëm të nxënësve, Enesi mund të zgjedhë rastësisht një numër të mjaftueshëm nxënësish nga shkolla e tij dhe t'ua matë gjatësinë.

Mostra është nënbashkësi e popullacionit.

Detyra 1

Përcaktoni nëse do të përdorej i gjithë popullacioni apo një mostër për hulumtimin e:
a) moshës së njerëzve në një qendër tregtare;
b) masës së monedhave të prodhuara në një fabrikë për prerjen e monedhave;
c) çmimeve të artikujve të menysë në një restorant.

Kur merret një mostër nga popullacioni, mbledhja e të dhënave është më e shpejtë dhe më e thjeshtë sesa puna me të gjithë popullacionin, por nuk është aq e hollësishme ose e saktë.

Meqenëse mostrat nuk japin informacione për të gjithë popullacionin, të dhënat statistikore të marra nga një mostër mund të përdoren vetëm për të vlerësuar parametrat statistikorë të popullacionit.

Që vlerësimi ta paraqesë në mënyrë të besueshme gjendjen reale, mostra duhet të jetë përfaqësuese. Për të arritur përfaqësueshmërinë e mostrës, duhet të plotësohen kushtet e mëposhtme:

- zgjedhja e njësive statistikore duhet të jetë e rastësishme dhe e pavarur dhe çdo njësi duhet të ketë mundësi të barabartë për t'u zgjedhur;
- mostra duhet të jetë mjaftueshëm e madhe në raport me popullacionin që përfaqëson;
- mostra duhet ta përfaqësojë në mënyrë të drejtë (besnike) të gjithë popullacionin.

Shembulli 3

Përgjigjuni pyetjeve të mëposhtme lidhur me hulumtimin që duhet ta realizojë Enesi në shembullin 2:

a) Si duhet të veprojë Enesi gjatë zgjedhjes së mostrës, që të jetë i sigurt për besueshmërinë e rezultateve të hulumtimit të tij?

b) Cilat janë përparësitë dhe cilat janë mangësitë nëse Enesi zgjedh një mostër në vend të gjithë popullacionit?

a) Mostra që do të zgjedhë Enesi duhet t'i plotësojë të gjitha kushtet e dhëna më lart në mësim. Për shembull, nëse në shkollën e tij ka 900 nxënës, do të mjaftonte që mostra të përbëhej nga 45 nxënës. Zgjedhja e çdo nxënësi në mostër duhet të jetë e rastësishme dhe e pavarur dhe çdo nxënës duhet të ketë mundësi të barabartë për t'u zgjedhur. Gjithashtu, sipas strukturës së saj, mostra duhet t'i përgjigjet të gjithë popullacionit të nxënësve.
   - Mostra e Enesit nuk do të jetë përfaqësuese nëse ai zgjedh nxënës vetëm nga klasa e nëntë, sepse atëherë nuk i përgjigjet të gjithë nxënësve të shkollës. Gjatësia mesatare e mostrës do të ishte shumë më e madhe se gjatësia mesatare e të gjithë nxënësve të shkollës.
   - Nga ana tjetër, nëse Enesi zgjedh vetëm 5 nxënës, gjatësia mesatare e mostrës do të ishte një vlerësim i papërshtatshëm i gjatësisë mesatare të të gjithë nxënësve, sepse mostra është shumë e vogël.

b) Përdorimi i mostrës ka përparësitë e veta: mbledhja e të dhënave është më e shpejtë, më e thjeshtë dhe më ekonomike për sa i përket kohës dhe burimeve të tjera. Por, nga ana tjetër, ajo jep vetëm një vlerësim për popullacionin dhe nuk është aq e hollësishme sa kur do të përdorej i gjithë popullacioni.

Detyra 2

Në tabelë janë dhënë shembuj të një mostre të zgjedhur për hulumtimin e një tipari të caktuar të një popullacioni të caktuar. Shpjegoni nëse mostra e propozuar është përfaqësuese dhe, në rastet kur është e nevojshme, jepni një mostër që mendoni se do të japë rezultat më të mirë.

popullacioni	tipari	mostra
nxënësit e shtetit tonë	ushtrimi i sportit	nga një shkollë fillore dhe një shkollë e mesme të zgjedhura rastësisht
tostierë të prodhuar në një fabrikë	funksionimi i rregullt	një produkt i zgjedhur rastësisht nga çdo njëqind produkte sipas numrit serik
të gjitha atomet në atmosferë	përqindja e hidrogjenit	matje të kryera në Shkup
produktet në një dyqan	numri i produkteve	i gjithë popullacioni

Detyra 3

Një shkollë ka 820 nxënës. 40 prej nxënësve janë zgjedhur rastësisht për të plotësuar një anketë për uniformën e tyre shkollore.

a) Gjeni madhësinë e:

1) popullacionit të synuar;
2) mostrës.

b) Shpjegoni pse të dhënat e mbledhura në secilën nga mënyrat e mëposhtme mund të mos japin një mostër që paraqet pamjen reale të popullacionit:

1) Nxënësi që e zhvillon anketën u kërkon dhjetë miqve të tij më të mirë ta plotësojnë atë.
2) Anketohen të gjithë nxënësit e një klase.
3) Paraqiten vullnetarë për ta plotësuar anketën.

Detyra 4

Një kompani e pajisjeve elektronike dëshiron të bëjë një hulumtim nëse njerëzit blejnë më shumë pajisje të tilla në dyqan apo përmes internetit. Ata i pyesin njerëzit që qëndrojnë jashtë një dyqani të pajisjeve elektronike të hënën në mëngjes. Shpjegoni pse të dhënat që do të mblidhen ka të ngjarë të mos i përgjigjen gjendjes reale.

Detyra 5

Një fabrikë e pajisjeve elektrike prodhon nga 15 000 pajisje në ditë. Si menaxher i fabrikës, keni për detyrë të hulumtoni sa prej pajisjeve të prodhuara janë me defekt.

a) Përcaktoni popullacionin, tiparin dhe propozoni mënyrën e zgjedhjes së mostrës.

b) Cilat janë përparësitë dhe cilat janë mangësitë nëse punoni me një mostër në vend të gjithë popullacionit?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Dyqani i shkollës dëshiron të ofrojë një ushqim të ri të shëndetshëm. Drejtori vendos të bëjë një hulumtim të vogël për të mësuar cilat ushqime të lehta u pëlqejnë më shumë nxënësve të shkollës. Për këtë qëllim, duhet ta ndihmoni grupin e nxënësve që do ta kryejë hulumtimin.
   a) Cili është popullacioni dhe cili është tipari në këtë hulumtim?
   b) Shpjegoni përparësitë dhe mangësitë e regjistrimit të plotë si metodë e zbatuar në këtë rast.
   c) Propozoni të paktën dy mënyra të ndryshme për zgjedhjen e një mostre nxënësish që do ta përfaqësojë popullacionin.
   ç) Nga mostrat e propozuara, zgjidhni atë që e përfaqëson më mirë të gjithë popullacionin dhe shpjegoni pse mendoni se pikërisht ajo mostër është përfaqësuese.
2. Shkolla "Shën Kirili dhe Metodi" ka 700 nxënës. Drejtori dëshiron të mësojë sa nxënës të shkollës ushtrojnë rregullisht ndonjë sport.
   a) Cili është popullacioni në këtë hulumtim?
   b) Cili është tipari që studiohet?
   c) Cili nga përshkrimet e mëposhtme paraqet një mostër të këtij popullacioni dhe cili jo? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
      1) Të gjithë nxënësit e klasës VI (85 nxënës).
      2) Nga dhjetë nxënës prej secilës klasë të shkollës (nga klasa I deri në IX - gjithsej 90 nxënës).
      3) Të gjithë mësimdhënësit e shkollës.
      4) 50 nxënësit e parë që hynë në bibliotekën e shkollës të martën në mëngjes.
   ç) Drejtori mendon nëse t'i anketojë të gjithë 700 nxënësit apo të marrë një mostër prej 120 nxënësish.
   1) Jepni dy përparësi të anketimit të të gjithë 700 nxënësve.
   2) Jepni dy mangësi të anketimit të të gjithë 700 nxënësve.
3. Një fabrikë llambash prodhon 50 000 llamba në ditë. Kontrolluesi i cilësisë dëshiron ta kontrollojë jetëgjatësinë e llambave (jetëgjatësia provohet duke e lënë llambën të ndriçojë pandërprerë dhe duke shënuar kohën e ndriçimit derisa të digjet). Për ta bërë këtë, ai teston 200 llamba nga prodhimi ditor.
   a) Cili është popullacioni në këtë hulumtim, cila është mostra dhe cili është tipari që studiohet?
   b) Shpjegoni cili nga përshkrimet e mëposhtme paraqet një mostër të këtij popullacioni dhe cili jo.
      1) 200 llambat e testuara nga prodhimi ditor.
      2) Të gjitha llambat e prodhuara gjatë orës së parë të punës së fabrikës.
      3) Të gjitha llambat e prodhuara gjatë një dite.
      4) Forma e llambave që testohen.
      5) 100 llambat e para që dolën nga linja e prodhimit pas pushimit të punëtorëve.
   c) Kontrolluesi i cilësisë mendon nëse t'i testojë të gjitha 50 000 llambat (tërë popullacionin) apo të marrë një mostër prej 500 llambash.
      1) Jepni dy përparësi të testimit të të gjitha 50 000 llambave.
      2) Jepni dy mangësi të testimit të të gjitha 50 000 llambave.

4. Përcaktoni nëse gjatë hulumtimit duhet të përdoret regjistrimi i plotë apo një mostër për:
   a) moshën e njerëzve që e kanë vizituar parkun kombëtar;
   b) funksionimin e rregullt të baterive që prodhohen në një fabrikë;
   c) çmimet e shërbimeve në një sallon bukurie.

5. Drejtuesi i stacionit të autobusëve dëshiron të bëjë një hulumtim nëse njerëzit janë të kënaqur me shërbimet e tyre. Ai vendosi t'i pyesë 10 njerëzit e parë që arritën në stacion të mërkurën në mëngjes.
   a) A ka zgjedhur ai një mostër të mirë? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
   b) Si mund ta përmirësojë metodën e tij për mbledhjen e të dhënave?

6. Një gazetë i ftoi lexuesit të përgjigjen me telefon në një anketë lidhur me sigurinë në komunikacionin e qytetit. U anketuan 40 persona.
   a) A është e përshtatshme zgjedhja e mostrës në këtë mënyrë? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
   b) Jepni disa arsye pse rezultati i kësaj ankete nuk është i besueshëm dhe propozoni ndryshime për të marrë një mostër përfaqësuese.

7. Nxënësit e klubit ekologjik dëshirojnë të mësojnë cilësinë e ajrit në afërsi të shkollës së tyre. Ata kanë një pajisje të vogël që mat përqendrimin e grimcave në ajër (grimcat PM). Pajisjen mund ta vendosin në vende të ndryshme rreth oborrit dhe në rrugët përreth.
   a) Cili është popullacioni, cila është mostra dhe cili është tipari i këtij hulumtimi?
   b) Përshkruani të paktën dy mostra të ndryshme që mund të merren nga i njëjti popullacion.
   c) Shpjegoni përparësitë dhe mangësitë e matjes së cilësisë së ajrit në çdo vend të mundshëm afër shkollës (regjistrim i plotë).
   ç) Zgjidhni një mostër që mendoni se është më përfaqësuese për të gjithë popullacionin dhe shpjegoni pse.

Hulumtim

Pothuajse çdo ditë të gjithë ne e kontrollojmë parashikimin e motit. Hulumtoni si e përgatisin meteorologët parashikimin e motit.

Vlerësoni nëse pohimet e mëposhtme janë të besueshme dhe arsyetoni përgjigjen tuaj:

a) Temperatura mesatare në qytet sot është 25 °C (e matur me 2 termometra).
b) Korriku është muaji më i nxehtë i vitit (bazuar në matje dhjetëvjeçare).
c) Sot do të bjerë shi në të gjitha pjesët e qytetit (parashikim i bazuar në pamje satelitore).
ç) Shpjegoni përgjigjet e pyetjeve të mëposhtme:
   - Pse meteorologët vendosin termometra në lartësi dhe vende të ndryshme?
   - Si ndikon madhësia e mostrës në saktësinë e parashikimit të motit?
   - Çfarë do të ndodhte nëse për tërë qytetin do të përdornim vetëm matjet e një termometri?

2. TË DHËNAT DISKRETE. TABELA E FREKUENCAVE

Aktivitet

a) Cili është popullacioni dhe cili është tipari i tij në secilin nga shembujt e dhënë?
b) Si shprehen tiparet në secilin shembull (me numër, përshkrim, kategori)?
1) Gjatë një kontrolli sistematik është matur gjatësia e nxënësve të një paraleleje.
2) Në një kopsht botanik është shënuar ngjyra e luleve të disa llojeve të bimëve.
3) Në një fabrikë për prodhimin e frigoriferëve kontrollohet funksionimi i rregullt i produkteve të prodhuara.

Sipas mënyrës së shprehjes, tiparet mund të jenë shumë të ndryshme.
Nëse tipari shprehet në mënyrë përshkruese, themi se bëhet fjalë për tipar cilësor.
Nëse tipari shprehet me numër, atëherë themi se është tipar sasior.

Shembulli 1

A janë cilësore apo sasiore tiparet nga aktiviteti i dhënë në fillim të mësimit?

1) Në këtë rast tipari shprehet me numër, sepse bëhet fjalë për gjatësinë e nxënësve, e cila mund të jetë çfarëdo numri nga një interval vlerash. Pra, tipari është sasior.
2) Ngjyra e luleve është tipar cilësor, sepse shprehet në mënyrë përshkruese.
3) Tipari është cilësor dhe mund të shprehet në mënyrë përshkruese me dy kategori: produkt i rregullt ose produkt me defekt.

Shembulli 2

Çfarë vlerash numerike mund të përdoren për shprehjen e tipareve të mëposhtme:
a) gjatësia e një shtegu vrapimi, b) koha e udhëtimit në orë,
c) numri i anëtarëve të familjes, ç) lartësia e drurëve,
d) numri i mungesave në shkollë.

Në rastet a), b) dhe ç), tiparet e dhëna mund të marrin vlera nga një interval i caktuar; për shembull, gjatësia e shtegut të vrapimit mund të jetë 234 m. Këto të dhëna mblidhen me matje.

Tiparet te c) dhe d) mund të marrin vlera si 1, 2, 3, ..., përkatësisht numra natyrorë. Këto të dhëna mblidhen fillimisht me numërim.

Të dhënat diskrete janë të dhëna që mund të marrin vetëm vlera të caktuara dhe të numërueshme.

Shembuj të tjerë të të dhënave diskrete janë: numri i nxënësve, numri i automobilave, madhësia e veshjeve e shprehur me numër e të ngjashme. Pra, janë të dhëna që kanë vlerë të saktë, precize dhe të përcaktuar qartë, e cila dihet me siguri.
Ndryshe nga ato, gjatësia e njeriut, temperatura e ajrit, masa e trupave e të tjera mund të jenë çfarëdo numri dhjetor nga një interval vlerash.

Detyra 1

Cilat nga të dhënat e mëposhtme janë diskrete:
a) koha në minuta e vrapuesve në një garë;
b) numri i shëtitjeve gjatë një jave i banorëve të një lagjeje;
c) numri i produkteve që blihen në një market;
ç) gjatësia e shputës së 13-vjeçarëve;
d) trashësia e librave në bibliotekën e shkollës;
dh) kohëzgjatja e qëndrimit në hotel, e shprehur me numrin e ditëve me pansion të plotë?

Të dhënat e parenditura, veçanërisht kur numri i tyre është i madh, nuk tregojnë shumë për popullacionin që shqyrtohet. Prandaj duhet të sistemohen. Gjëja e parë që duhet bërë është renditja e tyre, si vijon:

- të dhënat, vlerat e të cilave janë dhënë në mënyrë përshkruese (me fjalë), klasifikohen në kategori;
- të dhënat, vlerat e të cilave janë dhënë numerikisht (me numra), renditen sipas madhësisë, nga më e vogla te më e madhja;
- të dhënat, vlerat e të cilave janë dhënë numerikisht (me numra) dhe kanë numër të vogël vlerash të përsëritura, grupohen në intervale në një tabelë.

Në të tri rastet, për sistemim më të lehtë, pranë vlerës (rezultatit) çdo përsëritje e së njëjtës e dhënë shënohet me një shenjë (vizë).

Shembulli 3

Gjatë një hulumtimi të shpejtësisë së reagimit të një grupi prej 10 nxënësish janë marrë të dhënat e mëposhtme:

nxënësi	Pero	Tome	Ana	Risto	Kire	Sime	Ema	Ilir	Ajshe	Ile
shpejtësia e reagimit	shpejt	ngadalë	shpejt	shpejt	shpejt	ngadalë	shpejt	shpejt	ngadalë	shpejt

Sistemojini të dhënat në tabelë.

Të dhënat (rezultatet) janë dhënë pa ndonjë sistem dhe pa qartësi. Me numërim përcaktohet sa herë paraqitet secila vlerë (shpejt, ngadalë). E ndërtojmë tabelën e mëposhtme:

shpejtësia e reagimit	shenjat	numri i nxënësve
reagim i shpejtë	𝍸 II	7
reagim i ngadalshëm	III	3

Detyra 2

Gjatë një hulumtimi për dorën mbizotëruese në punë, te 16 fëmijë të një paraleleje të klasave fillore janë marrë të dhënat e mëposhtme:

fëmija	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dora mbizotëruese	e djathta	e djathta	e djathta	e majta	e majta	e djathta	e majta	e djathta	e majta	e djathta	e djathta	e djathta	e majta	të dyja	të dyja	të dyja

a) Sistemoni të dhënat në tabelë.
b) Cila dorë është mbizotëruese?
c) A mund të nxirrni edhe përfundime të tjera?

Shembulli 4

Në klasën e Agnesës, shokët dhe shoqet biseduan se kush mund të zhytet dhe sa gjatë mund ta mbajë frymën nën ujë. Agnesa vendosi t'i shënojë të dhënat se sa gjatë mund ta mbajnë frymën:
11, 17, 21, 35, 24, 14, 18, 22, 33, 42, 23, 19, 14, 24, 17, 12, 13, 18, 19, 22, 21, 24, 14, 17

Përgjigjuni pyetjeve të mëposhtme:
a) Sa nxënës arritën ta mbanin frymën më shumë se 30 sekonda?
b) Sa nxënës arritën ta mbanin frymën më shumë se 20 dhe më së shumti 40 sekonda?
c) Cila është koha më e gjatë për të cilën një nxënës mund ta mbajë frymën?

Në të dhënat e marra ka një numër të vogël vlerash të përsëritura, përkatësisht, pa sistemim tabela do të përmbante shumë rreshta ose kolona dhe nuk do të ishte shumë e dobishme.
Prandaj, këtu është më mirë që të dhënat të grupohen, përkatësisht të ndërtohet një tabelë frekuencash me të dhëna të grupuara.
Gjatë kësaj, është e rëndësishme që grupet e veçanta të mos përmbajnë vlera që u përkasin dy grupeve fqinje. Pra, dy grupe të njëpasnjëshme nuk mund të jenë 10-20 dhe 20-30 sekonda (e dhëna me vlerë 20 s mund t'i përkasë vetëm njërës prej këtyre grupeve).
Pra, grupet duhet të jenë të ndara dhe duhet të kenë gjatësi të barabarta.

numri i sekondave	frekuenca
11-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Nga tabela e fituar e frekuencave me të dhëna të grupuara mund të shohim sa nxënës mund ta mbajnë frymën më shumë se 30 sekonda.
Këta janë nxënësit e dy grupeve të fundit të vlerave, përkatësisht $2 + 1 = 3$ nxënës.
Më shumë se 20, por jo më shumë se 40 sekonda, mund të qëndrojnë 10 nxënës, ndërsa vetëm 1 nxënës mund të qëndrojë më shumë se 40 sekonda.

Kur përpilojmë një tabelë me të dhëna të grupuara, duhet të kemi kujdes që:
- intervalet (grupet) të kenë gjatësi të njëjtë,
- të mos ketë "mbivendosje" të intervaleve,
- të mos ketë "boshllëqe" ndërmjet intervaleve.

Detyra 3

Merita po hulumton numrin e bishtajave të bimëve në serrën e saj. Ajo ka përgatitur një tabelë për shënim:

numri i bishtajave	vijëzat	frekuenca
15-20		
20-30		
35-40		
40-50		

Gjej dy parregullsi në tabelë, kopjoje atë në fletoren tënde dhe korrigjoje.

Detyra 4

Pikët e fituara në testin e matematikës nga 50 nxënës të dy klasave të teta janë:
35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 52, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.
Paraqiti pikët në një tabelë frekuencash me të dhëna të grupuara.

Detyra 5

Një numër nxënësish të një shkolle u anketuan për largësinë ndërmjet shtëpisë dhe shkollës së tyre dhe u morën këto rezultate:

largësia (në km)	shenja	numri i nxënësve
$0 < s \leq 1$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$1 < s \leq 2$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	
$2 < s \leq 3$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$3 < s \leq 4$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$4 < s \leq 5$	𝍸 𝍸 II	

Plotëso tabelën dhe pastaj përgjigju pyetjeve:

a) A mund ta përcaktojmë nga tabela largësinë më të shkurtër që përshkon ndonjë nxënës nga shtëpia deri në shkollë? Shpjego përgjigjen tënde.

b) Në cilin interval largësie ka numrin më të madh të nxënësve?

c) Sa nxënës jetojnë në largësi prej 3 km ose më pak?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Një grup folklorik e evidenton pjesëmarrjen e anëtarëve të vet. Për këtë mbledh të dhëna për:

a) kohëzgjatjen e anëtarësimit në grup,

b) numrin e provave që ndjekin në javë,

c) numrin e koreografive që kanë përvetësuar,

ç) lartësinë e secilit anëtar të grupit folklorik,

d) masën e secilit anëtar të grupit folklorik,

dh) moshën e secilit anëtar.

Përcakto cilat prej pohimeve paraqesin shembuj të të dhënave diskrete dhe arsyeto përgjigjen tënde.

2. Është dhënë numri i ditëve të qëndrimit në hotel për 40 mysafirë:

1, 4, 14, 13, 15, 2, 7, 7, 12, 10, 17, 16, 10, 8, 9, 1, 3, 5, 6, 12, 16, 16, 4, 9, 7, 5, 12, 11, 9, 8, 2, 1, 12, 15, 3, 4, 8, 12, 4, 15.

a) Cili është popullacioni dhe cili është tipari i tij?

b) A janë diskrete të dhënat e mbledhura?

c) Gjej parregullsitë në tabelën e frekuencave, kopjoje atë në fletoren tënde, korrigjoje dhe plotësoje.

numri i ditëve të qëndrimit	frekuenca
1-3	
4-7	
9-12	
12-14	
15-17	

3. Për shkak të nevojës për lidhjen dhe restaurimin e librave të vjetër, në bibliotekën e shkollës u mat trashësia, në centimetra, e disa librave. Vlerat e fituara janë:

2,4	3,2	0,3	0,8	1,1	1,4	2,3	2,9	0,4	1
1,2	2,6	2,5	2,1	0,9	1,4	1,1	2	2,2	3

a) A janë diskrete të dhënat e fituara? Shpjego!

b) Paraqiti të dhënat e fituara me tabelë frekuencash. Cili është tipari që po e shënon në tabelë?

4. Slave i mat kohët (t në minuta) që u nevojiten disa shokëve të tij për të arritur nga shtëpia deri te pishina e qytetit. Andrej numëron sa gjatësi pishine (n) noton çdo ditë secili prej shokëve.

Të dhënat që i mblodhi Slave:

24, 18, 25, 6, 31, 20, 17, 29, 37, 7, 23, 46, 30, 33, 19, 41, 15, 45, 21, 32

Të dhënat që i mblodhi Andrej:

0, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 0, 4, 2, 4, 3, 0, 1, 4, 5, 7, 4, 3

a) Cili prej tyre ka mbledhur të dhëna diskrete? Shpjego përgjigjen.

b) Shënoji kohët e regjistruara nga Slave në një tabelë frekuencash si ajo e dhënë më poshtë, të cilën do ta kopjosh në fletoren tënde.

koha, t (minuta)	shenja	frekuenca
$0 < t \leq 10$		
$10 < t \leq 20$		
$20 < t \leq 30$		
$30 < t \leq 40$		
$40 < t \leq 50$		

c) Shënoji të dhënat e mbledhura nga Andrej në një tabelë si ajo e dhënë më poshtë, të cilën do ta kopjosh në fletoren tënde.

numri i gjatësive të notuara, n	shenja	frekuenca
0-2		
3-5		
6-8		

ç) Krahasoji tabelat te b) dhe c) dhe përmend disa dallime ndërmjet tyre.

5. Lartësitë, të shprehura në cm, të nxënësve të një klase janë:

149, 148, 152, 146, 152, 152, 146, 148, 149, 151, 152, 146, 146, 149, 153, 146, 153, 148, 151, 152, 151, 152, 152, 152, 152, 148, 152, 148, 152, 146, 149.

a) Paraqiti në një tabelë frekuencash.

b) Sa është lartësia më e madhe e një nxënësi në klasë? A ka më shumë se një nxënës me atë lartësi?

c) Cilët nxënës janë më të shumtë: ata me lartësinë më të vogël apo ata me lartësinë më të madhe në klasë?

ç) A ka nxënës me lartësi më të vogël se 144 cm?

d) Sa nxënës kanë lartësi më të madhe se 145 cm dhe më të vogël se 156 cm?

6. Për secilin bashkënxënës të klasës, gjej numrin e ditëve që ka munguar nga shkolla gjatë muajit të kaluar.

a) Përpilo një tabelë frekuencash me të dhëna të grupuara.

b) Sa nxënës kanë munguar më shumë se 3 ditë gjatë muajit?

c) A ka nxënës që nuk kanë munguar fare?

ç) Sa nxënës kanë munguar saktësisht 7 ditë?

Hulumtim

Hulumto nëse ekziston lidhje ndërmjet masës trupore dhe shprehive të të ushqyerit te nxënësit e klasës sate. Mblidh të dhëna për:

a) lartësinë dhe masën e trupit (për të llogaritur indeksin e masës trupore),
b) numrin e vakteve të ushqimit gjatë ditës,
c) nëse vaktet e ushqimit janë kryesisht të shëndetshme apo të pashëndetshme,
ç) përpilo tabela frekuencash me të dhëna të grupuara,
d) përpiqu t'i interpretosh rezultatet për të zbuluar nëse ushqyerja ndikon në indeksin e masës trupore.

3. PLANIFIKIMI I HULUMTIMIT DHE MBLEDHJA E TË DHËNAVE

Aktivitet

Ke rezervuar një biletë për të udhëtuar pas disa muajsh në një vend ku nuk ke qenë më parë.
a) Si do të përgatitesh për udhëtimin për sa u përket veshjeve, këpucëve, ushqimit dhe gjërave të tjera?
b) Cilat të dhëna do t'i mbledhësh para nisjes?
c) Si do ta planifikosh udhëtimin?

Për të marrë informacione për gjendje dhe dukuri të tjera, duhet të mbledhim dhe të analizojmë të dhënat që i paraqesin ato gjendje dhe dukuri. Për një analizë të suksesshme të të dhënave, është e rëndësishme që së pari të planifikojmë cilat të dhëna na nevojiten dhe në ç'mënyrë do t'i mbledhim, në përputhje me kërkesat dhe kushtet e përcaktuara të detyrës.
Hulumtimet në të cilat bëjmë mbledhjen, rregullimin, paraqitjen dhe analizën e të dhënave quhen hulumtime statistikore.
Që një hulumtim statistikor për zgjidhjen e një problemi të caktuar të jetë i suksesshëm, duhet të përpilohet një plan i mirë për zbatimin e tij, zakonisht përmes këtyre hapave:

1) Identifikimi i problemit që hulumtojmë, së bashku me pyetjet për të cilat hulumtimi duhet të na japë përgjigje.
2) Mbledhja dhe rregullimi i të dhënave.
3) Paraqitja e të dhënave.
4) Analiza e të dhënave dhe nxjerrja e përfundimeve përkatës.

1) Identifikimi i problemit që hulumtojmë, së bashku me pyetjet për të cilat hulumtimi duhet të na japë përgjigje

Shembulli 1

Jovana dëshiron të hulumtojë se cila kombëtare e hendbollit ka shënuar numrin më të madh të golave në Kampionatin Botëror. Si duhet ta fillojë Jovana hulumtimin e saj?

Për t'i marrë të dhënat që i nevojiten, Jovana mund t'i ndjekë të gjitha ndeshjet dhe t'i shënojë rezultatet, e pastaj t'i përpunojë. Mirëpo, kjo nuk është gjithmonë e mundur. Disa ndeshje zhvillohen në të njëjtën kohë dhe ajo duhet të arrijë të sigurojë biletë për secilën ndeshje. Për të njëjtën arsye, nuk mund t'i ndjekë të gjitha ndeshjet as në televizion. Zgjedhja më e mirë për mbledhjen e të dhënave do të jetë t'i ndjekë rezultatet e të gjitha ndeshjeve në faqen zyrtare të internetit të kampionatit.

2) Mbledhja dhe rregullimi i të dhënave

Të dhënat mund të mblidhen nga burime të ndryshme.

- Të dhëna parësore janë të dhënat që i kemi siguruar vetë, drejtpërdrejt, duke përdorur një nga mënyrat e mbledhjes së të dhënave.
- Mirëpo, grupet tona të të dhënave mund të përmbajnë edhe të dhëna që më parë i kanë mbledhur hulumtues të tjerë, përkatësisht që i ka mbledhur dikush tjetër. Të dhënat e tilla i quajmë të dhëna dytësore.

Shembulli 2

Mustafa dëshiron të hapë një biznes në lagjen e tij të vogël. Për të vendosur se çfarë biznesi do të jetë më i nevojshëm dhe më fitimprurës, atij i duhen të dhëna për moshën dhe interesat e banorëve vendas. Mustafa duhet të vendosë nëse do të mbledhë të dhëna parësore apo të dhëna dytësore. Cilat janë përparësitë dhe mangësitë në secilin rast të mbledhjes së të dhënave që mund të zgjedhë Mustafa?

Secila qasje ka përparësitë dhe mangësitë e veta.

1) Mbledhja e të dhënave parësore (drejtpërdrejt, duke pyetur banorët)

Përparësitë:
- të dhënat janë të reja dhe aktuale,
- Mustafa merr informacione të sakta, posaçërisht për lagjen e tij,
- mund të parashtrojë pyetje shtesë nëse diçka nuk është e qartë,
- të dhënat e fituara janë përshtatur me qëllimin - planin e biznesit.

Mangësitë:
- kërkon kohë që të anketohen mjaft njerëz,
- nevojiten më shumë punë dhe organizim (përpilimi i pyetësorit, përpunimi i të dhënave),
- disa njerëz mund të mos dëshirojnë të përgjigjen,
- mund të ketë gabime gjatë mbledhjes dhe regjistrimit të të dhënave.

2) Mbledhja e të dhënave dytësore (interneti, enti statistikor, hulumtime dhe botime të mëparshme)

Përparësitë:
- të dhënat gjenden shpejt,
- nuk nevojiten anketa dhe kontakt i drejtpërdrejtë me njerëzit,
- kosto më e ulët dhe më pak punë për mbledhjen e të dhënave,
- mund të përdoren të dhëna nga hulumtime profesionale.

Mangësitë:
- të dhënat mund të mos jenë vetëm për lagjen e tij, por për një zonë më të gjerë,
- mund të jenë të vjetra ose të papërditësuara,
- nuk janë përshtatur me idenë e tij konkrete të biznesit,
- mund të mungojnë pikërisht informacionet që i nevojiten (për shembull: interesat, shprehitë).

Nëse Mustafa dëshiron një plan biznesi më të saktë, është më mirë të kombinojë të dhënat parësore dhe dytësore - së pari të shqyrtojë statistikat, e pastaj të bëjë një anketë të shkurtër në lagje.

Detyra 1

Çfarë të dhënash do të përdoreshin (parësore apo dytësore) për të hulumtuar:

a) notat në histori në klasën tënde,
b) shprehitë e riciklimit në vendbanimin tënd,
c) shprehitë e riciklimit në shtet,
ç) kushtet e motit?

Arsyeto përgjigjen tënde.

Mbledhjen e të dhënave për një problem të caktuar që hulumtohet mund ta bëjmë në disa mënyra: me vëzhgim, matje, pyetësor, krahasim, numërim e të tjera.
Për ta lehtësuar procesin e mbledhjes dhe përpunimit të të dhënave, duhet të përgatiten instrumente sa më të mira për mbledhjen e tyre. Instrumentet duhet të jenë të lehta dhe praktike për përdorim dhe të japin të gjitha informacionet që na nevojiten. Disa nga instrumentet që përdoren më shpesh janë: vëzhgimi, anketa, intervista, lista e kontrollit, lista e kontrollit me shkallë vlerësimi, pyetësori për fakte, qëndrime, mendime ose interesa etj.
Pasi t'i mbledhim, të dhënat i grupojmë, përkatësisht i rregullojmë në kategori përkatëse.

Shembulli 3

Nxënësit e klasës VIII në një shkollë fillore duhet të mbledhin të dhëna për largësinë e shtëpive të nxënësve nga shkolla dhe mënyrën se si vijnë në shkollë. Prandaj, ata përpiluan një pyetësor në të cilin çdo nxënës do t'u përgjigjet disa pyetjeve. Pyetjet mund të parashtrohen me zgjedhje, plotësim, rrethim e të tjera.

PYETËSOR

Emri dhe mbiemri i nxënësit:

_____

Klasa: 1. VIII a 2. VIII b 3. VIII c

Zgjidh përgjigjen duke rrethuar shkronjën ose numrin para përgjigjes përkatëse.

1. Largësia nga shtëpia ime deri në shkollë është afërsisht:

1. 100 m 2. 200 m 3. 300 m 4. 400 m 5. 500 m
6. 600 m 7. 700 m 8. 800 m 9. 900 m 10. 1km
11. Ndërmjet 1 km dhe 2 km 12. Më e madhe se 2 km

2. Në shkollë vij:

1. Në këmbë 2. Me biçikletë 3. Me automobil
4. Me autobus 5. Me trotinet

Shpesh zgjedhja mund të bëhet duke vendosur shenjën ☑ ose shenjën ☒.

Pyetësorët duhet të plotësojnë disa kushte që të jemi të sigurt se do ta japin pasqyrën e vërtetë të problemit të hulumtuar. Pyetjet nuk duhet të jenë sugjestive, fyese, të gjata ose të pakuptueshme dhe është më mirë të testohen para përdorimit.

Detyra 2

Vllatko dëshiron të hulumtojë sa nxënës të shkollës së tij luajnë një ose më shumë instrumente muzikore dhe cilat janë ato instrumente.

a) Cilat instrumente për mbledhjen e të dhënave mund të përdorë Vllatko?
b) A janë parësore apo dytësore të dhënat e mbledhura?

Shembulli 4

Ilija dëshiron të zbulojë sa kohë kalojnë nxënësit e klasës së tij duke parë televizor. Ai shqyrton dy pyetje të mundshme për mbledhjen e të dhënave:

1) Sa shikon televizor?
2) Sa orë kalon duke parë televizor?

Gjej nga një vërejtje për secilën pyetje dhe shkruaj një pyetje më të mirë që mund ta përdorë Ilija.

Në pyetjen 1) nuk është e qartë se çfarë përgjigjeje kërkohet, prandaj përgjigjet e fituara mund të jenë "shumë" ose "jo shumë", të cilat nuk japin një pamje të qartë të problemit të hulumtuar.

As pyetja 1), as pyetja 2) nuk përcaktojnë periudhën kohore së cilës i referohen. Prandaj, një i anketuar mund të përgjigjet 3 orë në një ditë, ndërsa një tjetër 3 orë gjatë një muaji, gjë që përsëri nuk jep një pamje të qartë të çështjes së hulumtuar.

Është më mirë që pyetja të parashtrohet me disa mundësi të ofruara për përgjigje dhe të përfshijë periudhën kohore së cilës i referohet, për shembull:

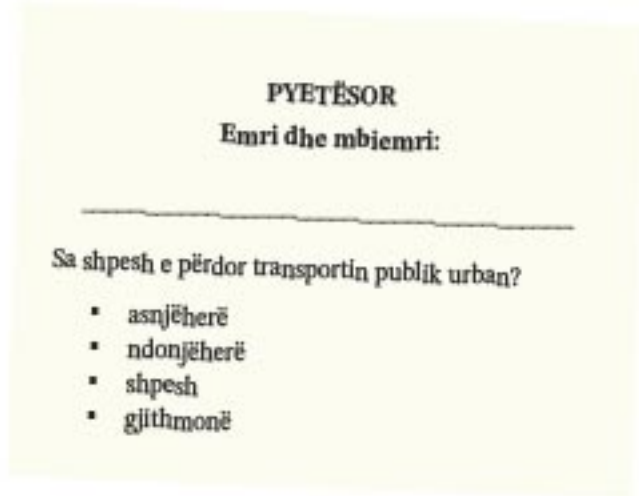
Sa orë shikove televizor gjatë ditës së djeshme?

- fare
- më pak se 1 orë
- nga 1 deri në 2 orë
- më shumë se 2 orë

Në këtë rast duhet të kemi kujdes që fushat e përgjigjeve të përmbajnë pohime pa boshllëqe ose mbivendosje dhe të përfshijnë të gjitha përgjigjet e mundshme.

Detyra 3

Lara ka përpiluar një instrument për mbledhjen e të dhënave, për të hulumtuar sa shpesh njerëzit e përdorin transportin publik urban. Shkruaj disa anë negative të këtij pyetësori dhe propozo një instrument të ri, të përmirësuar, për mbledhjen e të dhënave.



PYETËSOR

Emri dhe mbiemri:

_____

Sa shpesh e përdor transportin publik urban?

- asnjëherë
- ndonjëherë
- shpesh
- gjithmonë

Shembulli 5

Menaxheri i një marketi hulumton sa paketime drithërash nga secili prej tre prodhuesve të ndryshëm shiten në ditë. Si mund t'i mbledhë të dhënat?

Në këtë rast, të dhënat mblidhen me **vëzhgim** dhe **numërim**. Njohuritë e fituara mund të paraqiten në tabelë ose grafikisht, dhe më vonë të përdoren për analizë dhe nxjerrjen e përfundimeve përkatëse.

3) Paraqitja e të dhënave

Rezultatet e sistemimit të të dhënave, të shprehura me numra, i paraqesim në mënyrë të qartë në një tabelë, e cila zakonisht përbëhet nga fusha drejtkëndore të formuara nga kryqëzimi i vijave horizontale dhe vertikale. Megjithatë, vetëm tabela nuk është gjithmonë mënyra më e qartë e paraqitjes. Krahas përpilimit të tabelës, një mënyrë tjetër e paraqitjes së të dhënave është paraqitja grafike, të cilën e përdorim për t'i paraqitur në mënyrë figurative të dhënat e rregulluara.

Shembulli 6

Duhet të hulumtojmë prodhimin e produkteve bujqësore (domate dhe lakër) në një fermë me katër parcela të veçanta. Dy parcela janë të zakonshme dhe dy janë me serra plastike. Në ç'mënyrë mund të shqyrtohen rastet e mëposhtme:

a) Sa kilogramë domate dhe lakër fitohen çdo ditë nga secila parcelë e veçantë?

b) A ekziston varësi e sasisë së fituar të secilit produkt nga fakti nëse parcela është e zakonshme apo me serrë plastike?

c) Varësia e sasisë së fituar të produkteve nga varieteti i mbjellë i produktit.

a) Për t'iu përgjigjur pyetjes, nevojitet që për një periudhë më të gjatë të mblidhen çdo ditë, me matje, të dhëna për sasinë e produkteve të fituar nga secila parcelë. Pastaj, të dhënat duhet të rregullohen dhe të grupohen sipas llojit të parcelës dhe varietetit të produkteve.

Për sa i përket rregullimit, mënyra më e qartë është që të dhënat të sistemohen në tabela. Për shembull, një tabelë për sasinë e prodhuar sipas parcelës:

	Parcela 1 – e zakonshme	Parcela 2 – e zakonshme	Parcela 3 – serrë	Parcela 4 – serrë
Domate	200 kg	250 kg	300 kg	400 kg
Lakër	250 kg	400 kg	450 kg	600 kg

b) Për secilin nga produktet bujqësore të vëzhguara mund të veçohen sasitë ditore të fituara nga parcela të ndryshme, për t'iu përgjigjur pyetjes nëse prodhimi varet nga lloji i parcelës.

c) Në fund, duke analizuar të dhënat e mbledhura dhe më pas të rregulluara për varietetin e produkteve dhe sasinë e fituar, mund të nxirren përgjigje përkatëse për pyetjen e parashtruar.

4) Analiza e të dhënave dhe nxjerrja e përfundimeve përkatëse

Në këtë hap i analizojmë të dhënat e paraqitura në tabelë dhe grafikisht, u përgjigjemi pyetjeve të parashtruara dhe nxjerrim përfundime përkatëse.

Paraqitja grafike (figurative) e të dhënave shpesh ndihmon gjatë analizës së tyre. Për analizimin e të dhënave do të flasim më vonë.

Shembulli 7

Duhet të bësh një hulumtim të vogël për shprehitë e nxënësve të paraleles sate lidhur me përdorimin e telefonave, tabletëve dhe kompjuterëve. Shkruaj dhe shpjego të gjitha hapat e planit të hulumtimit.

Më poshtë janë dhënë të renditura të gjithë hapat e planit për zbatimin e hulumtimit:

1) Plani i hulumtimit duhet të përmbajë përgjigjet për pyetjet në vijim:
   - Çfarë dëshiron të zbulosh? (pyetja hulumtuese: Sa kohë gjatë ditës i përdorin pajisjet digjitale nxënësit e klasës sime?)
   - Cilët nxënës do t'i përfshish? (sa persona, nga cila klasë, nga cili vend)
   - Cilat të dhëna do t'i mbledhësh? (p.sh. kohën e përdorimit, për çfarë i përdorin pajisjet etj.)
   - Sa kohë do të zgjasë hulumtimi?

2) Sigurisht, rëndësi të madhe ka zgjedhja e instrumentit përkatës për mbledhjen e të dhënave, i cili mund të jetë anketë (përmes një pyetësori të përgatitur), tabelë për shënim të përditshëm ose intervistë me disa nxënës. Ja disa pyetje shembull që mund të përfshihen në pyetësor:

- Sa orë në ditë, mesatarisht, përdor pajisje digjitale:
  a) më pak se 2 orë, b) nga 2 deri në 4 orë, c) më shumë se 4 orë?
- Për çfarë i përdor më së shumti? (mësim, lojëra, rrjete sociale...)
- Kur i përdor më shpesh pajisjet:
  a) para shkollës, b) gjatë pushimeve në shkollë,
  c) menjëherë pas shkollës, ç) vonë në mbrëmje para gjumit?

Në këtë mënyrë do të mblidhje të dhëna parësore. Nëse në hulumtimin tënd dëshiron të përdorësh të dhëna dytësore, atëherë mund të kërkosh statistika në internet: sa kohë mesatarisht përdorin pajisje digjitale adoleshentët në Maqedoni ose në botë?

3) Pasi të mblidhen të dhënat, për një pasqyrë më të qartë ato mund të organizohen në tabela dhe/ose të paraqiten grafikisht.

4) Analiza e të dhënave të fituara mund të jetë në formën e një teksti të shkurtër me përfundime lidhur me pyetje si: Çfarë zbulova? Çfarë kuptimi kanë rezultatet?

Detyra 4

Harto një plan për mbledhjen e të dhënave se sa nga koha e tyre e lirë nxënësit e paraleles sate e shfrytëzojnë për t'u marrë me sport. Cilat janë përparësitë dhe mangësitë e përdorimit të intervistës ose të pyetësorit për mbledhjen e të dhënave të nevojshme?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Lirimi mbledh informacione për mjetet (paratë) që nxënësit e klasës së tij i shpenzojnë çdo ditë. Krijo një instrument me të cilin Lirimi mund t'i mbledhë të dhënat. A janë parësore apo dytësore të dhënat e mbledhura?
2. Blagoji dëshiron të hulumtojë sa fruta dhe perime përdorin në ushqimin e tyre nxënësit e shkollës së tij. Cilat instrumente për mbledhjen e të dhënave mund të përdorë? Cilat pyetje duhet t'i parashtrojë? Përpilo një pyetësor përkatës. A ke ndonjë ide se si Blagoji t'i paraqesë të dhënat?
3. Përpilo një plan për mbledhjen e të dhënave për numrin e librave të lexuar gjatë pushimit nga nxënësit e paraleles sate. Cilat instrumente për mbledhjen e të dhënave do të përdorësh? A janë parësore apo dytësore të dhënat e mbledhura?
4. Përpilo një plan për mbledhjen e të dhënave për temperaturat maksimale dhe minimale ditore gjatë muajit të kaluar.
5. Përpilo një plan për mbledhjen e të dhënave për suksesin e portierëve të kombëtareve në Ligën Evropiane të Hendbollit.

Hulumtim

Përpilo një plan hulumtimi dhe mblidh të dhëna se sa aktivë fizikisht janë çdo ditë nxënësit e klasës VIII në shkollën tënde.

4. DIAGRAMET

Aktivitet

Në diagramin e vizatimit 1 janë paraqitur rezultatet e testit të matematikës në klasën VIII-b.

a) Sa nxënës kanë marrë notën 5?

b) Sa nxënës kanë marrë notën 1 ose 2?

c) Cilën notë e kanë marrë më shumë nxënës?



Vizatimi 1

Nëse dëshirojmë të nxjerrim lehtë dhe shpejt përfundime nga të dhënat e mbledhura, duhet t'i paraqesim ato në mënyrë të qartë dhe të thjeshtë. Këtë do ta arrijmë me paraqitjen grafike përmes diagrameve.

Skano kodin dhe shqyrto diagramet.

Shembulli 1

Në një klasë ka 36 nxënës, prej të cilëve 15 janë vajza. Paraqite strukturën gjinore të paraleles me diagram sektorial.

Për tiparin gjini ka dy mundësi - mashkullore dhe femërore, prandaj në diagram do të ketë dy kategori: djem dhe vajza.
Numri i djemve është 36 - 15 = 21 djem (vizatimi 2).
Prandaj, diagrami sektorial do të ndahet në dy pjesë (sektorë).
Për të përcaktuar madhësinë e secilës pjesë, së pari do të përcaktojmë këndin e pjesës së këndit të plotë që paraqet një nxënës.
Ky kënd është $360^\circ : 36 = 10^\circ$, prandaj pjesët në diagramin sektorial do t'i zënë këto kënde:
- për vajzat $10^\circ \cdot 15 = 150^\circ$
- për djemtë $10^\circ \cdot 21 = 210^\circ$

Diagrami rrethor do të jetë:



Vizatimi 2

Mënyra e dytë:

Ndarja e sektorëve ndonjëherë mund të bëhet më lehtë edhe përmes pjesëve të shprehura me thyesa:

- vajzat përbëjnë $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ e rrethit, ndërsa në gradë kjo është $\frac{5\cdot 360^\circ}{12}=150^\circ$.
- djemtë përbëjnë $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ e rrethit, që është $\frac{7\cdot 360^\circ}{12}=210^\circ$.

I njëjti diagram do të fitohet nëse rrethin e ndajmë në 12 pjesë të barabarta dhe i shënojmë përkatësisht shtatë pjesë për djemtë dhe pesë pjesë për vajzat.

Skano kodin dhe shqyrto diagramet.

Detyra 1

Shpërndarja e mjeteve të përgjithshme financiare të Petarit për muajin mars është paraqitur në tabelë.

a) Kopjoje në fletore dhe plotësoje tabelën.

b) Vizato një diagram sektorial për të dhënat e saj. Shkruaje secilën pjesë të diagramit sektorial edhe në formë thyese, si pjesë të rrethit.

kategoria	denarë	%	këndi
qiraja	1800		
ushqimi	6000		
transporti	950		
të tjera	1000		
kursimi	250		

Detyra 2

Në diagramin sektorial të vizatimit 3 është paraqitur shpërndarja e mjeteve të një shoqate komunale të shahut për organizimin dhe zhvillimin e një turneu shahu. Nëse buxheti i përgjithshëm që kishte në dispozicion shoqata ishte 60 000 denarë, llogarit sa mjete i takojnë secilës kategori të shpenzimeve.



Vizatimi 3

Shembulli 2

Në një hulumtim mbi interesin për disa zhanre filmash, u anketuan 90 të rritur dhe 120 fëmijë. Në vizatimin 4 janë dhënë diagramet sektoriale të fituara pas rregullimit të të dhënave.



Vizatimi 4

a) Sa për qind e fëmijëve pëlqejnë komedinë?

b) Sa të rritur pëlqejnë filma me përmbajtje historike?

c) Sa më i madh është numri i fëmijëve që preferojnë filma fantastiko-shkencorë krahasuar me numrin e të rriturve?

ç) Sektori për filmat aventuristikë ka të njëjtën madhësi te të rriturit dhe te fëmijët. Shpjego si mund ta dish pa llogaritje se më shumë fëmijë se të rritur parapëlqejnë filmat aventuristikë?

a) Sektori që përfaqëson fëmijët që pëlqejnë komedinë ka kënd qendror 45°, ndërsa të gjithë mostrës i përgjigjet këndi i plotë prej 360°. Prandaj, për përqindjen përkatëse fitojmë $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\%$. Pra, 12,5% e fëmijëve pëlqejnë komedinë.

b) Meqenëse mostra e të rriturve të anketuar përbëhet nga 90 persona, këndi qendror që i përgjigjet një të rrituri është $360° : 90 = 4°$. Kështu, këndi 120°, që i përgjigjet pjesës së të rriturve që pëlqejnë më së shumti filma me përmbajtje historike, përfaqëson 30 persona ($120° : 4° = 30$ persona).

c) Numri i të rriturve që pëlqejnë filma fantastiko-shkencorë është $24° : 4° = 6$. Tani së pari e përcaktojmë këndin qendror për 1 fëmijë: $360° : 120 = 3°$. Prandaj, numri i fëmijëve që pëlqejnë filmat fantastiko-shkencorë është $120° : 3° = 40$. Atëherë $40 - 6 = 34$, pra filmat fantastiko-shkencorë i pëlqejnë 34 fëmijë më shumë se të rritur.

ç) Sektori që përfaqëson filmat me aventura ka të njëjtën madhësi te të rriturit dhe te fëmijët. Megjithatë, mostra e fëmijëve është më e madhe se mostra e të rriturve: këndi i plotë prej 360° përfaqëson 90 të rritur, ndërsa i njëjti kënd përfaqëson 120 fëmijë. Prandaj, këndet e barabarta prej 36° për filmat me aventura përfaqësojnë më shumë fëmijë sesa të rritur.

Detyra 3

Tabelat paraqesin strukturën sipas moshës të banorëve të dy qyteteve. Ndërto një diagram sektorial për secilin qytet dhe krahaso strukturën sipas moshës të banorëve të tyre. Përgjigju pyetjeve të mëposhtme:

qyteti X	%
0-14	28
15-24	21
25-54	38
55-64	7
65 e më shumë	6

qyteti Y	%
0-14	14
15-24	12
25-54	43
55-64	12
65 e më shumë	19

Skano kodin dhe shqyrto diagramet.

a) Sa persona janë nga 25 deri në 54 vjeç në qytetin X?
b) Sa për qind e popullsisë së qytetit Y është më e vjetër se 55 vjeç?
c) Nëse qyteti X ka 30 000 banorë, ndërsa qyteti Y ka 60 000 banorë, si mund ta dish pa llogaritje se cilat grupmosha të dy qyteteve kanë numër të barabartë banorësh?

Shembulli 3

Në tabelë është dhënë varësia ndërmjet njësive të gjatësisë: centimetra dhe milimetra.

cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

a) Paraqite varësinë ndërmjet njësive të gjatësisë, centimetra dhe milimetra, me diagram vijor.
b) Lexo nga diagrami vijor sa milimetra janë 35 cm.
c) Nga diagrami vijor lexoji në centimetra këto vlera të dhëna në milimetra: 200, 320 dhe 470.

a) Për t'i paraqitur të dhënat grafikisht në sistemin koordinativ, në boshtin x vendosen centimetrat, ndërsa në boshtin y milimetrat (vizatimi 5).



Vizatimi 5

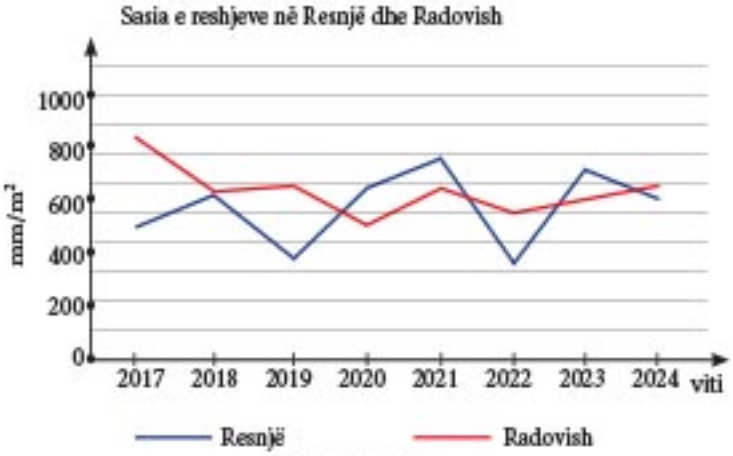
b) Për ta lexuar nga diagrami vijor gjatësinë prej 35 cm në milimetra, në boshtin x shënohet 35 cm dhe nga ajo pikë ngrihet një pingule. Nëpër pikën *M* të prerjes së pingules me diagramin vijor tërhiqet një drejtëz paralele me boshtin x, e cila në prerjen me boshtin y jep pikën që i përgjigjet 35 cm në mm.
c) Ngjashëm si te b), por tani duke u nisur nga vlera e dhënë në mm në boshtin y, nga diagrami vijor mund të lexohet se 200 mm u përgjigjen 20 cm.
Nga vizatimi 5 mund të vëresh se ndërmjet vlerave të gjatësisë së shprehur në centimetra dhe të shprehur në milimetra madhësitë janë në përpjesëtim të drejtë; kjo varësi mund të shkruhet $y = 10x$, ku y është vlera e gjatësisë e shprehur në milimetra, ndërsa x është vlera e gjatësisë e shprehur në centimetra.

Skano kodin dhe shqyrto diagramet

Detyra 4

Në diagramin e vizatimit 6 është dhënë sasia e reshjeve në Resnjë dhe Radovish, e shprehur në milimetra për metër katror, në disa vite. Përgjigju:

a) Kur janë regjistruar reshjet më të shumta dhe kur reshjet më të pakta në secilin qytet?
b) A ka vite në të cilat sasia e reshjeve është e njëjtë në të dy qytetet?
c) Në cilën periudhë është regjistruar rënia më e madhe e sasisë së reshjeve gjatë një viti?
ç) Sa është dallimi i reshjeve në vitin 2022?



Vizatimi 6

DETYRA PËR USHTRIME

1. Çmimi i gjysmë litri kos lope dhe kos deleje ka ndryshuar gjatë 5 muajve sipas të dhënave në tabelë:

muaji	janar	shkurt	mars	prill	maj
kos lope	45	47	44	40	40
kos deleje	57	60	55	51	51

Paraqiti këto të dhëna në një diagram vijor. Ki kujdes, ka dy lloje të ndryshme kosi.

2. Tabela paraqet interesimin për aktivitete jashtëmësimore te 100 nxënës. Vizato një diagram sektorial për t'i paraqitur këto të dhëna.

aktiviteti	sport	orkestër	shkencë	shoqëroro-humanitare
frekuenca	39	18	20	23

3. Me tabelën dhe diagramin sektorial të vizatimit 7 janë dhënë rezultatet e një hulumtimi lidhur me shijen e parapëlqyer të ëmbëlsirave te 30 fëmijë dhe 36 të rritur.

shija	frekuenca
frutash	5
çokollatë	11
vanilje	8
lajthi	6



Vizatimi 7

a) Vizato diagram sektorial për të dhënat e fituara për fëmijët.
b) Sa të rritur pëlqejnë ëmbëlsira me çokollatë?
c) Krahasoji vlerat te fëmijët dhe te të rriturit. A ka sektorë në dy diagramet sektoriale që kanë kënde qendrore të barabarta? Sa njësi paraqesin ato?

4. Nxënësit e dy paraleleve u pyetën se si e kalojnë kohën e lirë. Paralelja e parë ka 20 nxënës, ndërsa e dyta 30 nxënës. Përgjigjet janë dhënë me diagramet sektoriale të vizatimit 8:



Vizatimi 8

a) Gjej cilët dy sektorë kanë kënd të barabartë dhe shpjego si është e mundur kjo, megjithëse numri i përgjithshëm i nxënësve në dy paralelet është i ndryshëm.

b) Në cilën paralele ka më shumë nxënës që luajnë lojëra? A do të thotë kjo edhe përqindje më e madhe?

c) Llogarit përqindjen e nxënësve që merren me sport në të dy diagramet. Çfarë vëren?

ç) Përpilo një diagram sektorial duke supozuar se ke anketuar gjithsej 40 nxënës për të njëjtën pyetje, ku sektori për sport do të paraqitet me të njëjtin kënd si në dy diagramet sektoriale të dhëna (144°). Këndet për sektorët që u përgjigjen aktiviteteve të tjera propozoji sipas zgjedhjes sate.

5. Paraqitni me diagram vijor të dhënat për temperaturën mesatare mujore më të lartë dhe më të ulët në një qytet, të dhëna në tabelë.

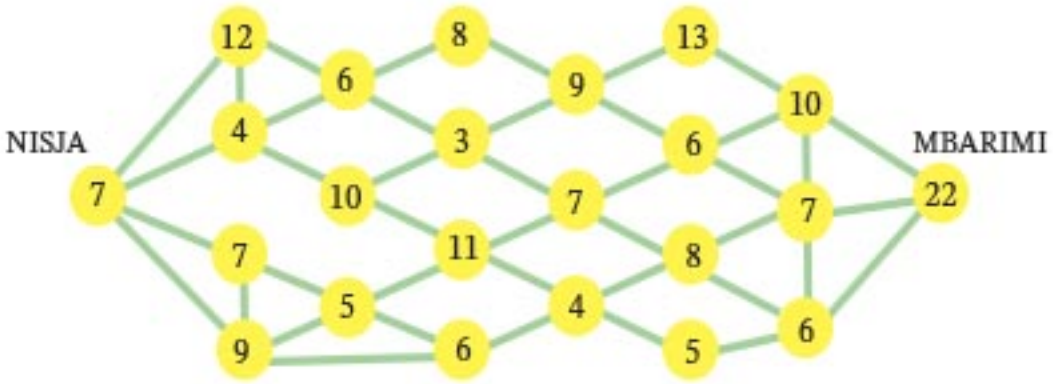
muaji	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
temperatura mesatare më e lartë (°C)	+4	+16	+16	+25	+27	+30	+35	+36	+25	+20	+17	+10
temperatura mesatare më e ulët (°C)	−25	−20	−2	+3	+5	+13	+18	+11	+12	+5	−4	−15

Hulumtim

1. Në internet ose në botime të shtypura kërko paraqitje të të dhënave me ndonjë nga diagramet e mësuara dhe shëno cilave pyetje u është dhënë përgjigje me hulumtimet konkrete statistikore. Pastaj përpiqu të formulosh të paktën edhe dy pyetje të tjera lidhur me to.

2. Luaje lojën në figurë sipas rregullave të mëposhtme: lëviz përgjatë vijave, duke u nisur nga NISJA drejt MBARIMIT. Mesatarja aritmetike e numrave në nyjet ku je ndalur nuk duhet të jetë më e vogël se 5 dhe as më e madhe se 10. Nuk mund të ndalosh më shumë se një herë në të njëjtën nyje.

Sfidë për klasën: lojën mund ta luani si klasë ose në çifte. Fitues është ai që arrin i pari në fund.



5. DIAGRAMI "KËRCELL-GJETHE"

Aktivitet

Përcakto medianën për grupet e mëposhtme të të dhënave:

a) 3, 5, 6, 6, 8, 10, 13, 14, 14, 14

b) 4, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 2, 7

Të dhënat e mbledhura me tipare numerike gjatë një hulumtimi mund t'i organizojmë duke i renditur sipas madhësisë së tyre.

Atëherë është më e përshtatshme të përdorim një diagram të quajtur diagrami "kërcell-gjethe" (vizatimi 1).

"Kërcelli" ndodhet në të majtë të vijës vertikale, ndërsa "gjethet" në të djathtë të saj dhe gjithmonë paraqiten vetëm me një shifër.

Gjethet organizohen sipas madhësisë; i shkruajmë në rreshta dhe kujdesemi që të jenë të vendosura njëra nën tjetrën (si në vija vertikale).

Për çdo diagram "kërcell-gjethe" është e domosdoshme të jepet një çelës sipas të cilit do të lexohet diagrami.

kërcelli gjethja

2	0	0	1	2	7
3	1	1	2		
4	2	3	5	6	
5	1	3	4	4	6

Çelësi: 5|1 paraqet 51

Shembulli 1

Është dhënë bashkësia e vlerave që paraqet kohën e pritjes te arka e një supermarketi, të shprehur në minuta.

17, 23, 20, 19, 25, 30, 32, 25, 12, 10, 23, 15, 11.

a) Përdor diagramin "kërcell-gjethe" për t'i paraqitur rezultatet.

b) Përcakto rangun e kohëve të pritjes.

c) Sa për qind e blerësve kanë pritur 20 minuta ose më shumë?

ç) Gjej medianën e këtij grupi të të dhënave.

a) Hapi i parë: Në kërcell do të paraqesim dhjetëshet, ndërsa gjethet do të jenë shifrat e njësheve të secilës vlerë.

1	7	9	2	0	5	1
2	3	0	5	5	3	
3	0	2				

Hapi i dytë: Gjethet i renditim sipas madhësisë.

1	0	1	2	5	7	9
2	0	3	3	5	5	
3	0	2				

Çelësi: 3|0 paraqet 30 minuta

b) Rangu = vlera më e madhe - vlera më e vogël = 32 − 10 = 22.

c) I numërojmë gjethet në rreshtin e dytë dhe të tretë dhe llogarisim sa për qind paraqesin ato.

7 blerës kanë pritur të paktën 20 minuta, ndërsa gjithsej janë dhënë 13 vlera. Prandaj fitojmë se $\frac{7}{13} \approx 0{,}54 = 54\%$ e blerësve kanë pritur 20 minuta ose më shumë.

ç) Meqë të dhënat tashmë janë renditur në diagramin "kërcell-gjethe", duke eliminuar nga dy vlera (një nga fillimi dhe një nga fundi i diagramit) arrijmë te vlera që ndodhet në mes të vargut, përkatësisht 20.

1	~~0~~	~~1~~	~~2~~	5	~~7~~	9
2	0	~~3~~	~~3~~	~~5~~	~~5~~	
3	~~0~~	~~2~~				

Skano kodin dhe shqyrto diagramet

Detyra 1

Jovani mblodhi të dhëna për gjatësitë e vemjeve që gjeti gjatë një ekskursioni. Gjatësitë janë dhënë me diagramin "kërcell-gjethe".

a) Sa është gjatësia e vemjes më të vogël dhe sa e asaj më të madhe?

b) Sa vemje gjeti Jovani?

c) Sa vemje kanë gjatësi jo më të madhe se 3 cm?

ç) Përcakto rangun e gjatësive.

d) Përcakto medianën e gjatësive.

1	3	5	7	7				
2	0	6	8	8	8	9		
3	1	5	5	5	5	6	8	9
4	1	5						
5	2							

Çelësi: 5|2 paraqet 5,2 cm

Detyra 2

Mësuesi i gjuhës angleze u kërkoi nxënësve të prezantohen me disa fjalë. Është dhënë numri i fjalëve të përdorura gjatë prezantimit të 40 nxënësve.

72	81	78	82	78	89	82	77
85	76	75	81	74	87	84	77
80	83	79	82	75	74	74	71
75	79	72	76	71	75	82	78
76	76	81	77	72	84	87	83

a) Përdor diagramin "kërcell-gjethe" për t'i paraqitur të dhënat.
b) Përpilo një tabelë frekuencash me të dhëna të grupuara.
c) Sa nga pjesëmarrësit kanë përdorur më shumë se 84 fjalë?
ç) Sa është përqindja e pjesëmarrësve që kanë përdorur më pak se 75 fjalë?
d) Gjej rangun e të dhënave.
dh) Përcakto medianën e grupit të të dhënave.

Detyra 3

Nxënësit e një klase matën sa minuta në ditë kalojnë duke ushtruar (vrapim, ecje të shpejtë ose biçikletë) gjatë një dite. Të dhënat e fituara në minuta janë: 32, 45, 28, 41, 39, 47, 52, 36, 44, 33, 38, 50.
a) Përpilo një diagram "kërcell-gjethe" për të dhënat.
b) Cilat vlera janë më të shpeshta?
c) Përcakto medianën.
ç) Sa nxënës kanë ushtruar më shumë se 40 minuta?

Detyra 4

Në kuadër të orës së biologjisë, nxënësit e një klase matën pulsin në gjendje qetësie. Vlerat e fituara janë: 72, 78, 65, 81, 74, 69, 77, 83, 71, 75, 68, 79.
a) Paraqiti të dhënat me diagram "kërcell-gjethe" për të vëzhguar më mirë se si ndryshojnë parametrat fiziologjikë ndërmjet nxënësve.
b) Sipas diagramit, cili është pulsi më i shpeshtë?
c) Sa është mediana?
ç) Sa nxënës kanë pasur puls 75 ose më të lartë?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Nga diagrami i dhënë "kërcell-gjethe" përcakto:
   a) vlerën më të vogël,
   b) vlerën më të madhe,
   c) sa të dhëna kanë vlerë më të madhe se 90,
   ç) sa të dhëna kanë vlerë të paktën 100,
   d) përqindjen e të dhënave më të vogla se 75.

7	3	4	6	7	8	9	9						
8	0	0	1	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8
9	1	1	2	4	4	5	8	9					
10	2	3	7										
11													
12	2												

Çelësi: 9|1 paraqet 91

2. Aneta i numëron fjalët në secilën prej 30 fjalive në gazetën ditore. Rezultatet e saj janë paraqitur me diagramin "kërcell-gjethe".

0	8	8	9					
1	1	2	3	4	4	8	9	
2	0	3	5	5	7	7	8	
3	2	2	3	3	6	6	8	8
4	1	2	3	3	5			

Çelësi: 4|1 paraqet 41 fjalë

a) Sa fjali kanë pasur nga 36 fjalë?
b) Përcakto rangun.
c) Gjej medianën.
ç) Llogarit sa fjalë kanë mesatarisht fjalitë që ka analizuar Aneta.

3. Është dhënë masa, në kilogramë, e 15 pakove.

1,1	1,7	2,0	1,0	1,1	0,5	3,3	2,0
1,5	2,6	3,5	2,1	0,7	1,2	0,6	

a) Vizato një diagram "kërcell-gjethe" për t'i paraqitur këto informacione.
b) Sa pako kanë masë më të vogël se 2 kilogramë?
c) Cili është rangu i masave?
ç) Përcakto medianën e masave të pakove.

4. Jana e mat lartësinë e bimëve (në milimetra) në kopshtin botanik. Këto janë rezultatet e fituara:

178	189	147	147	166
167	153	171	164	158
189	166	165	155	152
147	158	148	151	172

a) Paraqiti rezultatet me diagram "kërcell-gjethe".
b) Cili është rangu i lartësive?
c) Sa bimë janë më të larta se 165 mm?
ç) Gjej medianën e lartësive.
d) Përcakto modën e lartësive.

5. Nxënësit e klasës së tetë kryejnë një eksperiment laboratorik për të matur kohën e rënies së një topthi të vogël metalik nga lartësia 3 metra.

Secili nxënës bën nga një matje dhe janë fituar këto rezultate (në sekonda):

0,78; 0,81; 0,74; 0,69; 0,72; 0,85; 0,80; 0,73; 0,77; 0,82; 0,76; 0,79; 0,75; 0,83; 0,71; 0,88; 0,84; 0,70; 0,74; 0,78.

a) Përpilo një diagram "kërcell-gjethe" për të dhënat.

b) Cili është rangu i kohës?

c) Sa matje janë nën 0,75 s?

ç) Sa është moda, nëse ekziston?

6. Një klub gjeografik mbledh të dhëna për temperaturat minimale ditore në dy rajone të ndryshme të RMV-së gjatë së njëjtës periudhë në janar. Ata i kanë renditur të dhënat dhe për Rajonin A tashmë kanë përpiluar diagramin "kërcell-gjethe":

Rajoni A: diagrami "kërcell-gjethe" (temperaturat minimale në °C)

−5	9
−4	8 7
−3	9 5 2
−2	8 6 6 5
−1	9 4

Çelësi: -3|5 paraqet -3,5 °C

Të dhënat për Rajonin B (në °C): −1,0; −0,5; −2,0; −1,5; −3,0; −2,5; −1,0; −0,5; −0,5; −1,0; −4,2; −2,0.

a) Përpilo diagram "kërcell-gjethe" për Rajonin B.

b) Krahasoji dy diagramet. Çfarë mund të përfundohet për dallimin e klimës ndërmjet rajoneve?

c) Nëse duhet të rekomandosh se në cilin rajon do të funksiononte më mirë një pemëtari e ndjeshme ndaj ngricës (për shembull, pjeshkë ose kajsi), në cilin rajon do ta vendosje plantacionin? Arsyeto vendimin tënd duke u bazuar në diagramet.

ç) Propozo dy pyetje hulumtuese që mund t'i shpjegojnë dallimet në temperaturat minimale ndërmjet rajoneve A dhe B.

Hulumtim

Mblidh të dhëna për lartësinë e nxënësve të klasës sate, pikët në testin e fundit, kohën e vrapimit në minuta në 400 m e të ngjashme, për disa aktivitete shkollore. Paraqiti të dhënat me diagram "kërcell-gjethe" dhe përcakto:

a) rangun, b) medianën, c) modën, ç) mesataren aritmetike.

Shkruaj cilat janë përparësitë e përdorimit të diagramit "kërcell-gjethe" në vend të tabelës.

6. LLOGARITJET STATISTIKORE PËR TË DHËNA TË GRUPUARA

Aktivitet

Temperaturat e matura çdo ditë në mesditë gjatë dy javëve në janar janë

−2, −5, −6, −4, −1, 2, 4, 5, 5, 3, −2, −3, 0, 1, 2.

Gjej:

a) modën,

b) medianën,

c) mesataren aritmetike,

ç) rangun e të dhënave.

Skano kodin dhe shqyrto statistikat.

Nëse janë dhënë të dhëna të grupuara, nuk mund ta përcaktojmë saktësisht modën, medianën dhe mesataren aritmetike. Në vend të tyre mund të gjejmë klasën modale, klasën që përmban medianën dhe të bëjmë një vlerësim të mesatares.

Shembulli 1

Pikët e marra nga nxënësit e një klase në punimin me shkrim nga matematika janë paraqitur me tabelën vijuese të frekuencave me të dhëna të grupuara:

pikët	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100
numri i nxënësve	3	8	13	10	8

a) Përcakto klasën që përmban medianën.

b) Përcakto klasën modale.

c) Sa është numri mesatar i pikëve të marra në punimin me shkrim?

a) I mbledhim frekuencat për të fituar numrin e përgjithshëm të nxënësve $3 + 8 + 13 + 10 + 8 = 42$.
Gjithsej ka 42 vlera, prandaj mediana ndodhet ndërmjet vlerës së 21-të dhe të 22-të.
11 vlerat e para janë nga 0 deri në 49 pikë, ndërsa 13 vlerat vijuese janë nga 50 deri në 72 pikë.
Meqë vlera e 21-të dhe ajo e 22-të ndodhen brenda këtij intervali, klasa mediane është 50–72.

b) Klasa modale është klasa me frekuencën më të madhe, përkatësisht 50-72.

c) Klasa 0-26 përmban 3 vlera nga 0 deri në 26; vlera e mesit të saj është 13. Klasa 27-49 ka 8 vlera; vlera e mesit të saj është $(27 + 49) : 2 = 38$, e kështu me radhë.

pikë	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	gjithsej
vlera mesatare e klasës, m	13	38	61	80	94	
numri i nxënësve, frekuenca f	3	8	13	10	8	42
$m \cdot f$	39	304	793	800	752	2688

Vlerësimi i numrit të përgjithshëm të pikëve është 2688, ndërsa numri i nxënësve që i kanë marrë këto pikë është 42. Vlerësimi i numrit mesatar të pikëve për nxënës është 2688:42=64.
Në praktikë, gjatë hulumtimeve statistikore, për përpunimin e të dhënave më shpesh përdoren zgjidhje softuerike.
Në shembullin e dhënë mund të provosh të përdorësh funksione për llogaritjen automatike të disa vlerave në tabelë, si shuma (numri i përgjithshëm i nxënësve, figura 1), gjatë vlerësimit të mesatares.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		pikë	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	gjithsej
3		vlera mesatare e klasës, m	13	38	61	80	94	
4		numri i nxënësve, frekuenca f	3	8	13	10	8	=SUM(C4:G4)
5								

Figura 1

Shembulli 2

Lejla mblodhi pikët që mori secili prej bashkënxënësve të saj në një lojë. Të dhënat në pikë janë: 7, 9, 5, 6, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 5, 6.

a) Fut të dhënat në një program për llogaritje tabelare.
b) Përpilo diagram "kërcell-gjethe" duke përdorur funksionin e renditjes.
c) Llogarit automatikisht: numrin e përgjithshëm të nxënësve, numrin mesatar të pikëve, rezultatin më të lartë dhe rezultatin më të ulët.

a) Në figurën 2 është paraqitur një shembull i të dhënave të futura në programin për llogaritje tabelare

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Nxënësi	Pikët			
3		1	7			
4		2	9			
5		3	5			
6		4	6			
7		5	8			
8		6	7			
9		7	10			
10		8	6			
11		9	8			
12		10	9			
13		11	7			
14		12	5			
15		13	6			

Figura 2

b)

5	5 5
6	6 6 6
7	7 7 7
8	8 8
9	9 9
10	10

Çelësi: 5|5 - nxënësi ka 5 pikë

c) Funksione për përpunim automatik:

- Gjithsej nxënës: =COUNTA(C3:C15) → 13
- Mesatarja: =AVERAGE(C3:C15) → 7,23
- Rezultati më i lartë: =MAX(C3:C15) → 10
- Rezultati më i ulët: =MIN(C3:C15) → 5

Shembulli 3

Gjej rangun e lartësive të nxënësve të një shkolle, të dhëna në tabelën vijuese:

lartësia (cm)	150-154	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179
numri i nxënësve	5	18	42	14	13	8

Nëse të dhënat tashmë janë grupuar në intervale me tabela frekuencash, atëherë rangu është dallimi ndërmjet kufirit të sipërm të intervalit të fundit dhe kufirit të poshtëm të intervalit të parë.

Rangu është 179 - 150 = 29.

Detyra 1

Masat trupore të 100 njerëzve janë dhënë në tabelën vijuese.

masa trupore (kg)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 -79	80- 89	90 - 99	Gjithsej
frekuenca	6	8	22	31	12	11	5	5	100

a) Gjej klasën modale të këtyre masave. Çfarë tregon klasa modale?
b) Gjej klasën që përmban medianën.
c) Gjej rangun.
ç) Së pari bëj një vlerësim të masës mesatare. Shpjego strategjinë tënde të vlerësimit.
d) Kontrolloje vlerësimin tënd me llogaritje.

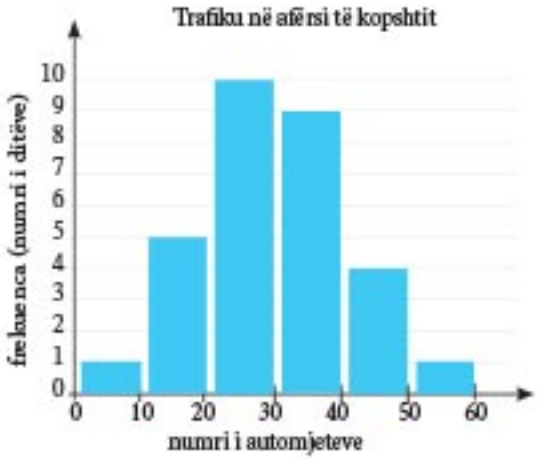
Detyra 2

Masa më e madhe e fituar gjatë 50 matjeve është 8,56 kg. Nëse rangu i matjeve është 1,23 kg, sa është masa më e vogël e matur?

Detyra 3

Drejtuesit e një kopshti për fëmijë ishin të shqetësuar për sigurinë e trafikut në afërsi të kopshtit. Ata hulumtuan sa automjete kalojnë para kopshtit nga ora 7:00 deri në 8:00 gjatë ditëve të punës për 6 javë. Të dhënat janë dhënë me diagramin shtyllor (vizatimi 1).

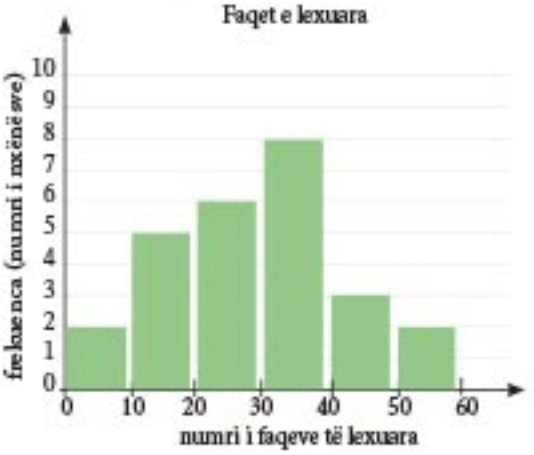
a) Cili interval i numrit të automjeteve paraqitet më shpesh në afërsi të kopshtit? Çfarë duhet të përcaktosh për t'iu përgjigjur kësaj pyetjeje?
b) Nga diagrami gjej klasën që përmban medianën dhe bëj një vlerësim të numrit mesatar të automjeteve.
c) Siguria cenohet nëse numri i automjeteve është më i madh se 35. A është i sigurt mjedisi rreth kopshtit? Cilat informacione i përdor për t'iu përgjigjur pyetjes?



Vizatimi 1

DETYRA PËR USHTRIME

1. Mësuesja e gjuhës maqedonase i pyeti nxënësit e saj sa faqe kishin lexuar deri atëherë nga lektyra. Rezultatet janë dhënë me diagramin shtyllor (vizatimi 2).
   a) Cila është klasa modale e të dhënave që ka mbledhur mësuesja?
   b) Sa nxënës kanë lexuar të paktën 40 faqe?
   c) Nxënësit duhej t'i lexonin për detyrë shtëpie të paktën 30 faqet e para. Sa nxënës nuk e kanë përfunduar detyrën e shtëpisë?
   ç) Gjej rangun e të dhënave.



Vizatimi 2

2. Një mini-market shënon sa blerës ka çdo ditë gjatë 50 ditëve. Rezultatet janë:

81	82	75	83	104	92	112	124	110	92
111	105	78	87	99	86	129	115	121	76
109	75	104	96	74	104	98	114	106	109
101	110	92	86	122	118	115	117	84	71
73	116	119	122	94	81	107	109	115	127

a) Përpilo një tabelë frekuencash për të dhëna të grupuara me klasat 70-79, 80-89, ..., 120-129. Nëse ke mundësi, përpiloje tabelën me ndihmën e një programi për llogaritje tabelare.
b) Gjej klasën modale.
c) Gjej klasën që përmban medianën.
ç) Shprehe me përqindje sa ditë marketi ka pasur të paktën 100 blerës.
d) Punonjësit e marketit e konsiderojnë ditën të suksesshme nëse ka të paktën 110 blerës. Sipas rezultateve të marra, a duhet marketi të bëjë ndryshime për ta përmirësuar punën?

3. Hulumto sa orë në ditë bashkëmoshatarët e tu e përdorin internetin: për mësim, lojëra, rrjete sociale ose shikim videosh. Mblidh të dhëna nga të paktën 30 bashkëmoshatarë dhe grupoji në një tabelë frekuencash duke përdorur një program përkatës për llogaritje tabelare. Pastaj përpiqu të përdorësh ndonjë funksion të programit për të vizatuar diagram (zgjidh llojin e diagramit që mendon se do të japë paraqitjen më të mirë).
a) Gjej klasën modale.
b) Gjej klasën që përmban medianën.
c) Bëj një vlerësim të mesatares.
Shkruaj një përfundim të shkurtër (3 deri në 4 fjali), në të cilin:
   - do të analizosh se si nxënësit e përdorin më shpesh internetin (sipas klasës modale)
   - do të vlerësosh përdorimin "tipik" (sipas klasës që përmban medianën)
   - do të komentosh nëse interneti përdoret në mënyrë të moderuar apo të tepruar (sipas vlerësimit të mesatares)

   Shkruaj rekomandime se si nxënësit mund ta organizojnë më me efikasitet kohën në internet. Mund të përfshish një propozim-plan të shkurtër

4. Lartësitë e 50 nxënësve në cm janë:

145	154	161	137	137	130	128	154	139	155
168	138	161	152	160	131	156	130	141	146
162	160	163	139	148	157	149	146	146	142
146	137	127	130	128	158	139	144	140	143
130	134	125	176	128	132	138	137	143	135

a) Rregulloji të dhënat në një tabelë me të dhëna të grupuara. Për gjatësinë e intervalit të grupit vendos vetë.
b) Gjej klasën modale.
c) Gjej klasën që përmban medianën.
ç) Gjej rangun.

Hulumtim

1. Hulumto në internet cilat janë programet më të përdorura për llogaritje statistikore dhe përpilo një tabelë T për dy prej tyre.
2. Mendo dhe përgjigju pse ndonjëherë është e përshtatshme të përdoret mesatarja aritmetike, ndërsa herë të tjera moda ose mediana, për të nxjerrë një përfundim për një popullacion. Si varet kjo nga rangu? Propozo shembuj ku një pamje të përgjithshme më të mirë e jep mediana, moda ose mesatarja aritmetike.

7. NGJARJA ELEMENTARE. NGJARJA E KUNDËRT. PROBABILITETI

Ngjarja elementare

Aktivitet

1. Shprehi të gjitha rezultatet e mundshme në eksperimentin "hedhja e një monedhe vetëm një herë".
2. Për eksperimentin "hedhja e një zari" përcakto cila nga ngjarjet është e sigurt dhe cila e pamundur:

   F: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën nga 1 deri në 6 pika,

   G: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 7 pika?

Kujto se eksperiment është një aktivitet që mund të vëzhgohet. Çdo eksperiment mund të përsëritet në të njëjtat kushte, ka disa rezultate të mundshme dhe nuk e dimë paraprakisht cili do të ndodhë. Për shembull, eksperiment quhet hedhja e një monedhe ose zari, hulumtimi nëse bimët rriten më shpejt në dritë apo në errësirë, e deri te provat serioze laboratorike.
Rezultatet e ndryshme të eksperimentit quhen ngjarje. Në eksperimentin e tërheqjes së një karte nga një pako letrash loje, ngjarje janë rezultatet: u tërhoq tetëshi spathi, u tërhoq dhjetëshja, u tërhoq një kartë e kuqe e të ngjashme.

Shembulli 1

Gjatë eksperimentit "hedhja e një zari", shqyrto ngjarjet e mëposhtme:



A: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër çift pikash;
B: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër pikash i pjesëtueshëm me 3;
E_1: në faqen e sipërme të zarit u shfaq 1 pikë;
E_2: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 2 pika;
E_3: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 3 pika;
E_4: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 4 pika;
E_5: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 5 pika;
E_6: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 6 pika.

Cila nga këto ngjarje mund të "zbërthehet" në ngjarje të tjera dhe cila nuk mundet?

Ngjarja A ndodh nëse ndodh njëra nga ngjarjet:

E_2: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 2 pika,

E_4: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 4 pika,

E_6: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 6 pika,

që do të thotë se kjo ngjarje mund të "zbërthehet" në ngjarje të tjera, të cilat më tej nuk mund të zbërthehen.

Ngjarja B ndodh nëse ndodh njëra nga ngjarjet:

E_3: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 3 pika,

E_6: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 6 pika,

që do të thotë se edhe ajo mund të zbërthehet në ngjarje të tjera, të cilat më tej nuk mund të zbërthehen. Ngjarjet që nuk mund të zbërthehen më tej në ngjarje të tjera i quajmë ngjarje elementare. Në këtë shembull këto janë ngjarjet E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6.

Ngjarje elementare lidhur me një eksperiment të dhënë është çdo ngjarje që nuk mund të zbërthehet në ngjarje të tjera.

Gjatë një realizimi të eksperimentit "hedhja e një zari" ndodh një dhe vetëm një ngjarje elementare. Kjo do të thotë se, kur ndodh njëra nga ngjarjet elementare, nuk mund të ndodhë asnjë nga ngjarjet e tjera elementare lidhur me atë eksperiment.

Detyra 1

Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin:
a) hedhja e një monedhe vetëm një herë;
b) tërheqja e një kartëze nga kutia në figurën 1a;
c) rrotullimi i rrotës në figurën 1b.

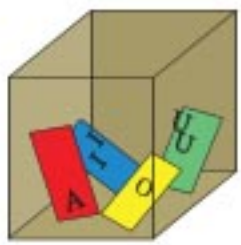


Figura 1a


Figura 1b

Shembulli 2

Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin "hedhja e dy monedhave vetëm një herë".

Le t'i shënojmë ngjarjet elementare gjatë hedhjes së një monedhe:

me S ngjarjen elementare "në faqen e sipërme të monedhës u shfaq stema";
me Sh ngjarjen elementare "në faqen e sipërme të monedhës u shfaq shkrimi".
Meqë eksperimenti përbëhet nga hedhja e dy monedhave së bashku, për një pasqyrë më të qartë ngjarjet elementare mund t'i paraqesim me tabelë:

Pra, të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin "hedhja e dy monedhave" mund t'i shkruajmë si: shkrim-shkrim = ShSh; stemë-shkrim = SSh; shkrim-stemë = ShS; stemë-stemë = SS.

Shembulli 3

Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare gjatë eksperimentit "rrotullimi i dy rrotave vetëm një herë", të dhëna në figurën 2.



Figura 2

Për t'i shkruar të gjitha ngjarjet elementare gjatë eksperimentit të rrotullimit të dy rrotave, së pari merremi vesh që ngjarjet elementare për secilën rrotë t'i shënojmë në këtë mënyrë:

Për rrotën me shkronja:
A: shigjeta ndaloi në fushën me shkronjën A;
B: shigjeta ndaloi në fushën me shkronjën B;
C: shigjeta ndaloi në fushën me shkronjën C

Për rrotën me numra:
1: shigjeta ndaloi në fushën me numrin 1;
2: shigjeta ndaloi në fushën me numrin 2;
3: shigjeta ndaloi në fushën me numrin 3;
4: shigjeta ndaloi në fushën me numrin 4.

Të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin "rrotullimi i dy rrotave" janë dhënë në tabelë:

		rrota me numra			
		1	2	3	4
rrota me shkronja	A	A1	A2	A3	A4
	B	B1	B2	B3	B4
	C	C1	C2	C3	C4

Për shembull, ngjarja B3 do të thotë se shigjeta e njërës rrotë ndaloi te shkronja B, ndërsa e rrotës tjetër te numri 3.

Skano kodin dhe shqyrto ngjarjet elementare të eksperimentit.

Detyra 2

Përpilo një tabelë të ngjarjeve elementare lidhur me eksperimentin:
a) hedhja e dy zareve,

b) hedhja e dy tetraedrave me faqe të shënuara me numrat 1, 2, 3 dhe 4 (figura 3).

Udhëzim: Gjatë hedhjes së tetraedrit, rezultati përcaktohet sipas numrit të shkruar në faqen mbi të cilën tetraedri qëndron në sipërfaqen ku e hedhim.

c) hedhja e një zari dhe e një tetraedri me faqe të shënuara me numrat 1, 2, 3 dhe 4.

Ngjarja e kundërt. Probabiliteti

Aktivitet

Në eksperimentin e hedhjes së një monedhe, cila është ngjarja e kundërt e ngjarjes A: doli shkrimi?

Ngjarja e kundërt e ngjarjes A është ngjarja që ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur nuk ndodh ngjarja A.

Ngjarjen e kundërt të ngjarjes A e shënojmë me $\overline{A}$.

Shembulli 4

Në eksperimentin "hedhja e një zari" përcakto:

a) Cila është ngjarja e kundërt e ngjarjes A: doli një numër pikash më i vogël ose i barabartë me 3?

b) A ndodh gjithmonë saktësisht njëra nga ngjarjet A ose $\overline{A}$?

a) Lidhur me eksperimentin "hedhja e një zari", ndodh njëra nga ngjarjet elementare:

E_1: në faqen e sipërme të zarit u shfaq 1 pikë;
E_2: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 2 pika;
E_3: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 3 pika;
E_4: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 4 pika;
E_5: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 5 pika;
E_6: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 6 pika.

Ngjarja A: doli një numër pikash më i vogël ose i barabartë me 3, ndodh nëse ndodh njëra nga ngjarjet elementare: E_1, E_2 dhe E_3.
Ngjarja e kundërt $\overline{A}$ ndodh nëse ndodh njëra nga ngjarjet elementare: E_4, E_5 ose E_6.
Prandaj, ngjarja e kundërt e ngjarjes A është ngjarja $\overline{A}$: doli një numër pikash më i madh se 3.

b) Në çdo hedhje të zarit ndodh saktësisht njëra nga ngjarjet elementare E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ose E_6, që do të thotë se gjithmonë ndodh saktësisht njëra nga ngjarjet A ose $\overline{A}$.

Detyra 3

Cila është ngjarja e kundërt e ngjarjes së dhënë në secilin eksperiment:

a) eksperimenti: hedhja e një zari; ngjarja A: u shfaq një numër pikash më i madh se 4;

b) eksperimenti: tërheqja e një topthi nga një kuti ku ka toptha të zinj, të bardhë dhe të kuq; ngjarja B: u tërhoq një topth i bardhë;

c) eksperimenti: hedhja e dy monedhave njëkohësisht; ngjarja C: në faqen e sipërme të të dyja monedhave u shfaq shkrimi;

ç) eksperimenti: hedhja e një zari dhe e një monedhe; ngjarja D: në zar u shfaq një numër pikash i pjesëtueshëm me 3 dhe në faqen e sipërme të monedhës u shfaq stema.

Skano kodin dhe shqyrto probabilitetet

Aktivitet

Për eksperimentin "hedhja e një monedhe vetëm një herë", llogarit probabilitetin e ngjarjes A: në faqen e sipërme të monedhës u shfaq shkrimi.

Me siguri ke llogaritur se probabiliteti i ngjarjes A është

$$P(A)=\frac{\text{numri i rezultateve të favorshme}}{\text{numri i të gjitha rezultateve}}=\frac{1}{2}$$

Shembulli 5

Nebojsha hedh një zar.

a) Sa është probabiliteti i ngjarjes A: në faqen e sipërme të zarit të shfaqen 6 pika?

b) Sa është probabiliteti i ngjarjes së kundërt të ngjarjes A?

a) Për probabilitetin e ngjarjes A kemi $P(A)=\frac{1}{6}$ (sepse nga të gjashta faqet e zarit vetëm njëra ka 6 pika).

b) Ngjarja e kundërt e ngjarjes A është $\overline{A}$: nuk u shfaq numri 6. Ngjarja $\overline{A}$ ndodh sa herë që në faqen e sipërme të zarit shfaqen 1, 2, 3, 4 ose 5 pika. Prandaj

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}=1-P(A).$$

Shembulli 6

Matea e hodhi zarin 30 herë dhe vëzhgoi sa herë do të shfaqeshin gjashtë pika në faqen e sipërme të zarit. Ajo numëroi se gjashtë pika u shfaqën 7 herë. Sa është probabiliteti eksperimental i ngjarjes "u shfaqën 6 pika" dhe sa është probabiliteti i ngjarjes së saj të kundërt "në faqen e sipërme të zarit nuk u shfaqën 6 pika"?

Probabiliteti eksperimental i ngjarjes "në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 6 pika", gjatë 30 hedhjeve, është $\frac{7}{30}$. Në 23 nga 30 hedhjet e eksperimentit të Mateas nuk u shfaqën 6 pika në faqen e sipërme të zarit. Prandaj, probabiliteti i ngjarjes së kundërt është

$$\frac{23}{30}=1-\frac{7}{30}.$$

Nëse probabiliteti i një ngjarjeje është P, atëherë probabiliteti i ngjarjes së saj të kundërt është $1 - P$.

Shembulli 7

Iskra ka në çantën e saj dy bileta për kinema dhe tri bileta për teatër. Ajo tërheq një biletë nga çanta pa shikuar.

a) Shkruaji ngjarjet e kundërta lidhur me tërheqjen e biletave nga çanta e Iskrës.

b) Sa është probabiliteti që ajo të tërheqë një biletë për teatër?

c) Sa është probabiliteti që ajo të tërheqë një biletë për kinema?

ç) Cila biletë ka më shumë gjasa të tërhiqet: bileta për kinema apo ajo për teatër?

d) Sa është probabiliteti që ajo të tërheqë nga çanta një biletë për një ndeshje sportive?

dh) Cila është ngjarja e kundërt e ngjarjes C: Iskra tërheq nga çanta një biletë për një ndeshje sportive?

a) Ngjarjet e mundshme janë:

A: Iskra tërheq një biletë për teatër, B: Iskra tërheq një biletë për kinema.

Ngjarjet e tyre të kundërta janë:

$\overline{A}$: Iskra tërheq një biletë për kinema, $\overline{B}$: Iskra tërheq një biletë për teatër.

b) A: Iskra tërheq një biletë për teatër, prandaj $P(A)=\frac{3}{5}$.

c) B: Iskra tërheq një biletë për kinema, prandaj $P(B)=\frac{2}{5}$.

ç) Ka më shumë gjasa të tërheqë një biletë për teatër, sepse $P(A)=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(B)$.

d) Ngjarja C: tërhiqet një biletë për një ndeshje sportive, është ngjarje e pamundur, prandaj $P(C)=0$.

dh) $\overline{C}$: nga çanta tërhiqet një biletë që nuk është për një ndeshje sportive, pra një biletë për teatër ose për kinema. Prandaj $P(\overline{C})=1$.

Detyra 4

Çdo shkronjë e alfabetit është shkruar në një kartëzë dhe kartëzat janë vendosur në një kuti. Nga kutia tërhiqet një kartëzë pa shikuar. Sa është probabiliteti që të zgjidhet:

a) një kartëzë me shkronjën N,

b) një kartëzë me njërën nga shkronjat e fjalës MATEMATIKA,

c) një kartëzë me zanore.

Cilat janë ngjarjet e kundërta të ngjarjeve në a), b) dhe c)? Sa janë probabilitetet e tyre?

DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin:
   a) rrotullimi i një rrote me tri fusha ku janë shkruar shkronjat A, B dhe C (Figura 4),
   b) tërheqja e një kartëze nga pesë kartëza ku janë shkruar numrat nga 1 deri në 5 (Figura 5).
   c) tërheqja e një kartëze nga kartëzat ku janë shkruar të gjithë shumëfishat e numrit 5 më të vegjël se 30.



Figura 4



Figura 5

2. Në figurën 6 janë dhënë një zar dhe një rrotë me nga një shkronjë të shënuar në secilën nga katër fushat me ngjyra.



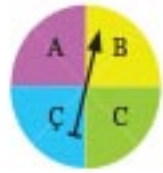


Figura 6

   a) Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare lidhur me eksperimentin e rrotullimit të rrotës dhe hedhjes së zarit.
   b) Sa është probabiliteti që në faqen e sipërme të zarit të shfaqet një numër çift pikash, ndërsa në rrotë shkronja C?

3. Pa shikuar, tërheq nga një karamele nga një kavanoz me karamele si në figurën 7.
   a) Shkruaje eksperimentin.
   b) Shkruaji të gjitha ngjarjet elementare.
   c) Sa është probabiliteti që të tërheqësh një karamele të verdhë?
   ç) A është ngjarja "u tërhoq një karamele e kaltër ose e gjelbër" ngjarja e kundërt e ngjarjes "u tërhoq një karamele e verdhë"? Shpjegoje përgjigjen.
   d) Përcakto probabilitetin e ngjarjes së kundërt të ngjarjes "u tërhoq një karamele e verdhë".
   dh) Cila është ngjarja e kundërt e ngjarjes "u tërhoq një karamele që nuk është e kuqe"?


Figura 7

4. Luani hedh një shigjetë pikadoje drejt shënjestrës, si në figurën 8.
   a) Shkruaje eksperimentin e Luanit dhe të gjitha ngjarjet elementare lidhur me të. Llogarit probabilitetin e ngjarjeve:
      A: u godit një fushë e kaltër;
      B: u godit një fushë që nuk është e kaltër;
      C: u godit një fushë e kuqe;
      D: u godit një fushë e verdhë ose e gjelbër.


Figura 8

b) Shkruaje ngjarjen e kundërt të secilës nga ngjarjet *A*, *B*, *C* dhe *D*.
Llogarit probabilitetet e tyre.

c) Shkruaje ngjarjen e kundërt të ngjarjes "Luani goditi një fushë të kuqe" dhe më pas llogarit probabilitetin e saj.

Hulumtim

Ndërto një aeroplan prej letre. Parashiko sa shpesh do të ulej ai në mënyrë të rregullt, duke përdorur për uljen e rregullt dhe të parregullt pozicionet e paraqitura në figurë.

1) ulje e rregullt



2) ulje e parregullt



Hidhe aeroplanin 50 herë dhe shëno sa herë u ul në mënyrë të rregullt. Pastaj vlerëso sa janë gjasat që aeroplani të ulet në mënyrë të parregullt. Krahasoji rezultatet e tua me ato të bashkënxënësve.

8. NGJARJET QË PËRJASHTOJNË NJËRA-TJETRËN. NGJARJET E VARURA DHE TË PAVARURA

Ngjarjet që përjashtojnë njëra-tjetrën

Aktivitet 1

Për eksperimentin "hedhja e një zari" shqyrto ngjarjet:

A: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër çift pikash

B: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën tri ose pesë pika.

A mund të ndodhin ngjarjet A dhe B së bashku, pra njëkohësisht?

Për dy ose më shumë ngjarje që nuk mund të ndodhin njëkohësisht themi se **përjashtojnë njëra-tjetrën**.

Shembulli 1

Jep dy shembuj të ngjarjeve që përjashtojnë njëra-tjetrën gjatë eksperimentit të tërheqjes së një kartëze nga një kuti me kartëza të numëruara nga 1 deri në 10.

Një shembull ngjarjesh që përjashtojnë njëra-tjetrën në eksperimentin e dhënë janë:

A: u tërhoq një kartëzë ku është shkruar një numër çift

B: u tërhoq një kartëzë ku është shkruar një numër tek.

Një shembull tjetër i dy ngjarjeve që përjashtojnë njëra-tjetrën në eksperimentin e dhënë është:

C: u tërhoq një kartëzë ku është shkruar një numër më i vogël se 5;

D: u tërhoq një kartëzë ku është shkruar një numër më i madh se 7;

E: u tërhoq një kartëzë ku është shkruar numri 6.

Detyra 1

Lidhur me eksperimentin "hedhja e një zari", llogarit probabilitetin e ngjarjeve të dhëna dhe përcakto nëse ato përjashtojnë njëra-tjetrën:

a) A: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër çift pikash;
B: në faqen e sipërme të zarit u shfaqën 3 pika.

b) C: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër pikash i pjesëtueshëm me 3;
D: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër i thjeshtë pikash.

c) E: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër pikash i pjesëtueshëm me 2;
F: në faqen e sipërme të zarit u shfaq një numër tek pikash.

Shembulli 2

Nga një kuti që përmban 5 toptha të kuq, 2 toptha të verdhë dhe 4 toptha të bardhë tërhiqet një topth.

a) A përjashtojnë njëra-tjetrën ngjarjet:
A_1: u tërhoq një topth i kuq;
A_2: u tërhoq një topth i bardhë?

b) A ndodh ngjarja A: u tërhoq një topth i kuq ose i bardhë, sa herë që ndodh njëra nga ngjarjet A_1 ose A_2?

c) Llogarit probabilitetin e ngjarjes A.

a) Ngjarjet A_1 dhe A_2 përjashtojnë njëra-tjetrën, sepse nuk mund të ndodhin njëkohësisht. Në të njëjtën kohë nuk mund të tërhiqet edhe topth i kuq, edhe topth i bardhë.

b) Po. Ngjarja A ndodh sa herë që ndodh A_1 ose A_2.

c) Probabiliteti i ngjarjes A është shuma e probabiliteteve të ngjarjeve A_1 dhe A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}.$$

Shembulli 3

Hidhen njëkohësisht një zar i gjelbër dhe një zar i kuq dhe mblidhen numrat e pikave që shfaqen në faqet e sipërme. Gjej probabilitetin e ngjarjes

A: shuma e pikave që u shfaqën në faqet e sipërme të të dy zareve është më e vogël se 4.

Shqyrto tabelën lidhur me eksperimentin "hedhja njëkohësisht e zarit të kuq dhe të gjelbër."

		zari i gjelbër					
		1	2	3	4	5	6
zari i kuq	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Ngjarja A ndodh sa herë që ndodh njëra nga ngjarjet:

A_1: në zarin e gjelbër u shfaq 1 pikë dhe në zarin e kuq u shfaq 1 pikë;

A_2: në zarin e gjelbër u shfaq 1 pikë dhe në zarin e kuq u shfaqën 2 pika;

A_3: në zarin e gjelbër u shfaqën 2 pika dhe në zarin e kuq u shfaq 1 pikë.

Ngjarjet A_1, A_2 dhe A_3 përjashtojnë njëra-tjetrën. Probabiliteti i ngjarjes A është shuma e probabiliteteve të A_1, A_2 dhe A_3:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Detyra 2

Nga një sirtar që përmban 4 çorapë të kuq, 3 çorapë të kaltër dhe 6 çorapë të bardhë, nxirret pa shikuar një çorap.

a) A e përjashtojnë njëra-tjetrën ngjarjet:

A_1: u tërhoq një çorap i kuq

A_2: u tërhoq një çorap i kaltër?

b) A ndodh ngjarja A: u tërhoq një çorap i kuq ose i kaltër, sa herë që ndodh njëra prej ngjarjeve A_1 ose A_2?

c) Llogarit probabilitetin e ngjarjeve A_1, A_2 dhe A.

ç) A është probabiliteti i ngjarjes A i barabartë me shumën e probabiliteteve të ngjarjeve A_1 dhe A_2?

Detyra 3

Rrotullohen njëkohësisht dy rrota si në figurën 1.
Gjej probabilitetin e ngjarjes
A: shuma e numrave ku ndaluan shigjetat e të dyja rrotave është më e vogël se 5.



Rrota 1 Rrota 2

Figura 1

Ngjarjet e pavarura dhe të varura

Aktivitet 2

Lidhur me eksperimentin e hedhjes së dy monedhave, analizo si ndikon shfaqja e stemës në njërën monedhë në shfaqjen e stemës ose të shkrimit në monedhën tjetër.

Dy ngjarje janë **të pavarura** nëse ndodhja e njërës ngjarje nuk ndikon në ndodhjen e ngjarjes tjetër.

Shembulli 4

Ana pjek ëmbëlsira. Në të njëjtën kohë, vëllai i saj Marko luan futboll në oborr.
Shpjego pse janë të pavarura ngjarjet:
A: Ana arrin t'i pjekë ëmbëlsirat;
B: Marko shënon gol gjatë lojës.

Këto dy ngjarje janë të pavarura, sepse suksesi i Anës në pjekjen e ëmbëlsirave nuk ndikon në atë nëse Marko do të shënojë gol, dhe as rezultati i lojës së Markos nuk ndikon në rezultatin e pjekjes.

Shembulli 5

Toni dhe Sara luajnë një lojë me dy zare. Toni hedh zarin e kuq, ndërsa Sara hedh zarin e kaltër. Përcakto nëse janë të pavarura ngjarjet:
A: në zarin e kuq shfaqet një numër pikash më i madh se 4;
B: në zarin e kaltër shfaqet një numër çift pikash.
Shpjegoje përgjigjen.

Këto dy ngjarje janë të pavarura, sepse rezultati i zarit të kuq nuk ndikon në rezultatin e zarit të kaltër.

Detyra 4

Petri blen qumësht në dyqan. Në të njëjtën kohë, motra e tij Elena shikon një film në shtëpi. A janë të pavarura ngjarjet:
A: Petri të blejë qumësht; B: Elena ta shikojë filmin deri në fund?
Arsyetoje përgjigjen.

Detyra 5

Në një kuti ka 5 toptha të kuq dhe 6 toptha të gjelbër. Merjemi tërheq një topth, e kthen në kuti dhe pastaj tërheq përsëri një topth.
Shkruaj dy ngjarje të pavarura dhe shpjego pse janë të pavarura.

Dy ngjarje që nuk janë të pavarura quhen **ngjarje të varura**.
Sipas përkufizimit të ngjarjeve të pavarura, dy ngjarje janë të varura nëse ndodhja e njërës ngjarje ndikon në ndodhjen e ngjarjes tjetër.

Shembulli 6

Në kuzhinë ka një enë me 5 karamele, prej të cilave 3 janë me fruta dhe 2 me çokollatë. Ana tërheq një karamele dhe e ha, pastaj menjëherë tërheq edhe një tjetër nga e njëjta enë. A janë të pavarura ngjarjet:

A: Ana tërheq një karamele me fruta në zgjedhjen e parë;

B: Ana tërheq një karamele me fruta në zgjedhjen e dytë, pasi e ka ngrënë të parën?

Shpjegoje përgjigjen.

Këto dy ngjarje janë të varura, sepse ndodhja e ngjarjes A e ndryshon drejtpërdrejt përbërjen e karameleve në enë dhe ndikon në ndodhjen e ngjarjes B.

Nëse Ana së pari tërheq një karamele me fruta, pra nëse ndodh ngjarja A, mbeten më pak karamele me fruta dhe gjasa që herën e dytë të tërheqë një karamele të tillë zvogëlohet. Nëse së pari tërheq një karamele me çokollatë, pra nëse ngjarja A nuk ndodh, numri i karameleve në enë përsëri ndryshon, por në një mënyrë tjetër. Kështu ndryshon edhe gjasa e ndodhjes së ngjarjes B. Prandaj ngjarja B varet nga ngjarja A, domethënë ngjarjet janë të varura.

Detyra 6

Në një kuti ka 4 lapsa të kuq dhe 3 lapsa të kaltër. Mësuesja merr një laps, nuk e kthen në kuti dhe pastaj merr edhe një tjetër.

Shkruaj dy ngjarje të varura dhe shpjego pse janë të varura.

Detyra 7

Gjatë hedhjes së njëkohshme të dy zareve ndodhin ngjarjet:

A: shuma e pikave që shfaqen në faqet e sipërme të zareve është numër çift;

B: në faqen e sipërme të secilit prej dy zareve shfaqet i njëjti numër pikash.

Shpjego çfarë marrëdhënieje kanë ngjarjet A dhe B.

Shembulli 7

Në eksperimentin "hedhja njëkohësisht e një monedhe dhe e një zari", gjej probabilitetin e ngjarjes:

A: në monedhë shfaqet shkrimi dhe në zar shfaqen 6 pika?

Ngjarjet

B: në monedhë shfaqet shkrimi; C: në zar shfaqen 6 pika;

janë të pavarura, sepse ndodhja e njërës nuk ndikon në ndodhjen e ngjarjes tjetër. Ngjarja A ndodh kur ngjarjet B dhe C ndodhin njëkohësisht.

Probabiliteti i ngjarjes A është

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Detyra 8

Jasmina dhe Leontini gjuajnë me top drejt portës nga një largësi prej 3 m. Nga përvoja e mëparshme, Jasmina shënon 2 herë në çdo 3 gjuajtje, ndërsa Leontini shënon 4 herë në 7 gjuajtje. Nëse të dy gjuajnë njëkohësisht drejt portës, gjej probabilitetin që:

a) të dy të shënojnë; b) të dy të humbasin;
c) Jasmina të shënojë, ndërsa Leontini të humbasë.

Shembulli 8

Në një kuti ka 4 kopsa të kaltra dhe 3 kopsa të verdha me të njëjtën formë dhe madhësi (figura 2). Zgjidhen rastësisht dy kopsa, pa shikuar dhe pa i kthyer në kuti. Llogarit probabilitetin e ngjarjeve.

a) A: të dyja kopsat e zgjedhura janë të verdha;
b) B: kopsa e parë e zgjedhur është e verdhë, ndërsa e dyta e kaltër.



Figura 2

a) Ngjarjet

A_1: kopsa e parë e zgjedhur është e verdhë, dhe A_2: kopsa e dytë e zgjedhur është e verdhë, janë ngjarje të varura, sepse kopsat nuk kthehen në kuti. Ndodhja e ngjarjes A_1 e ndryshon përbërjen e kutisë në gjithsej 6 kopsa, prej të cilave 2 janë të verdha. Prandaj ndryshon edhe probabiliteti i ngjarjes A_2. Probabilitetet e ngjarjeve A_1 dhe A_2 janë:

$$P(A_1)=\frac{3}{7} \text{ dhe } P(A_2)=\frac{2}{6}.$$

Ngjarja A ndodh kur ngjarjet A_1 dhe A_2 ndodhin njëkohësisht. Probabiliteti i ngjarjes A është

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}.$$

b) Ngjarjet

B_1: kopsa e parë e zgjedhur është e verdhë; B_2: kopsa e dytë e zgjedhur është e kaltër;

janë të varura, sepse ndodhja e ngjarjes B_1 e ndryshon përbërjen e kutisë në gjithsej 6 kopsa. Prandaj ndryshon edhe probabiliteti i ngjarjes B_2. Probabilitetet e ngjarjeve B_1 dhe B_2 janë :

$$P(B_1)=\frac{3}{7} \text{ dhe } P(B_2)=\frac{4}{6}.$$

Ngjarja B ndodh kur ngjarjet B_1 dhe B_2 ndodhin njëkohësisht. Probabiliteti i ngjarjes B është:

$$P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

Detyra 9

Në një kuti ka 5 karamele xhelatinoze të gjelbra dhe 3 të verdha. Dy karamele zgjidhen njëra pas tjetrës pa i kthyer në kuti. Llogarit probabilitetin që:
a) të dyja karamelet e zgjedhura të jenë të gjelbra;
b) së pari të zgjidhet një karamele e gjelbër dhe pastaj një e verdhë;
c) së pari të zgjidhet një karamele e verdhë dhe pastaj një e gjelbër;
ç) të dyja karamelet e zgjedhura të jenë të verdha.

DETYRA PËR USHTRIME

1. a) Në eksperimentin e hedhjes së një zari përcakto cilat nga ngjarjet janë të pavarura dhe cilat të varura:
   A: numri i pikave në faqen e sipërme të zarit është i pjesëtueshëm me 2;
   B: numri i pikave në faqen e sipërme të zarit është i pjesëtueshëm me 3;
   C: numri i pikave në faqen e sipërme të zarit është i pjesëtueshëm edhe me 2, edhe me 3;
   D: numri i pikave në faqen e sipërme të zarit është numër tek.
   b) Cilat nga ngjarjet e dhëna në a) përjashtojnë njëra-tjetrën?

2. Maria dhe Ivani luajnë një lojë me një zar dhe një monedhë. Maria hedh zarin dhe shënon numrin që bie. Nëse në zar bie një numër çift, Ivani hedh monedhën dhe shikon nëse bie stema. A janë të varura ngjarjet:
   A: në zar bie një numër çift;
   B: gjatë hedhjes së monedhës bie stema.
   Shpjego përgjigjen.

3. Seksioni ekologjik i shkollës ka 3 djem dhe 5 vajza. Zgjidhen rastësisht dy anëtarë për patrullën ekologjike të mëngjesit. Lidhur me ngjarjet A dhe B, përgjigju pyetjeve:
   A: anëtari i parë i zgjedhur është vajzë;
   B: anëtari i dytë i zgjedhur është vajzë.
   a) A varet rezultati i zgjedhjes së dytë nga personi që u zgjodh i pari?
   b) A janë këto dy ngjarje të varura apo të pavarura? Shpjego.

4. Në një kapelë janë vendosur kartëza me numrat nga 1 deri në 20. Janko tërheq dy kartëza njëra pas tjetrës pa i kthyer në kapelë.
   A: numri i parë i tërhequr është çift;
   B: numri i dytë i tërhequr është tek;
   C: numri i parë i tërhequr është i thjeshtë;
   D: numri i dytë i tërhequr është i thjeshtë.
   a) A janë ngjarjet A dhe B të varura apo të pavarura? Shpjego.
   b) A janë ngjarjet C dhe D të varura apo të pavarura? Shpjego.

5. Në një kavanoz ka 4 xhetona vjollcë, 3 xhetona të kaltër dhe 1 xheton të artë. Tërhiqen tri xhetona njëri pas tjetrit pa i kthyer. Lidhur me ngjarjet e dhëna, përgjigju:
   a) A: xhetoni i parë i tërhequr është vjollcë
   B: xhetoni i dytë i tërhequr është vjollcë

C: xhetoni i tretë i tërhequr është vjollcë
- A varet rezultati i zgjedhjes së dytë dhe të tretë nga zgjedhja e parë?
- A janë këto ngjarje të varura apo të pavarura? Shpjego.

b) D: xhetoni i parë është vjollcë, i dyti është vjollcë dhe i treti është i artë.
- A varet rezultati i çdo zgjedhjeje pasuese nga zgjedhjet e mëparshme?
- Shpjego pse këto ngjarje janë të varura

c) E: asnjë nga xhetonat e tërhequr nuk është i kaltër
- A varet kjo nga renditja e tërheqjes?

6. Viki dhe Jakovi duhet t'i nënshtrohen provimit për patentë shoferi. Viki ka 70% gjasa ta kalojë provimin, ndërsa Jakovi ka 60% gjasa ta kalojë. Gjej probabilitetin që:
a) të dy ta kalojnë provimin;
b) të paktën njëri prej tyre ta kalojë provimin.
Udhëzim: Shndërroji përqindjet në thyesa.

7. Tina dhe Semiri luajnë me shigjeta. Ata hedhin shigjeta drejt së njëjtës tabelë. Përgjigju pyetjeve lidhur me ngjarjet A dhe B:
A: Tina ta godasë qendrën;
B: Semiri ta godasë qendrën,
a) A janë ngjarjet A dhe B të pavarura apo të varura? Shpjego pse.
b) A janë ngjarjet "Tina humbet shënjestrën" dhe "Semiri humbet shënjestrën" të pavarura apo të varura? Shpjego.
c) Probabiliteti që Tina ta godasë qendrën gjatë lojës me shigjeta është $\frac{1}{3}$, ndërsa probabiliteti që Semiri ta godasë qendrën është $\frac{2}{5}$. Nëse të dy hedhin njëkohësisht drejt tabelës, gjej probabilitetin që:
i) të dy ta godasin qendrën;
ii) të dy ta humbasin qendrën;
iii) Tina ta godasë qendrën, ndërsa Semiri të humbasë.

8. Në një klasë nxënësit duhet të zgjedhin një projekt për manifestimin shkollor. Zgjedhja bëhet ndërmjet tri mundësive:

lloji i projektit	numri i nxënësve që e zgjodhën
projekt sportiv	8
projekt artistik	6
projekt shkencor	6

Çdo nxënës zgjedh vetëm një projekt dhe nuk mund të zgjedhë dy njëkohësisht.
a) Sa nxënës ka në klasë?
b) A përjashtojnë njëra-tjetrën ngjarjet "nxënësi zgjodhi projekt sportiv" dhe "nxënësi zgjodhi projekt artistik"? Shpjego.
c) Sa është probabiliteti që një nxënës i zgjedhur rastësisht të ketë zgjedhur:
i) projekt sportiv; ii) projekt artistik; iii) projekt shkencor;
ç) Sa është probabiliteti që nxënësi të mos ketë zgjedhur projekt shkencor?

9. Detyrë projektuese

Gjatë një periudhe prej 7 ditësh përgatit një projekt të vogël ku do ta analizosh parashikimin e motit dhe do të llogaritësh probabilitete për ngjarje të ndryshme. Në fund duhet të përgatitësh një raport sipas fazave të realizimit të projektit:

1) Bëj një hulumtim në internet dhe në raportin e projektit shpjego shkurt si e përdorin meteorologët probabilitetin gjatë parashikimit profesional: modele kompjuterike, disa skenarë dhe përqindje probabiliteti.
2) Mblidh të dhëna për 5-7 ditë të njëpasnjëshme, për të cilat do ta marrësh parashikimin e motit: probabilitetin e shiut, erën, temperaturat dhe përshkrimin e motit. Shënoji të dhënat në tabelë.
3) Llogarit probabilitetin e secilës ngjarje:
   - të jetë ditë me diell;
   - të fryjë erë;
   - të ketë shi dhe erë;
   - të jetë ditë e përshtatshme për shëtitje.
4) Për secilën ditë të parashikimit tënd llogarit probabilitetin e ngjarjes:
   A: do të mbaj çadër, nëse ka mundësi për shi.
   Përkufizo ngjarjen e kundërt B të ngjarjes A dhe llogarit probabilitetin e saj.
   Kontrollo nëse vlen $P(A) + P(B) = 1$?
5) Për temperaturat e ditëve të zgjedhura llogarit mesataren, medianën, modën dhe rangun dhe paraqiti me një diagram të përshtatshëm.
6) Nxirr një përfundim të shkurtër duke u mbështetur në pyetjet:
   - Si i llogaritin profesionistët probabilitetet për motin?
   - Sa të sakta janë parashikimet? Pse ndonjëherë gabojnë?
   - Si ndikojnë probabilitetet e llogaritura në vendimet e përditshme, si zgjedhja e veshjes, udhëtimi dhe organizimi i aktiviteteve?
   - Si mund të fitohet një parashikim më i mirë, me më shumë modele, matje reale ose një seri më të gjatë kohore të të dhënave?

Hulumtim

Në shkollë organizohet një lojë e vogël: hidhet një zar dhe pastaj tërhiqet një topth nga një qese ku ka 2 toptha të kaltër, 2 të gjelbër dhe 1 të kuq.

a) Shpjego pse janë të pavarura ngjarjet:
   A: në zar të fitohet një numër çift B: nga qesja të tërhiqet një topth i kaltër.

b) Shpjego pse janë të pavarura ngjarjet:
   C: në zar të fitohet një numër më i madh se 4 D: të tërhiqet një topth i kuq.

Nxënësit tërheqin dy toptha njëri pas tjetrit pa i kthyer.

c) Shpjego pse janë të varura ngjarjet:
   E: topthi i parë i tërhequr është i gjelbër F: topthi i dytë i tërhequr është i gjelbër.

ç) Nëse së pari tërhiqet topthi i kuq, shqyrto ngjarjen:
   G: topthi i dytë i tërhequr është i kaltër.

Pse rezultati i tërheqjes së dytë varet nga e para?

Pjesa praktike - Eksperimenti:
Kryeni një eksperiment me 20 prova: hidhni zarin dhe tërhiqni topthat sipas rregullave. Shënojini rezultatet në tabelë. A janë rezultatet e vëzhguara të ngjashme me përfundimet e mëparshme për ngjarjet e pavarura dhe të varura?
Pyetje për reflektim:

1) Kur është më e lehtë të arsyetosh për ngjarjet: kur janë të pavarura apo kur janë të varura?
2) Nëse numri i topthave në qese ndryshon, për shembull rritet në 10, si do të ndikojë kjo në probabilitetet e ngjarjeve?

DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Përcakto nëse është e përshtatshme të përdoret regjistrimi i plotë apo një mostër e popullacionit gjatë hulumtimit të:
   a) cilësisë së prodhimit në një fabrikë të pajisjeve elektronike;
   b) numrit të këpucëve të popullacionit të fëmijëve në shtet;
   c) numrit të këpucëve të bashkënxënësve;
   ç) çmimit të produkteve në një sanduiçeri.
2. Në një shkollë me 900 nxënës janë zgjedhur rastësisht 50 nxënës për t'iu përgjigjur një pyetjeje lidhur me ushqimet e lehta në shkollë. Përcakto numrin e njësive të popullacionit dhe të mostrës. A është mostra e zgjedhur në këtë mënyrë përfaqësuese për popullacionin?
3. Një agjenci sondazhesh është angazhuar të hulumtojë synimet e votimit të banorëve të një rajoni për zgjedhjet e ardhshme. Nga të dhënat e mbledhura duhet të parashikohet rezultati zgjedhor në atë rajon. Shpjego pse në secilën nga situatat e mëposhtme fitohet një mostër e papërshtatshme:
   a) anketohen njerëz të zgjedhur rastësisht në qendrën e madhe tregtare lokale, ndërmjet orës 13:00 dhe 15:00 të një dite pune,
   b) anketohen të gjithë anëtarët e klubit lokal të shahut,
   c) anketohen njerëz të zgjedhur rastësisht në stacionin lokal hekurudhor, nga ora 7:00 deri në orën 9:00,
   ç) bëhet anketim derë më derë dhe anketohet çdo votues në një rrugë të caktuar.
4. Përcakto nëse të dhënat e mbledhura do të jenë diskrete gjatë hulumtimeve:
   a) sipërfaqja e çdo parku në qytet;
   b) gjendja martesore e njerëzve në një lagje;
   c) numri i shkrepëseve në një kuti;
   ç) pikët e arritura në kampionatin shtetëror të volejbollit;
   d) masa e derrkucëve në fermat e shtetit tonë.

   Shpjego nëse është më mirë të përdoren të dhëna parësore apo dytësore në secilin hulumtim të dhënë.

5. Dimitari ka përpiluar një instrument për mbledhjen e të dhënave që të hulumtojë sa shpesh njerëzit shkojnë në teatër. Instrumenti duket kështu:

Ai ua dha pyetësorin disa njerëzve që i takoi duke kaluar para teatrit.

Shkruaj disa parregullsi të hulumtimit të Dimitrit dhe propozo një mënyrë të re, të përmirësuar, për mbledhjen e të dhënave.

PYETËSOR

Vizitat në teatër (me gabime të qëllimshme)

Ky anketim ka për qëllim të shqyrtojë sa shpesh njerëzit shkojnë në teatër.

1. Sa shpesh shkoni në teatër?
   a) asnjëherë
   b) shumë rrallë, 1-10 herë në vit
   c) ndonjëherë, më shumë se 2 herë në vit
   ç) gjithmonë
2. Çfarë lloj shfaqjesh shikoni më shpesh?
   a) komedi
   b) dramë
   c) nuk shikoj shfaqje
3. Pse shkoni në teatër?
   a) për argëtim
   b) për edukim
   c) së bashku me miqtë
   ç) nuk e di
4. Kur keni qenë për herë të fundit në teatër?
   a) para një viti
   b) para 5 vjetësh
   c) para disa muajsh
   ç) asnjëherë

6. Drejtoria e spitalit dëshiron ta dijë moshën e pacientëve të hospitalizuar për shkak të sëmundjeve kardiovaskulare gjatë muajit tetor.
Janë mbledhur të dhënat:

32	58	72	45	89	68	63	47	54	51
84	17	58	64	67	71	75	69	63	82
76	68	29	48	89	66	24	59	70	74
80	63	4	32	46					

a) Përpilo një tabelë frekuencash për të dhëna të grupuara me klasat 0-15, 16-31, 32-47, ...

b) Gjej klasën modale.

c) Gjej klasën që përmban medianën.

ç) Shpreh me përqindje sa është përfaqësimi i pacientëve të klasës modale.

d) A jep një pamje më të mirë të përgjithshme të strukturës së moshës klasa që përmban medianën apo klasa modale? Pse?

dh) Vlerëso moshën mesatare të pacientëve.

7. Një agjenci marketingu shënon numrin e thirrjeve telefonike çdo ditë gjatë 30 ditëve.

18	32	25	37	24	28	35	42	31	16
28	38	30	41	27	31	46	17	35	26
32	14	44	37	48	23	19	33	15	36

Paraqiti të dhënat me një tabelë frekuencash për të dhëna të grupuara në 4 grupe. Gjej klasën modale. Sa është përqindja e ditëve kur agjencia ka pranuar të paktën 30 thirrje?

8. Dyzet futbollistë në një kamp stërvitor u pyetën se në cilin pozicion luajnë. Rezultatet janë dhënë më poshtë, ku N do të thotë sulmues, S lojtar i mesfushës, O mbrojtës dhe G portier:

N	O	S	S	N	S	O	N	G	S
S	O	N	O	S	O	N	S	O	G
N	G	S	O	N	O	S	O	N	S
O	G	S	N	S	O	G	S	S	N

a) Paraqiti të dhënat në një tabelë frekuencash. A janë të dhënat në tabelë të grupuara dhe pse?
b) Cili është tipari dhe cili është popullacioni në hulumtim?
c) Gjej modën e të dhënave. Shpjego çfarë do të thotë ajo.
ç) Sa për qind e lojtarëve ishin mbrojtës ose portierë?
d) Paraqiti të dhënat me diagram sektorial.

9. Përdor diagramin sektorial në figurën 1 për t'iu përgjigjur pyetjeve lidhur me përfaqësimin e zinxhirëve të supermarketeve në shtet.
a) Cili zinxhir supermarketesh ka më shumë dyqane?
b) Nëse numri i supermarketeve është 12582, gjej sa prej tyre janë:
1) "Më lirë"; 2) "Gjithçka në një vend"; 3) "Markete të pavarura".



Vizatimi 1

10. Nga 60 pasagjerë në një autobus, 12 ishin fëmijë të moshës parashkollore, 11 nxënës, 22 të rritur dhe 15 pensionistë. Në tren udhëtonin 90 pasagjerë: 23 fëmijë të moshës parashkollore, 12 nxënës, 40 të rritur dhe 15 pensionistë. Vizato një diagram sektorial për secilin mjet transporti dhe krahaso strukturat e moshës së pasagjerëve. Përgjigju pyetjeve:
a) Sa nga pasagjerët e autobusit janë të rritur ose pensionistë?
b) Sa për qind e pasagjerëve të trenit janë fëmijë ose nxënës?
c) Në tren dhe në autobus ka të njëjtin numër pensionistësh. Pse në diagramin sektorial këndet qendrore që u përgjigjen këtyre dy sektorëve janë të ndryshme?

11. Teknologu e mbikëqyr procesin e prodhimit të vajit ushqimor në një fabrikë (figura 2). Diagrami vijor paraqet vëllimin e vajit të grumbulluar në një enë përkatëse gjatë një dite.



Vizatimi 2

Tri herë gjatë ditës nga ena është nxjerrë vaj për kontrollimin e cilësisë.

a) Sa vaj ishte prodhuar deri në orën 7?

b) Sa vaj u nxor çdo herë për kontrollin e cilësisë?

c) Sa është sasia e përgjithshme e prodhuar gjatë ditës?

12. Për një mostër nxënësish të klasës së tetë janë dhënë masat e tyre me diagramin "kërcell-gjethe":

3	2 4 8
4	0 4 4 7 9 9 9
5	0 0 1 2 2 3 3 5 6 8 8
6	0 1 2 4 4 5 7 9
7	0 2 6
8	4
9	1

Çelësi: 9|1 paraqet 91 kg

Gjej: a) masën më të madhe, b) masën më të vogël,
c) medianën, ç) rangun e masave,
d) numrin e nxënësve që kanë masë të paktën 70 kilogramë,
dh) përqindjen e nxënësve që kanë masë më të vogël se 48 kilogramë.

13. Për të dhënat e dhëna me diagramin "kërcell-gjethe" përcakto modën, medianën dhe rangun.

3	8 9
4	2 2 5
5	0 1 1 7 9
6	1 3 4
7	0

Çelësi: 3|8 paraqet 3,8.

14. Gjatë 40 ditëve të periudhës së dimrit, është regjistruar numri i nxënësve që munguan në një shkollë:

21	16	23	24	18	29	35	37	41	38
25	23	17	26	34	33	10	27	49	52
24	20	25	23	19	22	12	16	17	15
33	43	14	28	41	14	29	31	32	34

a) Përpilo një diagram "kërcell-gjethe" për të dhënat.

b) Gjej numrin më të madh dhe më të vogël të nxënësve që munguan gjatë periudhës së dimrit.

c) Sa është përqindja e ditëve kur munguan të paktën 40 nxënës?

ç) Prezenca quhet "e mirë" nëse gjatë periudhës së dimrit mungojnë më pak se 25 nxënës. Sa është përqindja e ditëve kur prezenca e nxënësve ishte e mirë?

15. Supozojmë se ngjarja A, që nesër do të bjerë shi, ka probabilitetin $P(A) = 0{,}03$.

a) Përcakto ngjarjen e kundërt B të ngjarjes A. b) Gjej P (B).

16. Shkruaji ngjarjet elementare gjatë eksperimentit:
a) zgjedhja rastësore e një muaji të vitit;
b) rrotullimi i një rrote me tri fusha të shënuara me shkronjat *A*, *B* dhe *C*;
c) zgjedhja e një numri dyshifror më të vogël se 20;
ç) zgjedhja e një numri çift nga bashkësia e shumëfishave të numrit 3 më të vegjël se 30;
d) zgjedhja e një lloji produkti furre në një furrë ku shiten kifle me susam, byrek dhe gjevrek.

17. Maja dhe Kaja zgjedhin një meny të plotë në një restorant. Menyja ofron: 3 lloje gjellësh të gatuara, 4 lloje pijesh dhe 2 lloje ëmbëlsirash. Shkruaji të gjitha mundësitë e zgjedhjes që kanë Maja dhe Kaja.

18. Janë dhënë dy rrota si në figurën 3. Iliri dhe Ivani luajnë një lojë duke i rrotulluar njëkohësisht dhe duke shënuar se te cila shkronjë ndaloi shigjeta e secilit. Pas 10 rrotullimeve përpiqen të formojnë një fjalë nga shkronjat e fituara. Cilat janë ngjarjet elementare që mund të ndodhin gjatë një rrotullimi të njëkohshëm të të dyja rrotave?



Vizatimi 3

19. Erblina i ka grupuar numrat nga 2 deri në 10 në dy grupe: numra të thjeshtë dhe numra të përbërë. Ajo zgjedh rastësisht nga një numër prej secilit grup. Përcakto të gjitha ngjarjet elementare të eksperimentit të Erblinës dhe gjej probabilitetin që ajo të zgjedhë:
a) 3 dhe 8; b) dy numra tek;
c) dy numra shuma e të cilëve është 13; ç) numra të njëpasnjëshëm.

20. Në figurën 4 është dhënë një komplet topash bilardoje. Nëse një top zgjidhet rastësisht, sa është probabiliteti që:
a) të zgjidhet topi i bardhë; b) të zgjidhet një top i gjelbër;
c) të zgjidhet një numër më i vogël se 8?



Vizatimi 4

21. Në kinemanë e qytetit u shitën 20 bileta për të rritur, 16 bileta me zbritje dhe 9 bileta për fëmijë. Nga publiku zgjidhet rastësisht një person. Gjej probabilitetin që ai ose ajo të ketë:
a) biletë me zbritje; b) biletë për të rritur; c) biletë që nuk është për fëmijë.

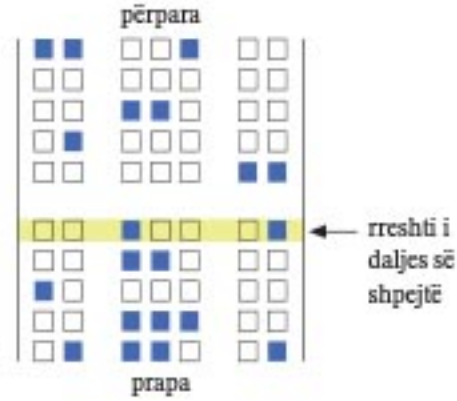
22. Në figurën 5 është dhënë një mozaik për fëmijë. Merret rastësisht një pjesë. Gjej probabilitetin që të zgjidhet:
a) një pjesë nga njëri nga këndet e mozaikut, me dy anë të drejta;
b) një pjesë me një anë të drejtë;
c) një pjesë që ka të paktën një anë të drejtë;
ç) një pjesë që nuk ka anë të drejta



Vizatimi 5

23. Në figurën 6 është dhënë renditja dhe vendet e lira në aeroplanin me të cilin udhëton. Vendet e zëna janë ngjyrosur me të kaltër. Nëse zë rastësisht një nga vendet e lira, sa është probabiliteti që:

a) të ulesh në rreshtin e përparmë;
b) të ulesh në rreshtin e daljes së shpejtë;
c) të ulesh pranë dritares;
ç) të ulesh pranë korridorit;



Vizatimi 6

24. Një topth nxirret nga qesja *A* dhe vendoset në qesen B; pastaj nga qesja B tërhiqet rastësisht një topth (figura 7). Le të jenë:

A: topthi i parë i tërhequr nga qesja *A* është i kuq;
B: topthi i dytë i tërhequr nga qesja B është i kuq.

a) *A* varet rezultati i zgjedhjes së dytë nga qesja B nga topthi që u nxor së pari nga qesja *A*?
b) *A* janë këto ngjarje të varura apo të pavarura?

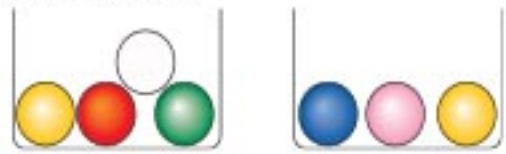


Vizatimi 7

25. Supozo se nga kutitë e figurës 8 tërhiqet rastësisht nga një topth. Le të jenë

A: nga kutia X u tërhoq një topth i kuq
B: nga kutia Y u tërhoq një topth i kaltër.

a) *A* janë ngjarjet *A* dhe B të varura apo të pavarura? Shpjego pse.
b) Sa është probabiliteti që nga kutia X të tërhiqet një topth i gjelbër?
c) Sa është probabiliteti që nga kutia Y të tërhiqet një topth i verdhë?
ç) Nëse nga kutia X tërhiqet një topth i bardhë dhe nuk kthehet, sa është probabiliteti që pastaj të tërhiqet secili nga topthat e tjerë të kutisë X?



Vizatimi 8

26. Në eksperimentin e hedhjes së një dadoje 400 herë, ajo bie 84 herë në këmbë, ndërsa herët e tjera në anë (figura 9).

a) Gjej probabilitetin eksperimental që, kur dadoja të hidhet, të bjerë në anë.
b) Vlerëso probabilitetin që, kur të hidhen dy dado, ato të bien:
1) të dyja në këmbë,
2) të dyja në anë.



Vizatimi 9

27. Një rrotë ka 6 fusha të barabarta: 3 të kuqe, 2 të kaltra dhe 1 të verdhë. Një rrotë tjetër ka 7 fusha të barabarta: 4 vjollcë dhe 3 të gjelbra. Të dyja rrotat rrotullohen njëkohësisht. Gjej probabilitetin që të fitohen:

a) fushë e kuqe dhe e gjelbër,
b) fushë e kaltër dhe vjollcë,
c) fushë e verdhë dhe e gjelbër,
ç) fushë e kuqe dhe vjollcë.

LITERATURA E PËRDORUR

1. Baron, Lorraine, et al. Math 8: Make Sense. Pearson, 2008.
2. Haese, Michael, et al. Grade 8 Mathematics for the International Student. 2016.
3. Pimentel, Ric, and Terry Wall. Mathematics. Hodder Education, 2013.
4. Rayner, David, Ian Bettison, Mathew Taylor. Complete Mathematics. Edited by Deborah Barton, Oxford University Press, 2023.
5. Целакоски, Наум. Дидактика на математиката. Нумерус, 1993.
6. Бакева, Верица. Веројатност. УКИМ–ФИНКИ, 2016.